奈良教育大学　数学研究会会誌

飛火野

2015年6月　第31号

奈良教育大学　数学研究会会誌刊行会

—目次—

巻頭言　　　　ごあいさつ

飛火野編集長　　阪井　築

数学研究会会員の皆々様、お元気で、それぞれの職場において、ご精励くださっていますこと、心よりおよろこび申し上げます。

私もついに、奈良教育大学の数学教育専修に入学してから3年目を迎えることになりましたが、これまでに数多くの大学の授業を受けてきました。中学校で義務教育を終え、大学受験勉強に励んでいた高校までの大半の授業では、受け身の姿勢で臨むことが多くありましたが、大学の授業、特に数学系の授業では、積極的に受けようと思うようになりました。それはおそらく、知的好奇心や探求心からくる「知ることや、答えを求めに行くことの楽しさ」というものを感じるようになったからでしょうが、今となってはこの楽しさこそが“学問の本質”ではないかと考えています。だからもし、将来私が教師になり、教団に立つ日が来れば、子供たちに上記のような楽しさを感じさせられるような授業をしたい所存です。

さて、飛火野も今回で「第31号」を迎えることができました。今号の編集にあたり、過去の飛火野を読むことを通して、数学研究会の歴史の深さやつながりを感じ、より違う方面からの数学の面白さを知ることができました。卒業生の方々・現役学生・先生方・大学を繋ぐ機関紙「飛火野」の歴史に、私が関わらせていただいたことを光栄に思っております。そしてこの飛火野が、我々数学研究会のつながりを一層深める媒体になればと、心から祈るばかりであります。

最後になりましたが、今回の「飛火野第31号」の発刊にあたり、お忙しい中、ご指導いただいた諸先生方、諸先輩方、そして編集するにあたりましてご協力くださいました大勢の方に深く感謝いたします。

数学教室の近況報告

平成26年度　数学教育講座
主任　高木　祥司

平成26年度における奈良教育大学全体の重要な動きとしては，平成28年度からの大学院改組に向けての基本方針が決定され、その準備が段階ごとにスタートしたことが挙げられます．文部科学省が「教職大学院の重点化」と「教員養成系修士課程の改善」という方針を強く打ち出す中，奈良教育大学としては，「修士課程を存続させながら，教職大学院への段階的移行」を目指すことになりました．今年度は，来年度からの本格実施に向けて，全教員が一丸となって良い体制づくりに励むことになるでしょう．数学教室としても，修士課程での教員養成に今まで以上の尽力を求められることでしょう．

さて，数学教室としては，平成26年4月1日付けで，舟橋友香先生が着任されました．活力のあふれた熱心な指導で，本講座・専修の数学教育が大いに活気付いたのが実感できる一年でした．今後のご活躍が大いに期待できると確信いたしました．

学部教育におきましては，平成24年度から「情報数理専修」の学生募集が終了したことをうけ，平成26年度末で基本的には最後の情報数理専修卒業生を送り出しました．一抹の寂しさを感じざるを得ませんが，卒業生の皆さんには，これからも奈教の卒業生として誇りをもって活躍願いたいと思っています．講義面では，教員免許上の必修科目「教職実践演習」が2年目を終え，大学全体としても授業運営の方法がほぼ固まり，数学教室としても有意義な実践科目として運営できるようになってきました．また，「算数・数学教育実践演習Ⅰ・Ⅱ」もスタートし，ますます学生が板書法や説明能力の向上といった実践的演習でスキルアップできる環境が整ってきたように思えます．大学院では，平成26年度修了生が8名で，今年度も5名の修士学生の入学があり，数学教室が本学修士課程に多大な貢献を果たしていると自負しております．理数教育においては，花木先生が中心となり，「理数ミュージアム構築構想」として，近隣の科学館と提携し，学生や教員が作成した教材・教具を展示する取り組みが行われています。今後も精力的な活動により，実践的指導力を備えた算数・数学教員養成に大きな貢献を果たすことになるでしょう．

平成27年度は、新しい学生指導要領のもとで教育を受けた初年度の学生が入学してまいりました．「脱ゆとり教育」とも称される世代ですが，将来の夢に向かって励んでいただき，我々も良き指導ができればと思っております．

皆様のますますのご発展とご活躍を数学教室一同祈っております．

特集

＊附属小学校での教育実習を終えて

＊教育実習を振り返って（附属）

＊母校での教育実習を振り返って

附属小学校での教育実習を終えて

学校教育教員養成課程 数学教育専修
初等教育履修分野 127701 梅本 直哉

私は、三回生の九月の一ヶ月間、教育実習を附属小学校で行いました。そこで学んだ事を事前に準備しておく事・実習中の注意・実習後について・その他の4つの観点でまとめていきます。

1.事前に準備しておく事

細々とした事はあるでしょうが大きくはこの2つだと考えています。

1つ目は実習までの事前指導などでの何度か授業を見る機会に附属小学校の雰囲気を掴んでおく必要があるでしょう。事前指導でも構いませんし、公開授業や研究会に足を運ぶのも1つです。私は公開授業があれば行っていました。附属小学校の先生方が外部の先生方に見せようとして作っている授業ですから、学ぶ事も多いです。機会があれば、見に行ってみるといいでしょう。どんな児童が居るのか、どのような指導の仕方をしていて、児童の反応はどうか等、観察するところはたくさんありますから、少ないチャンスを生かして、しっかり学んでください。

2つ目に、これは担当学年や範囲などが分かってからの話ですが、教科書比較をしておく事です。附属小学校は、教科書を使って授業を進めることが比較的少ない特殊な学校なので、自分達で考えた授業を行いやすい反面、基盤がないということにもなります。なので、教科書がどのように担当の単元を進んでいるかを把握し、自分だったらどのように教えようかということを考えておく事によって、実習での指導案作成が比較的楽になるかと思います。

2.実習中の注意

実習中に注意すべき事はいくつかありますが、まず初めに、児童からすれば学校の教室にいる大人は先生同然だということを自覚しておいてください。自分の言動、良い事も悪い事もすべてが、児童達の見本となっている事を忘れないように行動しましょう。

2-1 授業について

小学校ではもちろん、国語などの自分の専門ではない教科も教えなくてはなりません。専門知識が足りない部分をすぐに補う事は容易い事ではないので、児童がどんな疑問を持つかを考えて、それには最低限答えられるように色々と調べ、準備しておく事が大切です。準備している事は自信を持ってできます。経験上、授業中の失敗は大抵が準備不足によるものですから、なるべくしっかりと準備をして授業に挑んでください。例えば算数なら、何故その式が成り立つか、数字や記号の起源などが分かっていると良いと思います。特に専門教科では深い学びを根底に置いた授業を作って下さい。

2-2.授業外について

実習での1日の流れは、8時ごろから児童は登校してくるので、それまでに学校に到着しておき、授業準備や挨拶をします。8時30分から朝の会、授業、給食指導、掃除、終わりの会の後、担当教員の指導があります。1日の簡単な流れはこのようなものですが、基本的に授業が始まってから下校までの休み時間は児童と関わりを持つ時間になるので、教材作りなどは前日、もしくは放課後にやるものであると考えておいたほうが良いと思います。先生方に何か聞きたい質問がある際、委員会、臨時の会議など、先生方もお忙しいので、聞きたい事をまとめて、簡潔に答えをいただけるように整理しておくと良いでしょう。一緒に授業を作って頂けるほどの時間はありません。自分で考えたものを確認していただいたらすぐに授業本番が来てしまいます。授業準備にしっかりと時間をかけて、頂いたアドバイスを参考にしながら授業を作っていってください。研究授業や、自分の担当する授業は担当教員に許可を取ってビデオを取り、今後の参考に残しておくと良いと思います。

3.実習後について

実習後にまずする事は、お礼状を書くことです。普段からお忙しい先生方にたくさんのことを教えていただいたのですから、その感謝の気持ちをこめて、お世話になった学校や先生方にお礼をしましょう。また、自分の授業の記録の振り返りをすると自分の弱点や、癖が見え、良い対応の仕方などを考えるきっかけになります。自分を客観的に見つめ直し、更なる学びへと実習を繋げるようにしてください。

4.その他

基本的な礼儀や挨拶などは、社会人としてもちろんのことですが、学校で子供達と対峙することを考えると、必要なのは広い心と広い視野だと私は考えています。教師として、ただ勉強を教えるだけではなく人間を育てるという事を考えると、子供達が様々な壁にぶつかっていく事を受け止める心の余裕と、子供達一人ひとりの様々な障害に対応していけるような広い視野を持って教育に挑む事が大切でしょう。そのために、色んな事に興味を持って、日々学び続けていくことが必要です。教育実習中も自分の教科だけでなく他教科にも興味を持って他者から学び、分からないところを自分で学び、どんどん知識や視野を広げてください。

人が育つ瞬間というのはすごく大きな感動があります。授業の中で、学校生活の中で、児童が一生懸命学校という学び舎で育とうとしている生き生きとした姿を見て、学び、悩み、考え、そして自分も成長していってください。

教育実習を振り返って（附属）

学校教育教員養成課程　教科教育専攻
数学教育専修　中等教育履修分野
127716　大澤拓未

私は、3回生の1か月間、附属中学校で実習させていただきました。附属ということで、自分でアポイントメントを取る必要もなく、実習に集中することができました。また、ほかの実習生もおり、お互いに協力し合うことができたので、附属での実習は心強いと思います。

1.実習前にしておくべきこと

担当学年が決まったら、実習期間の学習範囲を把握しておくべきと思います。特に、教科書を読んでおくことが大事です。事前に、何が書かれていて、なぜ教えるのか、どのように教えるのか、自分なりに考えておくとよいでしょう。実習が始まると、毎日授業があります。授業前日に教材研究を行うと、準備が不十分になり、行き当たりばったりの授業になり兼ねません。日々の負担を減らすため、効率よく授業準備するためなどに必要だと思います。教育実習を経験し終えた先輩方の話を聞いておくことで、実習に対してのモチベーションもあがるので良いと思います。

また、実習中は朝が早く、帰るのは夜遅いし、休日や空き時間は教材研究に費やさなければいけないので、休む時間がほとんどありません。そのため、実習前から体調管理をしっかりしておく必要もあると思います。

2.実習中にすべきこと

積極的に生徒と接してほしいと思います。実際に現場に立って、教員の仕事を任せてもらうことはなかなかできない貴重な体験で、生徒も教師として接してきます。そして、1日でも早く生徒の名前を覚え、一人ひとりの部活や趣味などを把握すべきです。そうすることで生徒との距離が縮まります。コミュニケーションをとり、生徒たちはどんなことを考えて生活しているのか肌で感じてほしいです。また、生徒だけでなく、現職の先生にも話しかけてみてください。疑問に思ったことは、質問すれば丁寧に答えてくれます。自分が現場に立った時に役立つと思うのでぜひ積極的に行動してほしいと思います。

授業においては、授業準備をしっかり行って授業に臨む必要があります。教師が適当な授業を行うと、生徒も適当に授業を受けるようになります。指導案・板書案を作ると思いますが、実際に授業をする際にはそれらを見ることなく授業ができるように、頭に叩き込んでおいてほしいと思います。準備していた生徒の反応と実際の生徒の反応は異なることが多いが、自分の意見を貫くのではなく、生徒の意見を優先し、臨機応変に授業を進めていく必要があります。

母校での教育実習を振り返って

数学教育専修　中等教育履修分野
127723　中野　真輝

私は母校である奈良市立若草中学校で９月の１カ月間、教育実習をさせていただきました。教育実習生は私しかおらず、多少不安な面もありましたが、教頭先生をはじめとして、自分が中学生のころ教えてくださった先生方がたくさんいて、とても心強かったです。では、教育実習にむけてしておくべき準備や教育実習中に注意しなければならないことを以下にまとめます。

・準備しておくこと

教育実習の授業に向けて、その学校で使われている教科書を読みこみ、おおよその授業計画や教材作成はしておくべきです。というのも、９月は私の中学の場合、文化祭と体育大会という大きな行事があり、実習中はその準備に追われたりすることもあるため、早め早めの準備は非常に重要だと思います。また、学校にもよると思いますが、１週目から学級運営（朝の会、終わりの会、学活など）を任されることもあります。名簿は前もって渡されているので生徒の名前をしっかり覚えたり、朝の会や終わりの会で話せる３分くらいのためになる小話を用意しておくのも大切だと思います。

・実習中に注意しなければならないこと

実習中は慣れないことばかりで様々なことに注意が必要ですが、特に私が気を付けなければならないと感じたのは、生徒との距離感です。教育実習生は年齢が生徒ともそこまで離れていません。なので、生徒も気軽に話しかけてきてくれますし、人気も出ます。実際生徒から慕われるのは思っている以上に気分がいいものですが、そこで生徒と仲良くしすぎるのはあまり良くありません。生徒の中にはあだ名で呼んできて、先生という言葉を付けなかったり、LINE を聞いてくることもありますが、そういうことを許してしまうと、先生と生徒という関係が友達のような関係になってしまって、生徒指導の場面などで上手く指導できないことにつながります。だから、１線を自分と生徒の間に引いて接するべきだと思います。

最後に、実習で最も大切なことについて話します。それはチャレンジする気持ちです。教職に就く前に、現場の一員として生活できることは実習だけです。自分にとっての得意なこと、苦手なこと様々あると思いますが、失敗を恐れずにどんどんチャレンジしてみてください。実習を受け身で過ごすのと、積極的に行動して過ごすのでは得られるものは大きく異なってくると思います。では実習頑張ってください。

2014年度数学研究会　活動報告

＊H26年度活動報告およびH26年度活動予定について

＊算数教室を通して

H26 年度活動報告およびH27 年度活動予定について

数学教育専修　初等教育履修分野　3 回生
数研総会会長
丸野美咲

本格的な夏の前に、木々の緑が色濃くなり、衣替えの季節となりました。皆さまにはますますのご健勝の事とお喜び申し上げます。

はじめまして、H26 年度数研総会会長の工藤彰優に代わり、H27 年度数研総会会長に就任させていただきました丸野美咲と申します。まだまだ未熟者で分からないことだらけではございますが、仲間たちと支え合いながら日々頑張りたいと思いますので、どうぞよろしくお願いいたします。

さて、H26 年度の活動報告とH27 年度の活動予定を報告させていただきます。H26 年度において、6 月に数研総会を開催いたしました。それに加え、飛火野を配布し、H25 年度の活動報告を記載しました。4 月にはH27 年度役員決定、算数・数学教室の準備に取り組み、8 月 14 日（木)、15 日（金)、16 日（土)、17 日（日）の 4 日間にわたり開催いたしました。12 月から卒業論文発表会の準備に取り掛かりました。翌年 2 月に行われた卒業論文発表会が終了した時点で役員交代となり、同時に引き継ぎを行いました。

H27 年度の活動予定としては、基本的には変更はありませんが先輩方の反省を踏まえ、算数・数学教室の引き継ぎを例年より早めていただきましたが自分たちの反省も踏まえ例年よりもさらに早く 2 月から準備に取り掛かっています。またH28 年度役員決定も 2 月に行い、活動内容を理解してもらうように努め、スムーズに引き継ぎができるように運営していく所存です。

最後に、数々の先輩方が築きあげられてこられたこの名誉ある数研総会の名を汚さぬよう、また更なる数研総会の発展のため役員一同尽力していきますので、よろしくお願いいたします。

算数教室を通して

数学教育専修　中等教育履修分野　3回生
算数数学教室　代表
中元　悠貴

私は算数数学教室の活動を通して、学校行事を行うすごさ、人をまとめ引っ張ることの大変さ、教材・指導案の大切さ、実際に子供たちの前で授業をする難しさ、そしてそれらを終えた後の本当に大きな達成感を感じることができました。

たった4日間、大学で奈良市に住む小・中学生を対象に自分たちで作った教材で授業をする。たったこれだけのことなのに準備期間は3か月もかかりました。その準備期間の中でも問題はたくさん起こり、日程や仕事の進行具合をしっかりと把握・管理できず、自分の代表としての不甲斐なさを痛感しました。その中でも無事、たくさんの小・中学生を招き、楽しく授業を行い、ありがとうございました、わかりやすかったよ、また来年も来たいと笑顔で帰ってもらうことができたのも専修内で話し合い、自分の仕事にとらわれずそれぞれが働きかけ動き、助け合った結果だと思います。他の専修では経験できないすばらしい経験ができたと思い、この伝統ある算数数学教室にはとても感謝しています。また、教材・指導案作りも何を学んでほしいのか、どのようにして伝えるのかを教科書を読み何をここでは学ぶ必要があるのか調べるところから始め、まだまだ改善の完成には程遠いものでしたが、0から自分だけの教材・授業を作りやりきったのもすごく貴重な経験となりいい思い出となりました。

しかし算数数学教室の思い出は決していい思い出だけではありません。本当に時間に追われる中の作業ばかりでしたし苦労はします。時には専修内で衝突することもありました。ただその中でも4日間とはいえ実際に子供たちに先生と呼ばれ、子供たち、保護者の方にありがとうございましたと言われ、専修のみんなで協力して作り切った感動・達成感はすごく、私は涙をこらえることができませんでした。このことで改めて教師になりたいと強く感じるようになった人は私を含めたくさんいたと思います。

このような本当に規模が大きく伝統ある行事の代表に森本と共になれたことは私にとってすごく貴重で考え方や視野を広げるすばらしい経験となりました。最後に、算数数学教室の準備に関わって下さった先輩方、先生方。また運営にあたって協力していただいた方々、本当にありがとうございました。また、算数数学教室を最後までやり遂げた同専修の方々、本当にお疲れ様でした。この伝統あるすばらしい行事が今後も残り、さらに発展することを心から願って、私の文章をしめくくりたいと思います。後輩の皆さん、大変だとは思いますが私たちもサポートします。頑張ってよりすばらしい算数数学教室を作って下さい。

2014年度　卒業論文

平成 26 年度卒業論文

可微分多様体
～関数の微分と臨界点～

総合教育課程　科学情報コース
情報数理専修　116904
代数学研究室　河原弘樹

【卒業論文構成】

【はじめに】

この卒業論文では,「多様体入門」(松島与三 著) に沿って, 多様体に関する初歩的な結果をまとめたものである.

本卒業論文では特に説明がない限り,「多様体入門」をまとめたものである. 私が担当したところは, 第 1 章「序論」§1(位相空間 B,D),§2(ベクトル空間 B,E),§3(n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ と C^r 級関数 A,B),§4(逆関数の定理), 第 2 章「可微分多様体」§2(可微分多様体の例),§4(可微分写像),§5(リーマン計量),§6(関数の微分と臨界点) である. 他の範囲は正木氏の卒業論文を引用した.

【おわりに】

「多様体入門」の教科書の内容は, 大変難しく, 始めは卒業論文を書き上げれるか, 不安でしたが, 川崎先生や, 正木, 院生の先輩方から, たくさん助言をいただき, ひとつひとつ理解し, 本卒業論文を書き上げることができました.
最後になりましたが, 川崎先生を始め, 同じ研究室で共に勉強した正木, 川崎研究室の院生の先輩方には心より感謝申し上げます.

【参考文献】

多様体入門　松島与三　裳華房 (1965)
多様体上の関数の微分　正木大樹　2014 年度卒業論文
代数系入門　松坂和夫　岩波書店 (1976)
位相への 30 講　志賀浩二　朝倉書店 (1988)

H.Freudenthal による「数学化」を手がかりとした学習指導に関する研究

学校教育教員養成課程　理数・生活科学コース
数学教育専修　4回生　舟橋研究室
学籍番号　115708　八田卓也

［要約］　本研究の目的は、Freudenthal による「数学化」を手がかりとした学習指導の意義を明確にすること、「数学化」に基づいた具体的な授業案、及び教材を提案することの 2 点である。そのために Freudenthal による数学教授の原理を明確にした上で、「数学化」を手がかりとした学習指導の教育的価値をまとめた。これらを踏まえ、「数学化」を学校教育に具体化するための枠組みを確立し、具体的な授業案及び教材を作成した。本研究においては Freudenthal や数学化に関する文献解釈を中心とした理論的考察を主たる研究方法として展開した。

論文構成

平成 26 年度　卒業論文発表会　　　　　　　　　　　　平成 27 年 2 月 11 日

「単位量当たりの大きさ」における児童のつまずきに関する研究
―イメージ化に焦点を当てて―

奈良教育大学　学校教育教員養成課程
理数・生活科学コース　数学教育専修
舟橋研究室　１１５７０９　平野　健太

【要約】本研究の目的は、単位量当たりの大きさの単元における児童のつまずきを明らかにすることと、単位量当たりの大きさに関する児童のつまずきを克服するための指導法を提案することの二点である。

本研究では、上記の目的を達成するために、単位量当たりの大きさに関する文献解釈と、児童のつまずきの原因を特定するための調査を行った。調査結果より、イメージ化する力があれば、意味の伴った立式ができるが、そのイメージ化の能力が児童に不足していることが明らかとなった。これらの内容を踏まえたうえで、つまずきを克服するための学習指導の提案を行った。

本論文の構成

平成26年度　卒業論文発表会　　　　　　　　　　　　　平成27年2月11日

児童による「量感」を根拠とした意思決定に関する研究

学校教育教員養成課程理数・生活科学コース
数学教育専修　舟橋研究室
115717　山田健吾

<要約>

本研究の目的は、児童がどのような量感を持っているのかを明らかにし、それをもとに児童の量感を豊かにするための具体的な指導の提案をすることである。量感というのは本研究では「計器を使わずにある量の大きさの見当をつけたり，ある単位で示された量が実際の物でどれくらいの大きさになるかの見当をつけたりするための，およその感覚」とする。目的を達成するための調査を実施し、児童の持っている量感を明らかにする。調査結果を踏まえて、児童の量感を豊かにするための具体的な授業を作成した。

本研究で得た結論は主に以下の三点である。第一に「長さ→面積→体積」と次元が上がるにつれて量感が身に付いていないという困難点が明らかになった。第二に児童の持っている量感には「生活経験による、根拠が抽象的な量感」と「武器になる量との比較が根拠となる量感」の二種類の量感があることが分かった。第三に、この二種類の量感の調査問題の比較より、「武器になる量との比較が根拠となる量感」を根拠にして意思決定している児童のほうが正しく意思決定できている児童の割合が多いことが明らかになった。

<本論文の構成>

平成 26 年度　卒業論文

ICT を活用した数学教育の研究

学校教育教員養成課程　理数・生活科学コース
数学教育専修　近藤研究室　105707　獅倉賢

＜論文構成＞

＜要約＞

本研究の動機は、筆者の教育実習やスクールサポートでの経験である。教育実習中に中学校で動点問題の授業をする機会があり、始めは教材無しで授業をしたのだが、生徒の理解はあまり見られなかった。この反省を活かし、次の授業では紙で作った教材を用いた結果、生徒の反応がよく、問題もよく解けていた。この経験から教材が有るときと無いときで、生徒の反応だけでなく理解度にも大きく違いがあることに気付いた。しかし、教材を毎回の授業に準備するのはとても大変で、また保存しづらいという欠点も見受けられた。そんな中、小学校の教育実習中にタブレットを用いる授業、スクールサポートで電子黒板を用いる授業を目にし、生徒の意欲的な態度を見て、数学の授業にどんどん ICT を活用するべきだと考えた。だが、「普通に黒板に書いてくれたほうが見やすい」「面白かったけどわからなかった」などの生徒の発言も聞けたことから、ただ ICT を活用するのではなく考えた。しかし残念なことに奈良県の ICT 活用率は全国最下位である。そんな背景からも、あらゆる分野で ICT を活用し普及していけないかと考え、本研究に至った。

本研究の目的は、次の 2 点である。

目的 1 : ICT の利点・効果を明らかにする。

目的 2 : ICT の効果や活用がよくわかる授業指導案を考察する。

ＩＣＴの活用に当たっては、「関心・意欲への効果」、「思考への効果」、「説明場面での効果」の 3 つの効果に基づいて活用していく。生徒は自分なりの考えをもって問題に取り組むとともに、話合いを通して、自分の考えを数学的に表現し、根拠を明らかにして説明していくという活動を通して、数学的コミュニケーションを活性化することにより、数学的な思考力・表現力を高めていくと考える。今後、数学の授業でＩＣＴをより効果的に利活用するために、ＩＣＴの活用が効果的だった実践事例や授業で活用できるコンテンツを数学教師間で共有していくことが必要であると考える。そのために、指導案に ICT を用いる意図などの情報を書くことが大切であると考える。また、生徒の数学的コミュニケーションを活性化するためには、ＩＣＴの活用とともに、明確な意図に基づいた発問が大切になってくる。さらに、スクリーンに表示したものはすぐに消えてしまうため、ノートに写させたいものは板書するなど、ＩＣＴの活用と板書とのバランスも大切になってくる。これらについては、実経験が不足しているので、これからの指導において考えていきたい。

平成26年度　卒業論文

多角形の内角の和を求める授業の研究
～数学のよさに焦点をあてて～

奈良教育大学　学校教育教員養成課程
理数・生活科学コース　数学教育専修
近藤研究室　115702　小川裕美

<論文構成>

＜要約＞

筆者は教育実習で数学の授業を担当した際に，多角形の内角の和を求める授業を組み立てる難しさを知った。筆者が担当したクラスは，指示したことは積極的に取り組もうとするが，問題解決に向けて自分で考え取り組もうとする生徒の少ないクラスであった。そこで，筆者が授業構成の上で最も重要であると考えたのは，生徒自身が数学の良さを感じ，数学が楽しいと思うことである。なぜなら，数学の良さを感じ数学が楽しいと思うことができたら，問題解決に向けて自分で考えて取り組もうとするのではないかと考えたからである。そこで研究授業では，学習指導要領にも示されている「数学的活動」を用いた授業を構成したが，上記で示した「問題解決に向けて自分で考え取り組もうとする生徒」の姿が見られなかった。
また，大学の授業でも「多角形の内角の和を求める」授業を行う機会があったが，どのような授業展開にすればよいのか，疑問に思った。各教科書会社についても取り上げ方は様々で，それぞれの取り上げ方を比較・分析し，その意図を知りたいと考えた。
本研究の目的は，次の二点である。第一に，本時の授業展開にはどのようなものがあるのか，各教科書会社を比較・分析する。第二に，「いろいろなことを盛り込んだ」多角形の内角の和を求める授業の提案である。
本研究で得た結論は，次の二点である。第一に，授業展開は大きく分けて3通りあり，それぞれについてねらい・目標が異なっている。また，ねらい・目標の違いによって説明方法や問題が大きく異なっているということである。第二に，様々な数学の力をつける上で，①1通りの三角形の分け方で，表から180°×（n−2）の式を求める。②図で，（n−2）の意味を理解する。③多角形の頂点・辺・内部・外部の1点から各頂点に線分を引いて式を求める。④それぞれの図について式を出し，それらを1つにまとめる。この①～④の順序で授業展開を考えることがよいと考えた。
今後の課題としては，紙面上の授業の提案ではなく，実践を視野に入れた授業の提案である。この授業では，取り扱いの順序も重要になるので，上記でも述べた①～④の各つなぎの部分での発問の工夫などについても考察をしていく。

平成26年度　卒業論文
「算数におけるオープンエンド問題を用いた授業の評価に関する研究」

学校教育教員養成課程
理数・生活科学コース　数学教育専修　4回生
近藤研究室　115707　中田知余

<論文構成>

大学の数学に関する授業でオープンエンド問題が扱われ、多様な考え方ができることや人によって答えが違ってくることに、おもしろさを感じた。また、「算数・数学は答えが一つしかない」と思い込んでいる児童・生徒にとっては新たな発見となるのではないかと思った。その中で、オープンエンド問題は答えが分かれるので最終的なまとめ方が難しいのではないか、オープンエンドにできる問題が限られているのではないかという印象を持った。研究を進めていく中で、まとめ方や教科書での扱われ方はわかってきたが、評価についてどのようにすべきかがあまりはっきりと述べられていないことがわかった。本研究の目的は、二点ある。まず第一の目的は、オープンエンドにおける評価の方法を明確にすることである。第二の目的は、具体的な場面でオープンエンド問題を用いたときのまとめ方、評価の方法を考案することである。

本研究で得た結論は次の通りである。まず、第一の目的については、教師が児童の実態を把握するのに有効な評価方法としては、評価表を用いて児童の反応を数値化し評価する方法があった。しかし、この方法は教師にとってはわかりやすくても、児童には伝わりにくいものであった。そこで、児童に伝わる、次につながる評価にしたいと考え、多様な考えについてのまとめ方と関連させて授業内で評価を伝える方法を考えた。第二の目的については、「平行四辺形、ひし形、台形」の単元でのオープンエンド問題を用いたときの授業について考案をした。まとめ方は独立的な多様性のまとめ方を用い、それぞれの考えの妥当性に注目し、それぞれの考えを無理にまとめない方法をとした。評価は「ワークシートと授業の展開で着目した観点について確認すること」と「友達の意見を聞いて気づいたことを書かせること」で行うこととした。

今後の課題としては、評価方法についてはもっと深く研究していく必要性を感じた。児童に伝わる評価とするために、もっと普遍的に扱える、評価方法というのを考えなくてはならない。また、今回は数値化する方法についてはあまり触れなかったが、有効な方法ではあるので、もっと別に数値化するための方法はないかなどを探っていきたい。

平成 26 年度　卒業論文

数学における公式やきまりの意味または根拠を理解しようとする態度を育てる支援法の提案

学校教育教員養成課程　理数・生活科学コース
数学教育専修　近藤研究室　115715　森田寛

＜論文構成＞

＜要約＞

本研究の目的は次の二点である。第 1 の目的は、数学において公式やきまりの意味や根拠を理解しないことにはどのような問題点があるのかを明らかにすることである。第 2 の目的は子どもたちの公式やきまりの意味や根拠を理解しようとする態度を育てるにはどのような条件があるかを明らかにすることである。

本研究で得た結論は次の通りである。目的 1 については、「「数学において公式やきまりの意味や根拠を理解しない学習」では本来「数学において公式やきまりの意味や根拠を理解する学習」で身に付く力がほとんど欠落してしまう危険性があること」「自らの力で根拠から公式を導くことができない(一度忘れると公式・きまりを覚えなおさなくてはいけなくなる。)」などの問題点があることが分かった。また、それに合わせて数学において公式やきまりの意味や根拠を理解しない学習でも得られる利点としては「容易に理解できる」「その利益がより速くはっきりと現れる」「関係的思考よりも道具的思考の方がほんの少しの知識で済むので、しばしばより速くより信頼できそうな正答を得ることが出来る」などがあることも分かった。それらを踏まえたうえで、数学教育の目的のうち「人間形成的目的」を満たすためには、やはり「数学において公式やきまりの意味や根拠を理解する学習」が必要であると結論付けた。

目的 2 については場面に応じた支援法(○授業前…診断テスト　○授業時…考えの名づけ、理由の説明、他の考えをきく、根拠または意味を問う問題、関係的理解の判断問題、意味または根拠の発表　○定期テスト…根拠または意味を問う問題、関係的理解の判断問題　○レポートなど(時間をかけることができるとき)…考察)があることが明らかになった。またこれらを使い授業などを組み立てることの難しさもわかった。

今後の課題としては実践不足の解消である。多くの実践を重ねて本研究内容を精錬し、子どもたちの公式やきまりの意味や根拠を理解しようとする態度を育てる支援法を完成させていきたい。

平成 26 年度　卒業論文

中学数学における問題解決の方法の説明に関する研究　～関数の領域に焦点をあてて～

奈良教育大学　学校教育教員養成課程
理数・生活科学コース　数学教育専修
近藤研究室　115716　森本健太

＜本論文の構成＞

＜要約＞

筆者は、中学校での教育実習等を通して、問題の解き方が正確に説明できなかったり、説明をすること自体に苦手意識を持っていたりする生徒が多くいることを知った。このことは全国学力・学習状況調査の結果にも表れており、数学の活用する力を見る「数学 B」の問題の中でも、特に記述式問題の「方法の説明」にあたる問題の正答率は低くなっている。そして、子どもたちに問題解決の方法を説明する力を身に付けさせることができる指導の工夫について研究したいと考え、本研究に至った。

本研究の目的は、次の三点である。第一に、これまでの学力調査から中学生の現状と課題を明らかにすることである。第二に、教科書等の内容から問題解決の方法の説明についての扱いを明らかにすることである。第三に、生徒に問題解決の方法を説明する力を身に付けさせることのできる授業を提案することである。

本研究で得た結論は、次の三点である。第一に、これまでの学力調査から中学生には「グラフ、表、式などの用い方を理解し、問題解決のために上手に活用できる力」「問題解決の方法の説明について理解し、正確に言葉で表現することができる力」が身に付いていないこと。第二に、教科書及び教師用指導書の現状から、方法の説明を取り入れた授業を行うかどうかは授業を行う教師に任されている部分が大きいこと。第三に、方法の説明を取り入れた授業を行う際の配慮点は「方法の説明を生徒にさせる際には、ノート等に考えたことをかかせ、内容の改善を通して、数学的に正確な表現を身に付けさせること」「方法の説明を繰り返し行うことで、獲得した解決方法の定着をはかり、同類な問題が出題された際にそれを使えるようにすること」の 2 点であること。そして、この配慮点を意識したうえで問題解決の方法を説明する力を身に付けさせるための授業を提案した。

今後の課題としては、問題解決の方法の説明を取り入れた授業の提案を行ったものの、実践する機会はなかったため、今後実践を通して改善を行う必要がある。

倒立振子システムの解析と制御

― シーソーシステム及びシーソー倒立振子システムの解析 ―

総合教育課程　科学情報教育コース　情報数理専修

116901　池谷　梓

近年，システム制御技術は著しく進展を続けている。システムを開発するにあたって，対象となるものの運動をモデル化し，解析することが必要となる。本論文を書くに当たり，二つの実験を行った。一つ目の実験では，シーソーを水平に保ちバランスをとるシステムを，二つ目の実験は，シーソーを水平に保ちつつ，シーソー上にセットした倒立振子も垂直に保つシステムを構築する。

システム $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$ が安定であるための必要十分条件は，行列 A の固有値の実部がすべて負となることである。

システムの運動方程式から導いたシステム行列 A の固有値は

$$\begin{aligned}\mathrm{eig}(A) = \{&0, 2.6663, -0.4157,\\ &-2.4934, -13.6130\}\end{aligned}$$

であり，実部に非負値が含まれており安定でない。

そこで最適制御により、システムを安定化させる。このときの最適フィードバックゲイン K を求める。そして、$A - BK$ の固有値を求めると，

$$\begin{aligned}\mathrm{eig}(A-BK) =\{&-19.4450, -0.8124,\\ &-4.2444 \pm 2.8885i, -8.6004\}\end{aligned}$$

となり，固有値の実部がすべて負になることから，システムは安定ということがわかる。

以上のように，最適制御によりシーソーシステムを安定化することができる。また，図 1，2 に実際に実機を使った実験結果を図に示す。横軸はすべて時間，縦軸は上から台車位置 x_c、シーソー角度 θ である。どのグラフも 0 に近づいていることから，このシステムが安定であることがわかる。

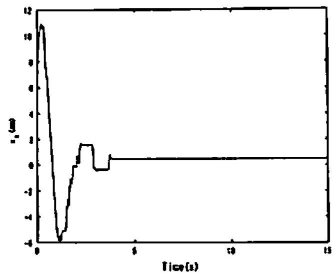


図 1　台車位置

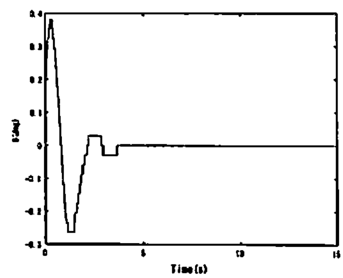


図 3　角速度

今後の課題としてシステムに関して更なる解析をし，より良い安定化制御を試み，実機での実験を行っていく必要がある。

倒立振子システムの解析と制御

－シーソーシステム及びシーソー倒立振子システムの制御－

総合教育課程　科学情報コース　情報数理専修

116909　三宅　祥五

本論文では，シーソーのバランスを取りながら，更にそのシーソーの上で倒立振子のバランスを取るという制御を最終目標とする（以下，これを実験2と呼ぶ）。その実験に先立って，まずは基本となる不安定なシーソーのバランスを取る事のみを目的とした実験を行う（以下，これを実験1と呼ぶ）。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章で，実験1のシステムの非線形運動方程式の線形化を行い，状態空間表現を導出する。第3章で，実験1のシステムの安定性を判別し，安定化制御を行う。第4章で，実験2のシステムの非線形運動方程式の線形化を行い，状態空間表現を導出する。第5章で，実験2のシステムの安定性を判別し，安定化制御を行う。最後に第6章でまとめを述べる。

以下に記載したのは，図1がシーソー＋倒立振子システムの概略図であり，図2～図3が実験2のシミュレーションのグラフである。グラフから，シーソー角度 θ 及び振子角度 α が漸近安定していることがわかる。

今回の実験で，良い制御を得るためには固有値の実部の絶対値が大きければ良いというわけではなく，適当な値があり，そのために適切な重みを与えた Q 及び R を設計することが重要であるとわかった。

今後の課題としては，実機実験における初期値の正確な設定方法を確立し実験の再現度を高めることと，より最適な Q 及び R を設計することにより，より良い安定化制御を試みる必要がある。

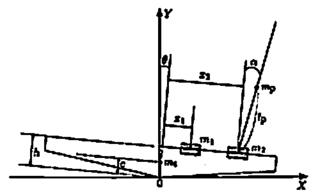


図1　シーソー＋倒立振子システムの概略図

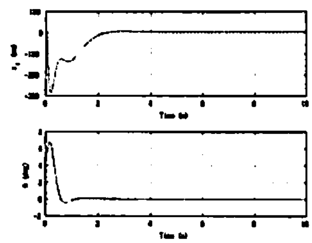


図2　実験2のシミュレーショングラフ1

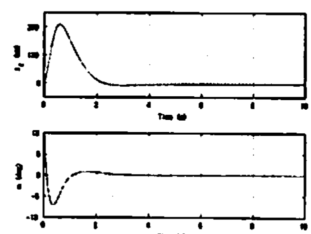


図3　実験2のシミュレーショングラフ2

平成26年度卒業論文
多項式から得られるハイパー群
学校教育教員養成課程
理数生活科学コース
数学教育専修
河上研究室
115701　河上研究室 岡本　太樹

1　はじめに

この研究の動機だが、まず、私は入学当初から解析学の分野にとても興味をもっていた。河上研究室で、学んでいるときにハイパー群というものに出会った。その後ハイパー群を学んでいく間に多項式から群を実現できるのなら、同様にしてハイパー群は様々な多項式を用いて実現することはできないかという考えに至った。そこで私は多項式から得られるハイパー群を卒業研究として研究することに決めた。

この研究では、ハイパー群を多項式を用いて構成している。複素係数多項式全体のなす *algebra* をそのイデアルで割った *quotent algebra* の基底を考え、それがどのようなハイパー群になっているのかを確認した。

1.1　第1種チェビシェフ多項式から得られるハイパー群

第 1 種チェビシェフ多項式を用いるとハイパー群を得ることができた。そのハイパー群を示す。
(1)$T_{l+1}(x) - T_l(x)$ からはハイパー群 K=$\{T_0(x), T_1(x), T_2(x), \cdots, T_l(x); T_{l+1}(x) - T_l(x)\}$ が得られる。K は正 $2l+1$ 角形の辺上の対称ランダムウォークから得られるハイパー群と同じである。

(2)$T_{m+1}(x)-T_{m-1}(x)$ からはハイパー群 K=$\{T_0(x), T_1(x), T_2(x), \cdots, T_m(x); T_{m+1}(x)-T_{m-1}(x)\}$ が得られる。K は正 $2m$ 角形の辺上の対称ランダムウォークから得られるハイパー群と同じである。

1.2　第2種チェビシェフ多項式から得られるハイパー群

第2種チェビシェフ多項式からハイパー群を得られたので示す。
$U_n(x) = 0$ の解の最大値を $x = \alpha$ とする。このときの θ, α は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} &= 0 \quad \sin\theta \neq 0 \text{なので} \\
\sin(n+1)\theta &= 0 \\
(n+1)\theta &= k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, n) \\
\theta &= \frac{k}{n+1}\pi
\end{aligned}
$$

$\cos\frac{k}{n+1}\pi$が最大のとき $k=1$ であるので、
$\theta = \frac{1}{n+1}\pi \quad \alpha = \cos\frac{1}{n+1}\pi$　である。
また、$U_m(\alpha) = \frac{\sin\frac{m+1}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}}$である

$$f_0(x) = U_0(x), \quad f_1(x) = \tfrac{1}{U_1(\alpha)}U_1(x),$$
$$f_2(x) = \tfrac{1}{U_2(\alpha)}U_2(x), \cdots,$$
$$f_{n-1}(x) = \tfrac{1}{U_{n-1}(\alpha)}U_{n-1}(x)$$

とおくと、$K = \{f_0(x), f_1(x), f_2(x) \cdots, f_{n-1}(x); U_n(x)\}$ はハイパー群となる。

2　おわりに

私は、本論文を書くにあたり、多項式から得られるハイパー群について勉強してきました。チェビシェフ多項式から、さまざまなハイパー群が得られることが分かりました。

グラフから得られるハイパー群

奈良教育大学
教育学部　学校教育教員養成課程
理数・生活科学コース　数学教育専修
河上研究室　115704　親木翔平

1 はじめに

私は，2年間ハイパー群について研究を重ねてきた．その中で，多項式やグラフといった一見ハイパー群とは関係がなさそうなものからハイパー群が得られることに感動を覚えた．そして，本研究では正多角形やディンキン図形などの多数のグラフからハイパー群を構成した．

その結果，正多角形のグラフのうち，一定の向きをもつ有向グラフの場合には巡回群が得られ，向きをもたない無向グラフの場合にはハイパー群が得られた．また，3個の頂点と2本の辺を直鎖状に並べたグラフからもハイパー群が得られた．その構成方法は，グラフの隣接行列から Fusion rule algebra を求め，それを次元関数で割るというものである．以下に研究を行ったグラフの一例を示す．

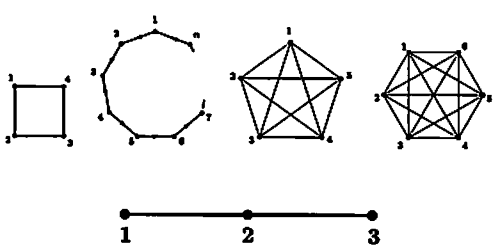


図 1: 研究対象のグラフの一例

2 正三角形の無向グラフ

正三角形の無向グラフについて考える．グラフの隣接行列を Y_1 とすると，その定義より次式 (1) が成立する．

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2Y_0 + Y_1 \quad (1)$$

よって，$F := \{Y_0, Y_1\}$ は Fusion rule algebra になる．次に，式 (1) より次元関数を求めると，

$$d(Y_0) = 1, \quad d(Y_1) = 2$$

となる．そして，集合 F の各元を次元関数で割る．したがって，各元は次のようになる．

$$c_0 := \frac{1}{d(Y_0)} Y_0 = Y_0, \quad c_1 := \frac{1}{d(Y_1)} Y_1 = \frac{1}{2} Y_1$$

そして，式 (1) を用いると，

$$c_1^2 = \frac{1}{2} Y_1 \frac{1}{2} Y_1 = \frac{1}{4} Y_1^2 = \frac{1}{4}(2Y_0 + Y_1) = \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} c_1$$

となり，係数が正の実数でありその和が1なので，

$$K := \{c_0, c_1\}$$

とするとこれはハイパー群である．その構造式は，

$$c_1^2 = \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} c_1, \quad c_0 c_1 = c_1 c_0 = c_1$$

である．これが正三角形の無向グラフから得られるハイパー群である．

3 おわりに

今回，いくつかのグラフを扱ったが，まだ一部のものしか研究できていない．今後は群論を用いてグラフの対称性について考察し，それをもとに別のグラフに関してもハイパー群が構成できるのかを探っていきたい．

参考文献

[1] 小林俊行・大島利雄, Lie 群と Lie 環, 1, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 1999 年

[2] 斎藤正彦, 線型代数入門, 基礎数学, 1, 東京大学出版会, 1966 年

[3] 高橋恒郎, ベクトルと行列, 数学講座, 4, 筑摩書房, 1970 年

[4] 立花俊一・奈良知恵・田澤新成共訳, j.A.Bondy & U.S.R.Murty 著, グラフ理論への入門, 共立出版株式会社, 1991 年

[5] 仁平政一・西尾義典, グラフ理論序説, プレアデス出版, 2010 年

[6] 渡辺敬一, 環と体, 講座<数学の考え方>, 12, 朝倉書店, 2002 年

[7] F.M.Goodman, P.de la Harpe, V.F.R.Jones, "Coxeter Graphs and Towers of Algebras", Springer-Verlag, 1989

平成26年度　卒業論文
算数科における言語活動の充実
～ICTを用いた授業の構築に向けて～
学校教育教員養成課程
理数・生活科学コース　数学教育専修
115705　木本　幸孝

はじめに

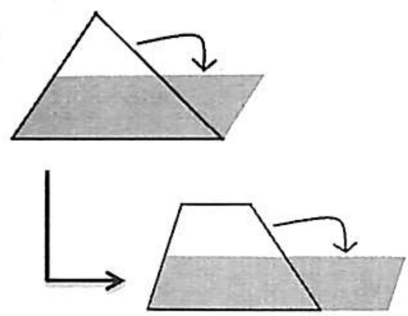
全国学力・学習状況調査など各種調査の結果からは,「思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式問題，知識・技能を活用する問題に課題」(小学校学習指導要領解説算数編　2009)があると指摘されている。これは私自身苦手と感じていたため，算数科における言語活動の充実を研究主題とした。言語とは，思考を手助けする道具であり，自分の考えを他人に伝える道具である。算数での言語には，図や数式，グラフなども含まれている。たとえば，三角形の面積の求め方を考える際の変形プロセスも言語である。

ICT 機器導入校である大阪市立阿倍野小学校の公開授業（2014年10月30日）で，言語活動が行われていたため分析する。そこではタブレット端末（iPad）を用いて，実際の三角形を切って動かし，写真にしながら三角形の面積の求め方を説明する資料を作り，共有フォルダへ提出していた。ICTを用いることで，今までは時間や手間がかかっていた図形の変形プロセスを視覚化することができていた。

児童は三角形の変形を共有フォルダにいれていたが，この多くの考え方をどのようにいかしていくことができるのかを考えた。

活用例

三角形の面積の求め方の学習の後に，台形の面積の求め方を学習する。その際に，児童が共有フォルダから，三角形の面積の求め方を探し，それを参考に台形の面積の求め方を考えることができる。これは一方から一方を考え出すという経験になる。



ICT活用の利点

カメラ機能を使うことで，思考しながら資料を作ることができるため，ICT を用いることで発表準備の時間短縮につながる。その結果，児童の発表の機会が増える。また，共有フォルダにいれることで，自分の考え以外のものをいつでも見ることができ，今までと比べて，より多くの考え方に触れることができる。

参考文献

文部科学省：小学校学習指導要領解説算数編（教育出版　2008)
杉山吉茂：初等科数学科教育学序説（東洋館　2008)

平成２６年　卒業論文

野球の最適打順

学校教育教員養成課程　理数・生活科学コース　数学教育専修
花木研究室　１１５７１０　福富　圭

○はじめに

日本のプロ野球では、最強打者を４番におくことが多い。しかしメジャーリーグでは、３番打者にも最強打者を置くチームもある。

そこで本研究では、最強打者の打順や、最強打者以外にも、能力を変えた打者を設定したときの打順の組み合わせをシミュレーションして求めていく。先行研究の「野球の最適打順の数学的考察」著者　広島大学付属高校数学研究班では最強打者一人と普通打者８人のとき、１番に最強打者を置き、最弱打者を９番に置いたときは４番に最強打者を置けばよいことが記されている。しかし、最適打順を求める過程についてはあまり触れられていないので、研究していく。

○シミュレーションの作成

１～９番の打席数、四死球数、単打数、二塁打数、三塁打数、本塁打数、三振数を入力することで１試合の総得点を算出させる。シミュレーションを通作る。表計算ソフトで乱数を発生させ、その値と打席結果の確率に基づいて、打席結果を定める。次に打席結果から、アウトカウント、走者、得点を単純化させた試合のルールに従って変化させる。この作業を繰り返し、得点の合計を１試合の予想得点とする。作成したシミュレーションを検証するために、プロ野球の成績を入力して、実際の総得点と比較したところ、大幅に差が生じた。この理由は進塁打によるものだと予想した。

前回の反省を活かし、実際の試合に近づけるために、進塁について考慮しながら修正していく。今回は、いつもより一つ多く進塁できる単打や二塁打や、進塁できるゴロアウトを追加してみる。そのほかの設定は変更なしで修正する。前回と同様に検証したところ、６球団合計で－１７と極めて近い数字がでたので、このシミュレーションを使って、打順の考察をしていくこととする。先行研究と同様の実験を行ったところ、最強打者一人の時は１番に、最弱打者を９番に置くときは４番に最強打者を置いた打順が最も高得点を気体できる打順という、同様の結果を得ることができた。

今後の課題としては、今回無視した設定の枠を広げ、併殺や失策、さらには盗塁や送りバントといった作戦もシミュレーションに組み込み、より実際の試合に近づけていきたいと思う。

参考文献

（１）野球の最適打順の数学的考察　広島大学付属高等学校　数学研究班　池本陸　田中大貴　和崎海里

（２）セイバーメトリクスによる最適打順決定モデルとそのシミュレーション　鳥越規央（東海大学・理学部）　薄井一樹（東海大学理学部）　時光順平（東海大学理学部）

（３）データで楽しむプロ野球

平成 24 年度卒業論文
手まりと球面万華鏡
学校教育教員養成課程　理数・生活科学コース
数学教育専修　花木研究室
学籍番号　115711　福留さゆり

はじめに

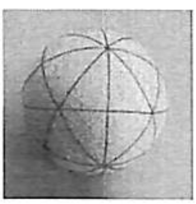
本卒業論文では、球面万華鏡上の点と線をたどり、どんな多面体ができるかについて考察した。また、手まりの地割りと球面万華鏡は同じものであることから、手まりの模様を球面万華鏡を研究することにより分類した。

手まりの地割り

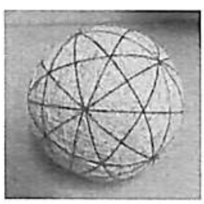
手まりを作る際に、模様をかがる基になる地割りをする。以下、基本的な地割りである。

単純等分

6 等分組み合わせ



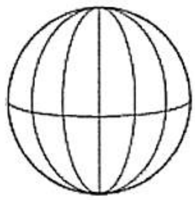
8 等分組み合わせ



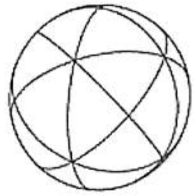
10 等分組み合わせ

球面万華鏡

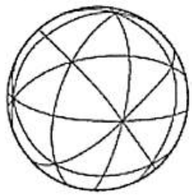
球面万華鏡は以下の 4 種類である。



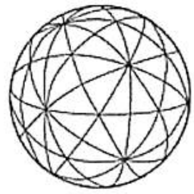
(2 以上のすべての整数, 2, 2)



(3, 3, 2)

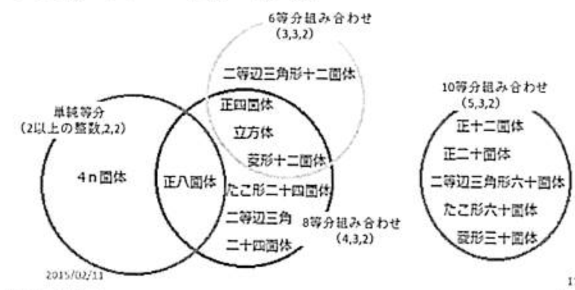


(4, 3, 2)



(5, 3, 2)

球面三角形 ABC において辺 AB、BC、CA をそれぞれ青、黄、赤に彩色する。また、反射した辺も対応する色で彩色する。辺の色ごとに辺を削除し、できる多面体をまとめると、下のベン図ができる。



おわりに

ベン図より、作りたい模様を、対応する地割りにより作成できることが分かった。

参考文献

・私の手まり入門／尾崎千代子・尾崎敬子　著、株式会社マコー社、2010 年
・正多面体を解く／一松信　著、東洋大学出版会、2002 年

平成 26 年度　卒業論文

ICT を用いた図形教材の考察

総合教育課程　科学情報コース　情報数理専修
花木研究室　116903　鎌部祐希

はじめに

ICT を活用した授業と聞いて私はイメージがはっきりと浮かばなかった。

そこで、ICT 教育セミナー、ワークショップに参加、ICT 導入校公開授業や附中実習の ICT 活用授業の見学をし、ICT と関わる機会が増えた。

私は一つの疑問を抱いた。

「ICT 教育セミナーやワークショップで紹介されていたコンテンツやアプリケーションはたくさんあるが、実際の授業で使用できる ICT 教材が充実しているとはいえない」

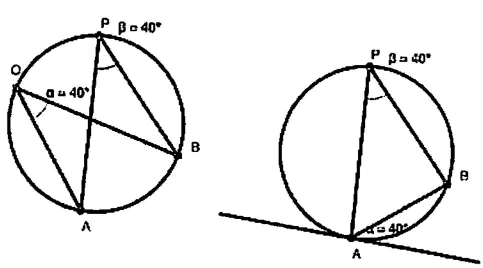
そして ICT 教材を開発する視点を構築したいと思い、本研究に至った。

ICT 教材の活用例

本論文から私が考察した二つの視点を紹介する。

1. **定理の発見を促すことができる。**

   中学三年の円の単元で円周角を移動することによって接弦定理の発見を促す。

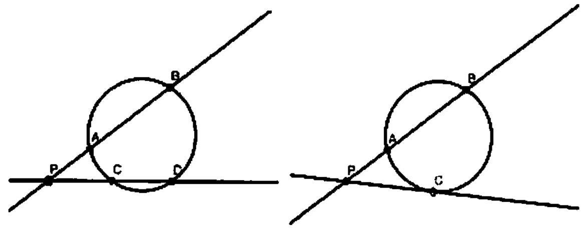


円周上にある弧 AB に対する円周角∠APB と∠AQB の角度が等しいことが円周角の定理から理解できる。

このとき、2 点 B,Q を結ぶ直線を引き、点 Q を限りなく点 B に近づけると、直線は円の接線に見える。すると、円に内接する三角形と円の接線に関係が見えてくる。

2. **定理の多様な見方を養うことができる。**

   高校数学 A の平面図形単元で方べきの定理の多様な見方を養う。



円との交点 A,B と C,D をそれぞれ持つ点 P を通る直線を PA と PC をとすると、PA·PB=PC·PD という関係が成り立つ。

このとき、点 C を点 D に近づけると、直線 PC は円の接線になり、PA·PB=PC^{2}が成り立つことがわかる。

終わりに

幾何単元において ICT 教材となり得るものは、紙とペンでできないことができる。

つまり、図形や立体の頂点や辺の移動が可能なもので、移動する操作を行うことで定理の発見や別証明を促すことができるものが有効なのではないか、と考える。

『重回帰分析の理論と実践』
～奈良教育大生協購買部の売り上げ～

学校教育教員養成課程　理数・生活科学コース　数学教育専修

確率・統計学　高木研究室　115703　奥田　祐樹

★奈良教育大生協購買部での重回帰分析の実践

本卒業論文では、回帰分析を奈良教育大生協購買部の売り上げデータを参考に重回帰分析を実践した。

店舗の売り上げに関して、「ある商品が売れるのはどの商品が関係しているのか」、「この商品は来月再来月ではどのように売れるのか」、「ある商品を強く売り出すとそれに関係してどの商品が売れるのか」、といったことを調べた。

・分析の際に使用したソフトは Microsoft Excel である。

・使用しているデータは 2011 年 3 月～2014 年 11 月　購買部売り上げデータである。(巻末参照)

・実測値のデータ数値の単位は全て（千円）である。

1．飲料デザートの売り上げ

目的変数を『飲料デザート』、説明変数を『パン米飯』『食品菓子』『自動販売機』で回帰分析を行った。

＜変数選択の理由＞

お昼ご飯やおやつなどを購入するとき、一緒に飲み物やデザートを購入するケースが多いと考えたからである。『自動販売機』に関しては、同じ飲料を販売しているということで、何かしらの影響を『飲料デザート』の売り上げに影響しているのではないかと考えた。

＜①モデルの設定と②散布図の作成＞

目的変数：『飲料デザート(y)』

説明変数：『食品菓子(x_1)』『パン米飯(x_2)』『自動販売機(x_3)』

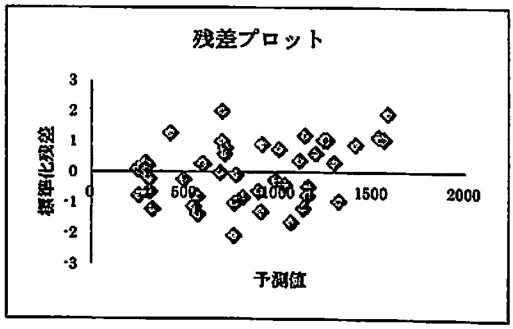
回帰モデルは $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$

＜③回帰式を求め、④分散分析表から自由度調整済寄与率を求める＞

Excel のデータ分析を用いて、回帰式は $y = -42.91959 - 1.176970x_1 + 1.410912x_2 + 0.37526x_3$ である。寄与率は 0.914445786 なのでおよそ 91%であり、自由度調整済寄与率もおよそ 91%と高いので、この回帰式は有効であると判断できる。

＜⑦回帰診断（残差プロット）＞

残差プロットは以下のとおりである。



<考察>

回帰式 $y = -42.91959 - 1.176970x_1 + 1.410912x_2 + 0.37526x_3$ が求められた。目的変数は『飲料デザート(y)』、説明変数は『食品菓子(x_1)』『パン米飯(x_2)』『自動販売機(x_3)』なので、『飲料デザート』に対して『食品菓子』は負の影響を及ぼし、『パン米飯』の方が正の影響を及ぼしている。つまり、お菓子などを購入したときよりも、お弁当やパンなどを購入したときのほうが、デザートや飲料も一緒に購入する可能性が高いということが判断できる。『パン米飯』の売り上げに力を入れることで、『飲料デザート』も一緒に売り上げが伸びる可能性がある。

<戦略>

(ア)『パン米飯』を充実させて、飲料デザートの売れ筋をあげよう

⇒お弁当の充実、おにぎりのおすすめランキング、飲み物との
セット販売。

(イ) どれくらい　「売れる」か「売れない」か　を予測できる

⇒売り上げをあげるだけでなく、売れ残りを失くすこと。
チャンスロストをなくすこと。の戦略も立てれる。

3. おわりに

実際に回帰分析を行うことで、回帰式だけで判断するのではなく、「残差プロットや散布図で視覚的にとらえる」ことの大切さを学んだ。特にＰＣソフトの残差プロットには特徴的な様子が見られ、外れ値の解釈を行うことができた。実際に社会の中で使うときには、さらに多くの観測データや説明変数が絡んでくるので、視覚的にとらえることは非常に有効であると感じた。

また、データを読み取り原因を探るだけでなく、未来の数値を予測し、戦略を練ることこそ重要になる。本卒業論文では、そのためマハラノビスの汎距離を紹介している。単純に x_1 や x_2 に実測値を代入し y_i を求めるだけでなく、分散を考えてある程度の予測値信頼区間を求めることができる。自分が将来実際にこの重回帰分析を用いる場合は、未来の数値を予測し、戦略を練るところまで、行いたいと思う。

人間が未来を見る能力をかろうじて持つためには、知恵や知識だけでなく、考えるという行為が非常に大事だと感じた。数字を計算するだけでなく、そこから何を感じ、どんな行動をするのかを考えることが重要である。未来を想像するためのひとつのツールである重回帰分析は、「考えるきっかけにする」ことが大切だと考える。

参考文献

1. 長畑秀和　著
『多変量解析へのステップ』／共立出版

2．穴太　克則　著

『講義：確率・統計』／学術図書出版

進化ゲーム理論

数学教育専修 学籍番号 115712 藤田 一輝

ゲーム理論とは

ゲームには、試合や遊び、競争、企てなどいろいろな意味があるが、ゲーム理論においては2人、あるいはそれ以上の人々の間の駆け引きの状況のことである。このような状況では、人々の行動が相互に依存していて、自分の行動の結果は相手がとる行動によって変わってくる。こうした状況を便益の一覧表や場合わけの図を用いて表現し、人々の行動を予測したり、お勧めの行動を考えたりする数理モデルの体系をゲーム理論という。

進化ゲーム理論とは

一般に物事がどのように変化するかという問題を扱う理論を動学といい 、進化ゲーム理論は動学化されたゲーム理論のことである。人々が試行錯誤したり他人のすることをまねしたりするときに、人々の全体の行動にどのような変化が生じるかを考える理論である。

一般的な二人二戦略対称ゲーム（2×2 ゲーム）について考えてみる。対称ゲームとはプレーヤーの立場によって戦略や利得に違いがないゲームのことである。

一般の 2×2 ゲームの利得表

自分＼相手	A	B
A	a	b
B	c	d

ここで、$\alpha=c-a$、$\beta=b-d$ として 2×2 ゲームを α と β の正負で分類すると、

- $\alpha>0$、$\beta>0$ のとき
  内点定常点が漸近安定点となる。
  例：ESS でないタカハトゲーム
- $\alpha\leqq 0$、$\beta>0$ または $\alpha>0$、$\beta\leqq 0$ のとき
  片方の端点が漸近安定点となる。
  例：ESS になるタカハトゲーム
- $\alpha<0$、$\beta<0$ のとき
  端点がいずれも漸近安定点となり、内点定常点が分水嶺となる。
  例：調整ゲーム

の3通りに分類できる。

漸近安定は、外的要因によってその点からずれたとしても長い時間の後その点に収束していくような定常点のことである。また、不安定定常点は、外的要因によってその点からずれたらどんどんその点から遠ざかってしまうような定常点のことである。

平成 26 年度卒業論文

階級の幅を変えたヒストグラムを作成する授業案

総合教育課程　科学情報コース　情報数理専修
高木研究室　116905　西井鉄雄

＜目次＞

＜はじめに＞

平成 20 年度の中学校指導要領の改訂で、新しい領域「D資料の活用」が設けられ、中学1年で「資料の散らばりと代表値」、中学3年で「標本調査」が高校数学から移行されていたことを知った。私が中学生の時はこの範囲を習っておらず、この領域に関する知識や教える技能が不足していると私は考えた。そこで、小学生から中学生になるにあたって、私の小中学生時と違って、どのような経緯で「確率・統計」の範囲が教えられているのかというところから調べていくことにした。

＜要約＞

この卒業論文は主に三部構成になっている。第1章、第2章は、小学校・中学校教科書を指導要領解説に書かれている内容と比較しながら、検討・提案の流れで進めていく。第3章は、小学校・中学校の統計学習がどのようなつながりをしているのかについて見ていっている。第4章は、第1部（第1・2章）で提案した中の、中学1年の「資料の散らばりと代表値」の範囲の「階級の幅を変える」という点に注目し、授業案を考えた。

＜おわりに＞

今回の授業案では、問題設定の点（何を知りたいがために階級幅をどのように設定するのか）や結果を踏まえた改善（グラフからこのようなことが分かったので、どのように改善していくか）については触れていなかったので、今後教職大学院

で学ぶ時にその点も踏まえた授業案を考え、実践　　していきたいと考えている。

平成 26 年度卒業論文

因子分析によるデータ解析

総合教育課程　科学情報コース　情報数理専修
高木研究室　学籍番号 116906　深川　静香

1. はじめに

私がいままで確率・統計学を学んできた中で興味を持ったのがデータ解析についてであった。その中で多変量解析について学び、最も興味を持ったのが因子分析についてであったため、研究テーマとして取り上げた。

本卒業論文は、因子分析について 3 つの手法についてと、統計ソフトを使い分析しその結果を考察、再分析した結果についてまとめたものである。

2. 論文構成

はじめに

第 1 章　準備

　1節 ：平均・分散・標準偏差

　2節 ：分散共分散行列と相関行列

第 2 章　因子分析とは

　1節 ：因子分析モデルの定義と関係式

　2節 ：因子分析法の手順

第 3 章　様々な因子分析法

　1節 ：セントロイド法(centroid method)

　2節 ：主因子法(principal factor analysis)

　3節 ：最尤法(Likelihood Method)

第 4 章　因子軸の回転と因子得点

　1節 ：因子軸の回転

　2節 ：因子得点の利用

第 5 章　因子分析の例

　1節 ：都道府県別農産物生産データの因子分析

　2節 ：都道府県別農産物生産データの因子分析(北海道のデータを除く)

おわりに

参考文献

3. 研究内容

本卒業論文は、因子分析について取り上げている。因子分析とは、複数変量間にある共通な因子を見つけ出すことである

その因子分析の分析手順についてまとめ、分析手法の中でも、セントロイド法、主因子法、最尤法の 3 つの手法について取り上げている。

最後に、統計ソフト「R」を使い先に述べた手順に沿って、都道府県別農産物生産データを、最尤法と主因子法を用いて実際に分析した。その結果や因子得点の散布図などから、共通因子について考察し再分析が必要と判断した。また、データを再分析した結果や、因子得点の散布図などから、どのような解釈をしたか、さらに最尤法と主因子法の 2 つの分析結果や因子得点の散布図を比べたところ、細部は多少異なるが、同様の結果を得ることができたことについてまとめている。

4. おわりに

本論文は、多変量解析の中から因子分析に注目し、因子分析の手法、定義と関係式、実際のデータの分析についてまとめたものである。

因子分析についてゼミを通して学んでいくうちに、様々なところで使われていることが分かった。また、実際に因子分析を実行したことで、様々な分析手法の特徴、利点や欠点などがわかり、分析の目的やデータの特徴と合わせて考えることも必要だと感じた。このことから、分析した結果を解釈することや、再分析するためにはそのデータに関する様々な知識が必要であること、共通因子の解釈は分析の目的や、分析者によって変わるということも分かった。

平成 26 年度卒業論文

統計的仮説検定
一様最強力検定・一様最強力不偏検定・尤度比検定

総合教育課程　科学情報コース　情報数理専修

高木研究室　学籍番号 116910　室井翔太

1　はじめに

統計的仮説検定は, ビジネスや研究, 様々なデータを扱うときに非常に有効に用いられている. 実生活で分かりやすく役に立つ数学は新鮮であり, 私はそこに魅力を感じたので, 研究することにした. 良い統計的仮説検定とは, また, 一様最強力検定・一様最強力不偏検定, そして, 尤度比検定について考察することができた.

2　本論文の構成

3　おわりに

今回, 統計的仮説検定を調べて, 私が考察したことは次の 3 点である.

- 良い検定とは, 検出力の高い検定と言える.
- 存在するならば一様最強力検定・一様最強力不偏検定が最良の検定である.
- 尤度比検定は, 必ず存在し, 検出力も良い非常に有用な検定方式である.

統計的仮説検定は, 汎用性の高い意思決定の道具だということができるが, どのような根拠をもって検定しているのかに留意すべきである.

最後に, 本卒業論文は, 多くの方たちのご指導・ご協力のもと出来上がりました. 高木先生には,2 年間のゼミと卒業論文の作成にあたってたくさんの助言をいただき, 多くのご迷惑をおかけしました. そして, 共に勉強してきた奥田くん, 西井くん, 深川さん, 藤田くんには多くのご協力をいただきました. この場を借りて心から感謝申し上げます.

参考文献

[1] 鈴木武, 山田作太郎：数理統計学一基礎から学ぶデータ解析一, 内田老鶴圃, 1996.

[2] 穴太克則 ：講義:確率・統計, 学術図書出版社, 2011.

[3] Graham Upton, Ian Cook ：統計学辞典, 共立出版, 2010.

2014年度　修士論文

$\wp$関数とθ関数を用いた複素トーラスの射影空間への埋め込み

教育学研究科　修士課程　教科教育専攻
数学教育専修　川崎研究室
学籍番号　133306　中平　豊

目次

はじめに

修士論文では，修士課程において楕円関数論 楕円曲線の解析学-著　梅村浩　(以下，本書) を読み，私自身にとって分からない点をゼミで発表し，再度自分の言葉でまとめている．具体的には，本書で証明されていない命題や既に得られている結果に対して，私自身による説明（途中式や導出するために用いた考え）を加えている．各章の組み立てに関しては，本書に従って構成しているが，第 3 章では複素トーラスの射影空間への埋め込みに関して，一般の整数 $l \geq 2$ とは別に $l=2$ のときを付け加えた．

本書を選んだ経緯として，卒業論文にて楕円曲線論入門 (著　J.H.Silverman/J.Tate) を読み，3 次方程式の有理数解を代数，数論，および幾何学を用いて考察するという方法に魅力を感じ，より詳しく知りたいと思ったからである．また，代数幾何学というなじみの無い分野ではあったが，説明が易しく詳細であったと感じられる．

ここでは，「3.4 複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ の射影空間への埋め込み」で取り挙げた一般的な整数 $l>2$ による定理 3.3 の証明ではなく，「3.7 複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ の射影空間への埋め込み ($l=2$)」にて証明している定理 3.3 の $l=2$ のときを紹介する．

そのために，テータ級数，テータ関数の定義及び証明の中で重要となる補題を紹介する．

・θ(テータ) 級数,θ(テータ) 関数

$e(x)=\exp\{2\pi\mathrm{i}x\}=e^{2\pi\mathrm{i}x}, \tau\in H:=\{z\in\mathbb{C}|\ \mathrm{Im}z>0\}$ として,θ 級数

$$\theta(z,\tau):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e\left(\frac{1}{2}n^2\tau+nz\right)$$

は,$\mathbb{C}\times H$ 上で広義一様収束し，$\mathbb{C}\times H$ 上の正則関数となっている．θ 級数を用いて,θ 関数

$$\theta_{\alpha,\beta}(z,\tau):=e\left(\frac{1}{2}\alpha^2\tau+\alpha(z+\beta)\right)\theta(z+\alpha\tau+\beta,\tau)$$

を定義する．$(\alpha,\beta\in\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z})$

$0,\frac{1}{2}$ をそれぞれ $\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z}$ の完全代表系とすると,θ 関数 $\theta_{0,0}(z)$，$\theta_{0,\frac{1}{2}}(z)$，$\theta_{\frac{1}{2},0}(z)$，$\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$ は，次の $\mathbb{C}$-ベクトル空間の基底となる．

$$V_2:=\left\{f(z)\ \middle|\ \begin{array}{l} f(z)\text{ は整関数, 任意の整数 } m,n \text{ に対して} \\ f(z+2m\tau+2n)=e(-2m^2\tau-2mz)f(z) \\ \text{が成り立つ.} \end{array}\right\}$$

よって，

$$V_2=\mathbb{C}\theta_{0,0}(z)\oplus\mathbb{C}\theta_{0,\frac{1}{2}}(z)\oplus\mathbb{C}\theta_{\frac{1}{2},0}(z)\oplus\mathbb{C}\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$$

が成り立っている．

補題．$0\neq f(z)\in V_l$ とすると,$f(z)$ は $l\Omega(\tau)=(l,l\tau)$ の基本周期平行四辺形内にちょうど l^2 個の零点をもつ．ただし，零点の重複度を込めて数える．

次のページから，定理とその証明を記す．複素トーラスから射影空間への写像を定義するために楕円関数ではないが楕円関数と同じような性質をもつテータ関数を用いる．定理の証明すなわち定義した写像が複素多様体としての埋め込みであることを示すために上の補題を用いる．

証明の簡単な流れとしては，次のように背理法を用いる．ある写像が単射でないと仮定すると，補題に矛盾するような関数 $f(z)$ が存在し，仮定が誤りすなわち写像は単射であることがわかる．証明の細かな説明については本修士論文を参照していただきたい．

定理. 解析写像

$$\varphi_2 : E_\tau \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

は, 複素トーラス $E_\tau = \mathbb{C}/(1,\tau)$ の射影空間 $\mathbb{P}^3$ への埋め込みである.

証明. 2 節, 命題 3.3 により ,$\theta_{00}(z,\tau), \theta_{01}(z,\tau), \theta_{10}(z,\tau), \theta_{11}(z,\tau)$ はベクトル空間 V_2 の基底である.

$a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\varphi_2\left(z + \frac{a\tau+b}{2}, \tau\right) \\
&= \left[\theta_{00}\left(2\left(z+\frac{a\tau+b}{2}\right)\right), \theta_{01}\left(2\left(z+\frac{a\tau+b}{2}\right)\right), \theta_{10}\left(2\left(z+\frac{a\tau+b}{2}\right)\right), \theta_{11}\left(2\left(z+\frac{a\tau+b}{2}\right)\right)\right] \\
&= [\theta_{00}(2z+a\tau+b), \theta_{01}(2z+a\tau+b), \theta_{10}(2z+a\tau+b), \theta_{11}(2z+a\tau+b)]
\end{aligned}$$

$\rho(1,a,b)\theta_{ij}(2z) = e\left(\frac{1}{2}a^2\tau + ab\right)\theta_{ij}(2z+a\tau+b)$ だから

$$\begin{aligned}
&= [\rho(1,a,b)\theta_{00}(2z), \rho(1,a,b)\theta_{01}(2z), \rho(1,a,b)\theta_{10}(2z), \rho(1,a,b)\theta_{11}(2z)] \\
&= \rho(1,a,b)\,[\theta_{00}(2z), \theta_{01}(2z), \theta_{10}(2z), \theta_{11}(2z)] \\
&= [\theta_{00}(2z), \theta_{01}(2z), \theta_{10}(2z), \theta_{11}(2z)]\,(P_S)^{2a}(P_T)^{2b}
\end{aligned}$$

φ_2 が埋め込みであることを示すには, 次の 2 点を確かめなければならない.
(i) 解析写像 φ_2 は単射である.
(ii) 解析写像 φ_2 は,E_τ の点 P の接空間 T_P から $\mathbb{P}^3$ の点 $\varphi_2(P)$ における接空間 $T_{\varphi_2(P)}$ への線形写像

$$d\varphi_2(P) : T_P \longrightarrow T_{\varphi_2(P)}$$

が引き起こすが, 任意の点 $P \in E_\tau$ に対して線形写像 $d\varphi_2(P) : T_P \longrightarrow T_{\varphi_2(P)}$ は単射である.
(i) を確かめよう. z_1, z_2 を E_τ の相異なる 2 点として,$\varphi_2(z_1) = \varphi_2(z_2)$ とする. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ と考えて,

$$z_1 \not\equiv z_2 \bmod(1,\tau)$$

と仮定する. 点

$$\frac{a\tau+b}{2}\left(a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$$

を選んで,

$$z_1' = z_1 + \frac{a\tau+b}{2}, z_2' = z_2 + \frac{a\tau+b}{2}$$

とおくとき,z_1, z_2, z_1', z_2' が E_τ の相異なる 4 点となるようにできる.
さらに,1 個の点 $w_1 \in \mathbb{C}$ を選んで, 点

$$z_1, z_2, z_1', z_2', w_1$$

が E_τ の相異なる 5 点であるようにする. つまり, これらの 5 個の点は $\bmod(1,\tau)$ で相異なるようにする.
さて,

$$f(2z_1) = f(2z_1') = f(2w_1) = 0$$

となるような,V_2 に含まれている関数 $f(z) \neq 0$ が存在する．なぜなら, このような $f(z) \in V_2$ を見つけるには,

$$f(z) = c_0\theta_{00}(z) + c_1\theta_{01}(z) + c_2\theta_{10}(z) + c_3\theta_{11}(z)$$

と書いておいて,$c_i(0 \leq i \leq 3)$ を 4 個の未知数と考えて,3 個の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 0 = f(2z_1) = c_0\theta_{00}(2z_1) + c_1\theta_{01}(2z_1) + c_2\theta_{10}(2z_1) + c_3\theta_{11}(2z_1), \\ 0 = f(2z_1') = c_0\theta_{00}(2z_1') + c_1\theta_{01}(2z_1') + c_2\theta_{10}(2z_1') + c_3\theta_{11}(2z_1'), \\ 0 = f(2w_1) = c_0\theta_{00}(2w_1) + c_1\theta_{01}(2w_1) + c_2\theta_{10}(2w_1) + c_3\theta_{11}(2w_1) \end{cases}$$

を考えると, 未知数の数 4 に対して,3 個の 1 次斉次連立方程式を立てているので, その自明でない解 $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^4$ が存在する．そこで,

$$f(z) = c_0\theta_{00}(z) + c_1\theta_{01}(z) + c_2\theta_{10}(z) + c_3\theta_{11}(z) \tag{0.1}$$

とおけばよい．さて,$\varphi_2(z_1) = \varphi_2(z_2)$ であるので,

$$[\theta_{00}(2z_1), \theta_{01}(2z_1), \theta_{10}(2z_1), \theta_{11}(2z_1)] = [\theta_{00}(2z_2), \theta_{01}(2z_2), \theta_{10}(2z_2), \theta_{11}(2z_2)]$$

すなわち,0 でない数 $c \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$\theta_{kl}(2z_1) = c\theta_{kl}(2z_2) \quad (k, l \in 0, 1) \tag{0.2}$$

が成り立つ．$f(2z_1) = 0$ であるので,(0.1), (0.2) より,$f(2z_2) = 0$．同様にして,$f(2z_2') = 0$．以上により,$f(z) \in V_2$ は $\mathrm{mod}(2, 2\tau)$ で相異なる 5 個の点

$$2z_1, 2z_2, 2z_1', 2z_2', 2w_1$$

で消える．これは, 補題に矛盾する．

次に,「(ii) 任意の点 $P \in E_\tau$ において, 写像 $d\varphi_2(P)$ が単射であること」を示す．$z_1 \in \mathbb{C}$ で線形写像 $d\varphi_2(z_1) : T_{z_1} \longrightarrow T_{\varphi_2(z_1)}$ が単射でないとすると,T_{z_1} は 1 次元ベクトル空間であるので,$d\varphi_2(z_1) = 0$ である．$d\varphi_2(z_1) = 0$ であると仮定する．(i) の場合と同様にして, 点

$$\frac{a\tau + b}{2}\left(a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$$

による平行移動を考えることにより,$\mathrm{mod}(1, \tau)$ で z_1 と合同でない点 z_2 が存在して,$d\varphi_2(z_2) = 0$ となる．

「$d\varphi_2(z_1) = 0 \Rightarrow d\varphi_2(z_2) = 0$ -(♯)」を認めて, 証明を続ける．さらに,1 個の点 $w_1 \in \mathbb{C}$ を選んで, 次の条件を満たすようにできる．

(a)z_1, z_2, w_1 は $\mathrm{mod}(1, \tau)$ で相異なる 3 個の点である．

(b)$0 = f(2z_1) = f(2z_2) = f(2w_1)$ となるような,$0 \neq f(z) \in V_2$ が存在する．

$f(z) = c_0\theta_{00}(z) + c_1\theta_{01}(z) + c_2\theta_{10}(z) + c_3\theta_{11}(z) \neq 0$ となるように $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ を選べばよい．$d\varphi_2(z_1) = 0$ であるので,$f'(2z_1) = 0$ となる．$f(2z_1) = 0, d\varphi_2(z_1) = 0$ より $2z_1$ は $f(z)$ の 2 重の零点である．同様にして,$d\varphi_2(z_2) = 0$ より $2z_2$ も $f(z)$ の 2 重の零点である．以上より,$0 \neq f(z) \in V_2$ は $\mathrm{mod}(2, 2\tau)$ で重複度も込めて 5 個の零点を持つことになり, 補題に矛盾する．したがって,(ii) が証明され, 定理の証明が終わる． □

おわりに

楕円関数の定義, 基本的な性質について触れ,Weierstrass の $\wp$(ペー) 関数を構成した. $\wp$ 関数を用いることにより複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ が 3 次曲線と同型であることを示した. $\wp$ 関数の議論を基に,ζ 関数,σ 関数, テータ関数など様々な楕円関数を構成し, これらの性質について証明した. 第 3 章テータ関数では,Heisenberg 群の定義により複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ と射影空間への作用と正則写像 φ_l の作用と可換であることが背景にあることがわかった.

梅村浩先生の丁寧な解説がある中でも, 私には一つ一つの命題の意味や証明をまず理解することが難しかった. 私自身が理解するための手助けとなるよう説明を加えたことで理解が多少なりとも深まったと実感している. 歴史的な背景では, 楕円積分 (3 次曲線) を出発にして, 楕円関数の考察を行っている. 逆の過程による楕円関数の考察では, 余計に理論を理解することが難しかったと想定できる. 本論文は,「複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ の射影空間 $\mathbb{P}^{l^2-1}$ への埋め込みをテータ関数を用いて与える」ところまでをまとめることができた.

修士論文作成にあたり, ご指導いただいた川崎謙一郎教授へ感謝の意を示す. また, 支えてくれた唯一のゼミ仲間である中村君にも感謝する.

参考文献

[1] 楕円関数論　楕円曲線の解析学　著　梅村　浩　(東京大学出版会, 2000)

[2] 解析概論　改訂第三版　著 高木貞治　(岩波書店, 1983)

[3] 多様体入門　著 松島与三 (裳華房, 1965)

平成26年度修士論文

一般化された局所コホモロジー加群を保存するイデアルについて

奈良教育大学大学院 教育学研究科 教科教育専攻
数学教育専修 川崎研究室 中村 力

概要

本修士論文は，一般化された局所コホモロジー加群の研究において得られた結果の報告(第1章)と，D. Mumfordの著書[17]を元にした代数多様体の定義とその周辺の詳細な解説(第2章)である．

Rを可換なネーター環，$\mathfrak{a}$をRのイデアル，M, Nを有限生成R加群とする．一般化された局所コホモロジー加群はJ. Herzogによって[4]で導入された．M, Nの$\mathfrak{a}$におけるi次の一般化された局所コホモロジー加群は，

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M,N) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_R(M/\mathfrak{a}^n M, N)$$

で定義される．$M = R$とすれば，$H^i_{\mathfrak{a}}(R,N) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}^n, N)$となって通常の局所コホモロジー加群$H^i_{\mathfrak{a}}(N)$と一致するので，確かに一般化になっている．$t$を正の整数または$\infty$とし，任意の$i < t$に対して$H^i_{\mathfrak{c}}(M,N) \cong H^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$を満たす$R$のイデアル$\mathfrak{c}$の集合を$\Omega_t$で表す．第1章における主な目的は，$\Omega_t$に最大のイデアル$\mathfrak{b}_t$が存在し，かつ$\dim R/\mathfrak{b}_t = \sup_{i<t} \dim H^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$を満たすことを示すことである．これにより，H. SaremiとA. Mafiによる論文[8]の主結果(Theorem 2.7)の一般化を得ることができる．また，本章における研究をまとめた論文[7]が，学術雑誌Journal of Algebra and Its Applicationsに掲載予定である．

一方で，局所コホモロジー加群の理論は代数幾何学を起源としており，より深い研究を行うためには，幾何学的な考察も重要となる分野である．古典的な代数幾何学である代数多様体は，重要な研究対象であるだけでなく，現代の主流であるスキームよりも直感的で理解しやすい．そのため，局所コホモロジーの研究をする上で，代数多様体の解説をまとめることは大変意義があり，このような観点から第2章には代数多様体についての詳細な解説をまとめている．

修士論文構成

おわりに

著者の力不足で，本修士論文の中でスキームやコホモロジーについて触れることはできなかった．局所コホモロジーの理論を代数幾何学の理論と関連付けて研究していくことは，今後の課題としたい．

謝辞

本研究に関して終始ご指導ご鞭撻を頂きました川崎謙一郎先生をはじめ，ご助言をくださいました先生方やすべての方々に感謝いたします．ありがとうございました．

参考文献

(第1章)

[1] M.P. Brodmann and R.Y. Sharp, Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications, *Cambr. Uni. Press*, Cambridge, (1998).

[2] N. T. Cuong and N. V. Hoang, On the vanishing and the finiteness of supports of generalized local cohomology modules, *Manuscripta math.* 126 (2008), 59-72.

[3] K. Divaani-Aazar and A. Hajikarimi, Generalized local cohomology modules and homological Gorenstein dimensions, *Comm. Algebra*, 39 (2011), 2051-2067.

[4] J. Herzog, Komplexe, Auflösungen und Dualität in der Lokalen Algebra, *Habilitationsschrift*, Universität Regensburg, (1974).

[5] H. Matsumura, Commutative algebra, 2nd edition, *Benjamin / Cummings*, (1980).

[6] H. Matsumura, Commutative ring theory, *Cambr. Uni. Press*, Cambridge, (1986).

[7] T. Nakamura, On ideals preserving generalized local cohomology modules, *J. Algebra Appl.* (to appear)

[8] H. Saremi and A. Mafi, Finiteness dimension and Bass numbers of generalized local cohomology modules, *J. Algebra Appl.*, 12, No. 7 (2013), 1350036.

(第2章)

[9] 安藤哲哉, 代数曲線・代数曲面入門 新装版-複素代数幾何の源流, 数学書房, 2011

[10] 上野健爾, 代数幾何学入門, 岩波書店, 1995

[11] 梶原健, 代数曲線入門, 日本評論社, 2004

[12] 菅原正博, 位相への入門, 朝倉書店, 2004

[13] 廣中平祐 [講義] 森重文 [記録] 丸山正樹・森脇淳・川口周 [編集], 代数幾何学, 京都大学学術出版会, 2004

[14] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965

[15] 松村英之, 集合論入門, 朝倉書店, 2004

[16] D. マンフォード, 前田博信 訳, 代数幾何学講義, シュプリンガー・ジャパン, 2006

[17] D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, Springer, 1999

[18] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra I, Springer,1975

中学数学における生徒の「事柄が正しい理由の説明」の認識に関する研究

近藤研究室　松井 大樹

1．はじめに

本研究は，中学生の「事柄が正しい理由の説明」の認識に関するものである．数学教育において証明の学習に課題があるということはずいぶん前から指摘されている(國宗, 1987;国立教育政策研究所, 2013)．この課題に取り組むため，証明に至るまでの「事柄が正しい理由の説明」に焦点を当てる．その理由として2点ある．1点目は，「証明」は「事柄が正しい理由の説明」のより洗練されたものであると捉えることができ，「事柄が正しい理由の説明」に焦点をあて，「証明」への洗練のさせ方を検討することは，証明の学習指導の改善に貢献すると考えるからである．2点目は，「事柄が正しい理由の説明」に焦点を当て，その洗練を捉えていくことは「説明」のカリキュラムへの位置づけの課題にも応えることができる．説明の重要性については多くの人が認識するにもかかわらず，カリキュラムにおける明確な位置づけが与えられていない（溝口，2012；茅野，2009）と言われる．それは，どの段階でどんな説明が出来れば良いのかが明確でないからであると考えられる．証明に至るまでの「事柄が正しい理由の説明」に着目し，その洗練を捉えることはこうしたカリキュラムへの位置づけの課題にも貢献する．

これまでの数学教育研究において，説明の洗練を捉える研究が行われてきている．しかし，これまでの先行研究において，子どもの「説明の認識」の学年ごとの特徴を捉えようとした研究はあまり無い．そこで，本研究では子どもの「事柄が正しい理由の説明」をどのように洗練させていけば良いかを明らかにするために，まずは子どもの「事柄が正しい理由の説明」に関する認識に注目し，まずはその実態をとらえることに取り組んでいく．

2．研究の目的

中学生の「事柄が正しい理由の説明」の認識に関する実態をとらえ，学年ごとの比較を通して，その発達の様相を明らかにし，「事柄が正しい理由の説明」についての好ましい学習指導のあり方を追求する．本研究では特に「根拠に関する認識」に焦点を当て，そのいくつかの側面を捉えていく．

3．研究方法

予備調査と実験授業により，子どもの「事柄が正しい理由の説明」に関する様々な側面を明らかにする．そして，それらをもとに生徒の「事柄が正しい理由の説明」の認識の枠組みを構築する．枠組みをもとに，生徒の「事柄が正しい理由の説明」の認識に関する本調査問題を計画し，実施・分析することで，生徒の実態を明らかにする．

4．「事柄が正しい理由の説明」と「証明」の関係

本研究では，文部科学省（2008）や宮崎（1995），溝口（2012），高田（2012）を踏まえ，「事柄が正しい理由の説明」と「証明」の関係について，「事柄が正しい理由の説明」のより洗練された形態が「証明」であり，「証明」を「事柄が正しい理由の説明」に包含されるものであると捉える．「証明」とは，「正しいと判断した事柄について，その理由を演繹的に示したもの」であり，「事柄が正しい理由の説明」とは，「正しいと判断した事柄について，その理由を演繹的または帰納的，類推的，その他事実等を含む何かしらの理由を示そうとしたもの」である．

5．本研究の枠組

(1)事柄が正しい理由の説明で要求される説明の認識

筆者は調査問題を用いて，予備調査を行った．その結果から，て論理的に説明できる生徒は少ないことがわかった．「事柄が正しい理由の説明」をするためには，「事柄が正しい理由の説明」に関して様々な認識を持っていることが必要であるということが，予備調査から明らかとなった．

(2) 事柄が正しい理由の説明の認識をとらえるための観点

予備調査の結果等（断定的でない表現，多様な根拠を用いた表現をする生徒の存在）を分析すると，「事柄が正しい理由の説明の認識」をとらえるための観点として，大きなところとして，次の３つの観点があるということが浮かびあがった．

ア．根拠に関する認識 イ．記号や言葉に関する認識 ウ．筋道に関する認識

さらに「根拠に関する認識」に焦点を当てて再分析してみると，細かい観点として，次の３つの観点が浮かび上がってきた．

A．何かしらの根拠を示していない記述は説明になっていないことに関する認識 B．部分的に不確かな根拠を用いている記述は説明として不十分であることに関する認識 C．結論に直接結びついておらず，関連性がない根拠を用いている記述は説明になっていないことに関する認識

本調査ではこれらに焦点を当てて，調査・分析することとする．

６．本調査

(1)　調査のねらい

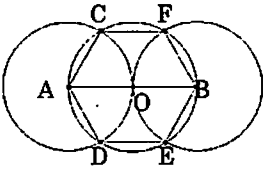
中学生の事柄の正しい理由の説明の認識の様相を，前項で述べた観点ア「根拠に関する認識」のうち「A．何かしらの根拠を示していない記述は説明になっていないことに関する認識」と「B．部分的に不確かな根拠を用いている記述は説明として不十分であることに関する認識」と「C．結論に直接結びついておらず，関連性がない根拠を用いている記述は説明になっていないことに関する認識」の３点について特に明らかにする．

(2)　調査問題

問題は，問題Ⅰと問題Ⅱに分かれている．問題Ⅰは調査問題Ⅰと同じである．問題Ⅱは次に示す．

問題Ⅱ

この円Ｏと同じ半径で点Ａと点Ｂをそれぞれ中心とする円Ａ，円Ｂをかきます。円と円が交わる点をC,D,E,Fとします。



問３　１枚目の問題で，六角形ADEBFCは正六角形であることを，Ａさん，Ｂさん，Ｃさんは次のように説明しました。（正六角形とは「全ての辺の長さと，すべての角の大きさが等しい六角形」のことです。）Ａさん，Ｂさん，Ｃさんの説明について「よい」か「よくない」かのどちらか１つを選び，○をつけてください。「よくない」に○をつけた場合は[　　]に理由を書きましょう。

Ａさん

六角形ADEBFCの６つの辺は同じ長さであり，６つの角は同じ大きさである。よって，正六角形である。

（よい・よくない（理由を以下に記述））

Bさん

中心OとC，D，E，Fを結ぶと，六角形ADEBFCは6つの合同な正三角形にわけられる。よって，六角形の6つの辺は同じ長さである。さらに，正三角形の1つの角は60°であるから，六角形の全ての角は60°＋60°＝120°になるので，6つの角が同じ大きさになる。よって，正六角形である。

（よい・よくない（理由を以下に記述））

Cさん

3つの円は合同な円である。さらにC，D，E，Fはその円の円周上にとっている。また，六角形はABで2つの四角形にわけられていて，その面積は等しい。よって，正六角形である。

（よい・よくない（理由を以下に記述））

問1と問2は，問題を把握するため，後の分析に用いるための設問であるため，観点との対応はない．問3について，観点との対応は以下の通りである．

「A．何かしらの根拠を示していない記述は説明になっていないことに関する認識」　→Aさんの説明

「B．部分的に不確かな根拠を用いている記述は説明として不十分であることに関する認識」　→Bさんの説明

「C．結論に直接結びついておらず，関連性がない根拠を用いている記述は説明になっていないことに関する認識」　→Cさんの説明

(3) 調査の実施

奈良県公立中学校1年生から第3学年までの計290名を調査対象に，平成26年12月中旬に行った．問題Ⅰを約20分，問題Ⅱを約20分の計40分程度で実施した．

(4)　判定基準と調査結果

今回は，Aさんに焦点を当てて説明していく．

①問題別の通過基準

通過基準（認識があると判定）は次の通りである．（問1と問2は問題把握，後の分析に用いるための設問であるため，通過基準等は設けない）○は認識があると判定，△・×は認識がないと判定する．

○・・・「よくない」を選び，根拠を示さなくてはならないことが指摘できている

△・・・「よくない」を選んでいるが，根拠を示さなくてはならないことを指摘できていない．

×・・・「よい」を選んでいる．

6つの辺の長さが同じであるしょうこを出していない
6つの角が同じ大きさであるしょうこを出していないから．

図6.1　通過している「○」の生徒の記述例

関係していないから

図6.2　通過していない「△」の生徒の記述例

②　通過率と観点別の判定

まず，問題Ⅰの問1については3学年とも95%以上の生徒が正六角形であると認めている．以下がその結果である．

表6.1　正しいと認めた生徒の割合と人数（小数第1位を四捨五入）

中1	98%（106名中104名）
中2	95%（98名中93名）
中3	97%（86名中83名）

問2の理由の説明については予備調査同様多様な解答が見られた．

問題Ⅱについては，以下の表のような結果となった．

表 6.2　「根拠に関する認識」に関する各学年ごとの結果（小数第１位を四捨五入）

	よくない	よくない	よい
	○	△	×
中1	35%(37／106)		65%(69／106)
	19%(20／106)	16%(17／106)	
中2	54%(53／98)		46%(45／98)
	36%(35／98)	18%(18／98)	
中3	77%(66／86)		23%(20／86)
	60%(52／86)	16%(14／86)	

③クロス集計

②の表で得られた結果と，問題Ⅰにおける生徒自身の記述における「根拠の有無」との関係について考察する．

生徒の問題Ⅰの生徒自身の説明の記述を，「説明に事実や仮定・結論，定義の繰り返し以外の根拠が示されている記述（以下，「根拠あり」とする)」と「事実や仮定結論，定義の繰り返しのみである記述（以下，「根拠なし」とする)」の２つに分類し集計する．以下に例を示す．

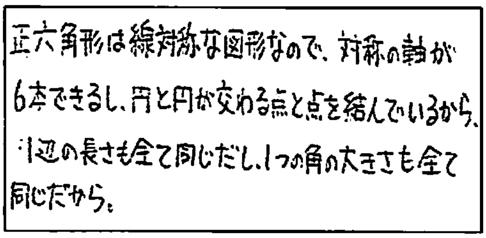

正六角形は線対称な図形なので、対称の軸が6本できるし、円と円が交わる点と点を結んでいるから、1辺の長さも全て同じだし、1つの角の大きさも全て同じだから。

図 6.3　「根拠あり」の記述

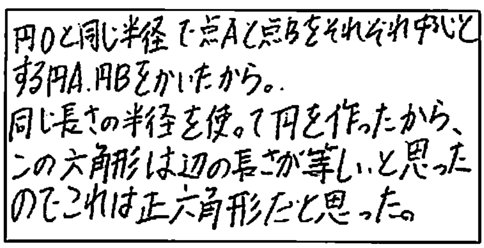

円Oと同じ半径で点Aと点Bをそれぞれ中心とする円A,円Bをかいたから。
同じ長さの半径を使って円を作ったから、この六角形は辺の長さが等しいと思ったのでこれは正六角形だと思った。

図 6.4　「根拠なし」の記述

その結果以下の表 6.3 から表 6.5 のような結果が得られた．

表 6.3　中１のＡの判定と自分の説明のクロス集計結果（小数第１位を四捨五入）

よくない	○	18%（19／106）	1%（1／106）
	△	14%（15／106）	2%（2／106）
よい	×	42%（45／106）	23%（24／106）
		根拠あり	根拠なし

表 6.4　中２のＡの判定と自分の説明のクロス集計結果（小数第１位を四捨五入）

よくない	○	32%（31／98）	4%（4／98）
	△	18%（18／98）	0%（0／98）
よい	×	37%（36／98）	9%（9／98）
		根拠あり	根拠なし

表 6.5　中３のＡの判定と自分の説明のクロス集計結果（小数第１位を四捨五入）

よくない	○	59%（51／86）	1%（1／86）
	△	12%（10／86）	5%（4／86）
よい	×	21%（18／86）	2%（2／86）
		根拠あり	根拠なし

表 6.6　「×」の生徒の説明の「根拠の有無」の学年毎の比較

	根拠あり	根拠なし
中１	42%(45／106)	23%(24／106)
中２	37%(36／98)	9%(9／98)
中３	21%（18／86）	2%(2／86)

(5)　考察

①「根拠に関する認識」に関する各学年ごとの結果

・Ａさんの説明に対して「よくない」を選ぶことができる生徒

表 6.2 の結果から，指摘できるかできないかは除いても，「よくない」を選ぶことのできる生徒は，中１から中３にかけて約 20 ポイントずつ増えている．このことから，中学校の数学の学習により，「根拠に関する認識」が徐々に育ってくるということを示していると考えられる．また，第２学年において伸びが見られ，また，第３学年において伸びが見られるのは，それぞれ「文字式の証明」「図形の証明」の影響が考えられる．

・何かしらの根拠を示していない記述は説明になっていないことに関する認識があると判定される生徒

表 6.2 の結果から，何かしらの根拠を示していない記述は説明になっていないことに関する認識があると判定される生徒は，これも中１から中３にかけて約 20 ポイントずつ増えている．これは上の考察で述べたことも関係しており，それに加えて「よくない」を選べるだけでなくその理由を指摘できるということは「なぜよくないか」の質的な深まりもあるということを示している．それぞれの学年の学習の中での「事柄が正しい理由の説明」を通して「根拠を示すべきだ」ということが生徒に深く認識されていくのだと考えられる．また，中１や中３の結果から，中１の段階でもほとんど認識されていないことや証明を学んだ中３の段階でも良い成果を得られていないことがわかる．

・「よい」を選ぶ生徒

表 6.2 の結果から，「よい」を選ぶ生徒は減っている．Ａさんのような説明に「それでよい」と答える生徒が減ることは，中学の学習が「事柄が正しい理由の説明」の認識へ影響を与えていることがわかる．

②の判定が「×」である生徒と自分の説明のクロス集計結果

・Aさんの説明で「よい」と答え，自身の説明にも根拠なしと判定された生徒

これらの生徒は自身が「よい」と考えているAさんのような説明をそのままししている生徒である．表6.3の結果から，中1から中3にかけて減っている．中1で23%，中2で9%，中3では2%であった．これらから，中2の12月時点で飛躍的に減っていることは文字式の証明が影響していると考えられ，中3で2%まで減っていることから，図形の証明が影響を及ぼしていると考えられる．

・Aさんの説明で「よい」と答えたのにも関わらず，自身の説明では根拠ありと判定された生徒

表6.3の結果から，自身の認識と記述に差がある生徒が存在する．これらの生徒は，これまでの学習において「説明とは根拠を示すものである」ということを感覚的に身につけているため，自分が説明する際には根拠を示そうとするが，定義を繰り返しただけのAさんの説明を見てもよくないとは判断できず，「何かしらの根拠を示さなくてはならない」という認識が感覚的なもので深い認識ではないということが考えられる．

5．まとめと今後の課題

本研究では，生徒の「事柄が正しい理由の説明」の認識を明らかにするために，予備調査から暫定的な枠組みを構築し，「事柄が正しい理由の説明」の認識の中でも，特に重要であると考えられる「根拠に関する認識」のうち，「A．何かしらの根拠を示していない記述は説明になっていないことに関する認識」「B．不確かな根拠を用いている記述は説明として不十分であることに関する認識」「C．結論に直接結びつかず，関連性がない根拠を用いている記述は説明になっていないことに関する認識」の実態を明らかにするために調査問題を作成，実施した．その結果を分析し，それをもとにさらに「根拠を示していな記述は説明になっていないことに関する認識」について，その認識と生徒自身の記述との関係について分析し，学習指導への示唆を得た．結果として，これまでよくわからなかった「事柄が正しい理由の説明」の認識に関する実態として，生徒は「根拠に関する認識」について不十分であるという実態が明らかとなった．

今後の課題として，「根拠に関する認識」について子どもたちの実態をより詳細に明らかにしていくとともに，その実態を踏まえた教材や指導法の開発が挙げられる．また，生徒の「事柄が正しい理由の説明」の認識の実態をさらに浮き彫りにするため，本調査をさらに改善していくことでより精密に生徒の実態を把握していくことができると考える．また，長い展望として，生徒の説明の認識の別の側面についても明らかにしていきたい．

引用・参考文献

國宗進（1987）「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」，日本数学教育学会誌.臨時増刊数学教育学論究47・48，pp3-23.

熊倉啓之・久保良宏・八田弘恵・国宗進（2000）「空間図形の理解に関する研究」，数学教育論文発表会論文集，33，pp319-324.

国立教育政策研究所（2013）平成25年度全国学力・学習状況調査報告書　中学校数学

茅野公穂ほか（2009），「我が国の数学教育における証明研究の課題と展望」，数学教育論文発表会論文集，42，pp64-69.

茅野公穂（1994）「証明のはたらきにもとづいた証明の指導についての一考察」，数学教育論文発表会論文集，27，pp251-256.

宮崎樹夫（1995）「学校数学における証明に関する研究：証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して」，学位論文（筑波大学）.

溝口達也（2012）「「論証指導」の基盤としての「説明の指導」：研究ノート」，鳥取大学数学教育研究，15(3).

文部科学省（2008）「中学校学習指導要領解説　数学編」，教育出版.

Fourier transform of functions on a finite non-commutative hypergroup
(有限非可換なハイパー群上の関数のフーリエ変換)

修士課程
教科教育専攻
数学教育専修
133301
池田一馬

1 はじめに

局所コンパクト群上の測度の合成積の一般化のひとつとして、1975年ごろ、Dunkl,Jewett,Spector達によってハイパー群（hypergroup, 超群）の公理が確立された。その後ハイパー群上の調和解析に関する研究が著しく進展してきている。

局所コンパクトアーベル群上の関数のフーリエ変換については一般にもよく知られている。非可換群上の関数のフーリエ変換については表現論の分野で盛んに研究が行われている。ハイパー群の分野でも可換ハイパー群上の関数のフーリエ変換については盛んに研究が進められているが、非可換なハイパー群上の関数のフーリエ変換については行われていないようである。本研究では、有限非可換ハイパー群 K 上の関数のフーリエ変換について考察した。

2 ハイパー群の公理

有限集合 $K = \{k_0, k_1, k_2, \ldots, , k_m\}$ に対して、K 上の測度全体を $M^b(K)$ と表し、K 上の確率測度全体を $M^1(K)$ と表す。すなわち、

$$
\begin{aligned}
M^b(K) &:= \{a_0\delta_{k_0} + a_1\delta_{k_1} + \cdots + a_m\delta_{k_m} \ ; \ a_0, a_1, \ldots, , a_m \in \mathbb{C}\} \\
M^1(K) &:= \{a_0\delta_{k_0} + a_1\delta_{k_1} + \cdots + a_m\delta_{k_m} \ ; \ a_j \geq 0 \ (j = 0, 1, \ldots, , m), \sum_{j=0}^{m} a_j = 1\}
\end{aligned}
$$

有限集合 K に対して、合成積 $\circ$ と対合 $*$ が $M^b(K)$ 上に定義され、以下の条件を満たすとき、$K = (K, M^b(K), \circ, *)$ はハイパー群と呼ばれている。

1. $M^b(K)$ は δ_{c_0} を単位元とする結合律を満たす $*-$ 環である。

2. $k_i, k_j \in K$ に対して、$\delta_{k_i} \circ \delta_{k_j} \in M^1(K)$ である。

3. K から K へのは全単射 $*$ が存在して、$\delta_{k_i^*} = \delta_{k_i}^*$ である。また、$k_j = k_i^*$ である必要十分条件は $k_0 \in \mathrm{supp}(\delta_{k_j} \circ \delta_{k_i})$ である。

3 ハイパー群の重み

$$\delta_{k_i}^* \circ \delta_{k_i} = n_i^0 \delta_{k_0} + n_i^1 \delta_{k_1} + \cdots + n_i^m \delta_{k_m} \quad (n_i^a \geq 0,\ \sum_{a=0}^m n_i^a = 1)$$

$n_i^0 > 0$であることは、ハイパー群の公理(2)と(3)からわかる。有限ハイパー群Kの元c_iの重み$w(k_i)$は、$w(k_i) := (n_i^0)^{-1}$で定義される。Kの重み$w(K)$は、$w(K) := \sum_{i=0}^m w(k_i)$で定義されている。

4 ハイパー群の表現

Kを有限ハイパー群とし、Hを有限次元なヒルベルト空間とする。Hの線形変換全体の集合を$B(H)$と表す。このとき$B(H)$は、$*$-環である。πを$M^b(K)$から$B(H)$への$*$準同形写像とし、

$$\pi(k_0) = I$$

(k_0はKの単位元) を満たすとき、πをハイパー群Kの表現という。

Hのπ-不変部分空間が、$\{0\}$又はH自身に限るときπを既約表現という。H_1がπ-不変部分空間であるとは、

$$k \in K\ ,\ \xi \in H_1 \Rightarrow \pi(k)\xi \in H_1$$

を満たすことを言う。

2つの表現$\pi_i : M^b(K) \to B(H)\ \ (i = 1, 2)$が与えられたとき、ある可逆な線形変換$T$が存在して、

$$T\pi_1(k) = \pi_2(k)T$$

が成立するとき、π_1とπ_2は同値であるといい、$\pi_1 \cong \pi_2$と書く。

5 有限ハイパー群と指標

Kを有限ハイパー群とする。$K = \{k_0, k_1, \ldots, k_m\}$ k_0はKの単位元である。Hを有限次元なヒルベルト空間とする。$B(H)$をHの線形変換全体の集合とする。Kの既約表現をπとする。

$$\pi : M^b(K) \to B(H)$$

Kの既約表現の同値類全体を$\hat{K}$で表す。$\hat{K} = \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n\}$。既約表現$\pi$の指標$ch(\pi)$を$ch(\pi)(k) = \frac{1}{\dim(\pi)}\mathrm{tr}(\pi(k))$とする。$\chi_j = ch(\pi_j)$とする。$K$の指標全体の集合を$\mathscr{K}(\hat{K})$で表す。$\mathscr{K}(\hat{K}) = \{\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n\}$。

6 強ハイパー群

Gを有限群とする。このときGの双対$\mathscr{K}(\hat{G})$は可換ハイパー群になる。Kを有限ハイパー群とする。このときKの双対$\mathscr{K}(\hat{K})$はハイパー群になるとは限らない。$\mathscr{K}(\hat{K})$がハイパー群となるとき、Kを強ハイパー群と呼ぶ。強ハイパー群でないハイパー群Kの例として、

$$K = W_q(4) = (\mathbb{Z}_q(2) \times \mathbb{Z}_q(2)) \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2 \quad (q \neq 1)$$

がある。$W_q(4)$は$D_4 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$の$q$-変形である。以下、$K$は強ハイパー群と仮定する。

7　有限ハイパー群の重みとハール測度

K の各元のウエイトを、$w(k_0), w(k_1), w(k_2), \ldots, w(k_m)$ で表す。K のトータルウエイト $w(K)$ は、

$$w(K) = w(k_0) + w(k_1) + w(k_2) + \cdots + w(k_m)$$

で表される。$\mathscr{K}(\hat{K})$ の各元のウエイトを、$w(\chi_0), w(\chi_1), w(\chi_2), \ldots, w(\chi_n)$ で表す。$\mathscr{K}(\hat{K})$ のトータルウエイト $w(\mathscr{K}(\hat{K}))$ は、

$$w(\mathscr{K}(\hat{K})) = w(\chi_0) + w(\chi_1) + w(\chi_2) + \cdots + w(\chi_n)$$

で表される。

$\mu = w(\chi_0)\chi_0 + w(\chi_1)\chi_1 + w(\chi_2)\chi_2 + \cdots + w(\chi_n)\chi_n$ とする。μ は $\mathscr{K}(\hat{K})$ のハール測度である。つまり、$\chi_j\mu = \mu$ を満たす。さらに、

$$\mu(k) = w(\mathscr{K}(\hat{K}))\delta_{k_0}(k) = \begin{cases} w(\mathscr{K}(\hat{K})) & (k = k_0) \\ 0 & (k \neq k_0) \end{cases} \tag{1}$$

である。

8　有限ハイパー群上の関数のフーリエ変換

K 上の関数 f と $\pi_j = (\pi_j\ ,\ H_j) \in \hat{K}$ つまり、$\pi_j : M^b(K) \to B(H_j)$　$*-$準同型に対して、$\hat{f}$ を

$$\hat{f}(\pi) = \sum_{i=0}^{m} \frac{w(k_i)}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))} f(k_i)\pi(k_i)^*$$

で与える。つまり $\hat{f}$ は $\hat{K}$ 上の作用素値関数である。

$\hat{K}$ 上の作用素値関数 h に対して $\check{h}$ を

$$\check{h}(k) = \sum_{j=0}^{n} w(\chi_j) \frac{1}{\dim(\pi_j)} tr(f(\pi_j)\pi_j(k))$$

で与える。つまり $\check{h}$ は K 上の関数である。

定理　有限非可換ハイパー群 K 上の関数 f に対して

$$\check{\hat{f}} = f$$

が成り立つ。この証明の中では、$\mathscr{K}(\hat{K})$ のハール測度が本質的な役割を果たしている。

証明

$$
\begin{aligned}
\check{\hat{f}}(k) &= \sum_{j=0}^{n} w(\chi_j)\frac{1}{\dim(\pi_j)}tr(\hat{f}(\pi_j)\pi_j(k)) \\
&= \sum_{j=0}^{n} w(\chi_j)\frac{1}{\dim(\pi_j)}tr(\sum_{i=0}^{m}\frac{w(h_i)}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}f(k_i)\pi_j(k_i)^*\pi_j) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{w(k_i)}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}f(k_i)\sum_{j=0}^{n} w(\chi_j)\frac{1}{\dim(\pi_j)}tr(\pi_j(k_i^*)\pi_j) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{w(k_i)}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}f(k_i)\sum_{j=0}^{n} w(\chi_j)\frac{1}{\dim(\pi_j)}tr(\pi_j(k_i^*k))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{w(k_i)}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}f(k_i)\sum_{j=0}^{n} w(\chi_j)\chi_j(k_i^*k) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{w(k_i)}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}f(k_i)\{\mu(k_i^*k)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{w(k)}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}f(k)\frac{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}{w(k)} \\
&= \frac{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}{w(\mathscr{K}(\hat{K}))}f(k) = f(k)
\end{aligned}
$$

9 おわりに

有限非可換群上の関数のフーリエ変換や可換ハイパー群上の関数のフーリエ変換を参考に、有限非可換強ハイパー群上の関数のフーリエ変換を与えた。今後の課題として強ハイパー群でない場合や有限でないハイパー群の場合など、非可換ハイパー群上の関数のフーリエ変換について研究してゆく。

参考文献

[1]「群上の調和解析」　河添健　著

[2]「DEFORMATIONS OF FINITE HYPERGROUPS」　SATOSHI KAWAKAMI, TATSUYA TSURII, AND SATOE YAMANAKA　著

平成 26 年度修士論文

A partial order of knot shadows and pseudo diagrams

奈良教育大学　教育学研究科
修士課程　教科教育専攻
数学教育専修　花木研究室
学籍番号 133304　田中遼

2015 年 2 月 13 日

《修士論文概要》

結び目理論は，三次元空間内における閉曲線を結び目と呼び，その結び目の絡み方がどのように絡んでいるか，2 つの結び目が異なった形であるかどうかを考察するものである．結び目の影とは結び目を平面へ自然に射影したときの像である．結び目の影の多重点は横断的な二重点のみとする．ダイアグラムとは結び目の影のすべての二重点に上下の情報を与えたもので，準ダイアグラムとは，結び目の影の一部の二重点に上下の情報を与えたものである．準ダイアグラムは交点をもたないこと，二重点をもたないこともある．すなわち，準ダイアグラムは結び目の影やダイアグラムであることもある．

本研究は，準ダイアグラムの残りの二重点に上下をつけると，どのような結び目が得られるかを明らかにすることが目的である．

本論文は，先行研究を参考に準ダイアグラムに前順序となるような関係を与え Hasse 図にかき表すことで，現れる結び目の特徴に注目している．先行研究では素な交代結び目に半順序となる関係を定義し，Hasse 図にかき表している．その中で，素な交代結び目の影においては必ず三葉結び目が得られることがわかっている．また，結び目の影に前順序となる関係を定義し，Hasse 図にかき表している．準ダイアグラムに前順序となる関係を定義し，8 交点までの結び目の準ダイアグラムから得られる結び目の考察をおこない，Hasse 図にかき表した．8 交点までの結び目の準ダイアグラムで上下が決定している交点が 1 つのみのものからは三葉結び目が得られていることがみられた．上下の付いている交点が 1 つの準ダイアグラムから三葉結び目が必ず得られることの証明を行っている．さらに，8 交点までの結び目の準ダイアグラムで上下の付いている交点が 2 つのものからは一部の 4_1 の結び目の準ダイアグラムを除いては，三葉結び目が得られていた．そこで，上下の付いている交点が 2 つ，二重点が 3 つ以上の準ダイアグラムから三葉結び目が得られることを予想している．

1 研究動機

筆者は学部の頃から結び目理論を学んできた．結び目理論は靴ひもやコードといった現実でも再現できるものを研究していることに親しみ，興味を持ち研究しようと考えた．

結び目理論は，ある結び目がどのように絡んでいるか，解くことはできるのか，2つの結び目が異なった形であるかどうかを考察するものである．学部の頃は，2つの結び目が異なるのかどうかを判定するために，結び目に数を与え，結び目の変形により数が変化しない不変量を持たせることで判定することができることを学んだ．結び目理論を学んでいく中で，DNA 結び目の研究を知った．DNA 結び目の実際の写真を見たとき，交点の上下がはっきりわかる部分とわからない部分が存在していて，どの DNA 結び目かわからないことがある．それを解決するために結び目の準ダイアグラムの研究 [2] が行われていることを知り，準ダイアグラムの研究を行いたいと考えた．

2 結び目とは

結び目 (knot) とは，三次元空間にある閉曲線のことをいい，結び目を K で表す．特に絡んでいない結び目を自明な結び目と呼ぶ．

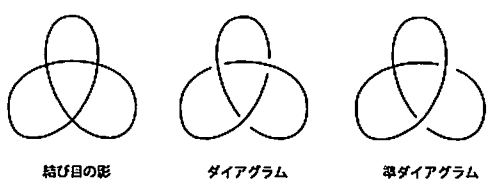


図 1

結び目を扱う際には，平面に射影して扱うことが多い．結び目を平面に自然に射影したときに得られる像を，**結び目の影**といい S で表す．このときの結び目の影の多重点は，横断的な二重点のみとする．**ダイアグラム**とは，結び目の影のすべての二重点に上下の情報を与えたものでダイアグラムを D で表す．ダイアグラムの上下のつけ方を，結び目 K と同じになるように上下を与えたとき，そのダイアグラムを**結び目 K のダイアグラム**という．**準ダイアグラム**とは，結び目の影の一部の二重点に上下の情報を与えたもので準ダイアグラムを Q で表す．準ダイアグラムは二重点のみのこと，二重点を持たないこともある．すなわち，準ダイアグラムは結び目の影やダイアグラムであることもある．ここでは，二重点を前交点，二重点に上下の情報を与えたものを交点と呼ぶ．

また，空間内の共有点を持たない r 個の結び目 $K_1, K_2, \cdots, K_r (r \geq 1)$ からなる図形

$$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_r$$

を絡み目 (link) といい絡み目を L で表す．各 $K_1, K_2, \cdots, K_r$ をその成分という．1 成分の絡み目を結び目という．

2つの絡み目が同じ形をしているかどうかを判断する際，変形したり曲げたりすることで，一方の絡み目を他方の絡み目に重ね合わせることができるときに 2つの絡み目が同じであるとすることが自然である．そのときの変形を次のように定める．

$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_r$ を三次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の絡み目とする．$\overline{uv}$ を L のある成分の 1 辺とし，$\Delta = uvw$ を三次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の三角形で，$\Delta \cap L = \overline{uv}$ とする．L の辺 $\overline{uv}$ を Δ の他の 2 辺 $\overline{uw} \cup \overline{wv}$ で置き換えて得られる絡み目を L' とする:

$$L \longrightarrow L' = (L - \overline{uv}) \cup (\overline{uw} \cup \overline{wv})$$
$$L' \longrightarrow L = (L' - \overline{uw} - \overline{wv}) \cup (\overline{uv})$$

このとき L' は L から,L は L' から Δ 移動で得られたという．(図 2)

次に，2つの絡み目が同じであることを次のように定める．

写像 $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ を平面 $\mathbb{R}^2$ に関する鏡映 (reflection) という．絡み目 L の鏡映を L^* で表す．

2つの絡み目 L と L' において，絡み目の有限列

$$L = L_0, L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}, L_n = L'$$

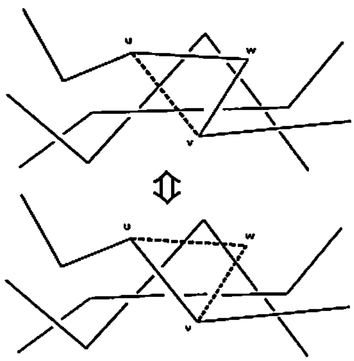


図 2　Δ 移動

が存在して，$L_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ が Δ 移動で得られるか $L_i = L^*_{i-1}$ のとき，L と L' は同型であるといい，$L \cong L'$ で示す．また，同型 $\cong$ という関係は，絡み目の集合において同値関係である．

この同値類を絡み目型 (link type) という．特に結び目の場合は結び目型 (knot type) といい，絡み目 L の絡み目型を〔L〕で表す．

次に特徴をもった結び目を紹介する．結び目 K と 2 点 v_1, v_2 で交わるような球面 $\sum$ が存在すると，K は閉曲線なのでこの 2 点は K 上にある．K は v_1 と v_2 によって 2 本の曲線 C_1 と C_2 に分けられる．$\sum$ 上で v_1 と v_2 を曲線 C で結ぶ．$\sum$ が囲む内部領域を B_1，外部領域を B_2 とすると，新しい結び目

$$K_1 = (K \cap B_1) \cup C, K_2 = (K \cap B_2) \cup C$$

が得られる．ところで，v_1 と v_2 を結ぶ $\sum$ 上の曲線は，互いに $\sum$ 上の変形の繰り返しで重なるので，K_1, K_2 の結び目の形に C の選び方は影響しない．このときの K は $\sum$ によって K_1, K_2 に分解 (decompose) されたという．また，結び目 K に上に示したどのような分解を与えても，一方の結び目が自明な結び目になる場合を K は素であるという．結び目のダイアグラム D において，ダイアグラムの曲線を一定の向きに沿って 1 周するとき，D の上を通る交点と下を通る交点を交互に通過するとき D は交代であるという．

また，絡み目のダイアグラム・準ダイアグラムにおいて次の変形が定められている．

絡み目 L のダイアグラム D・準ダイアグラム Q の任意の交点・前交点の付近に対して，次の図 3・図 4 に示す局所的な変形を Reidemeister move・Pseudo Reidemeister move という．

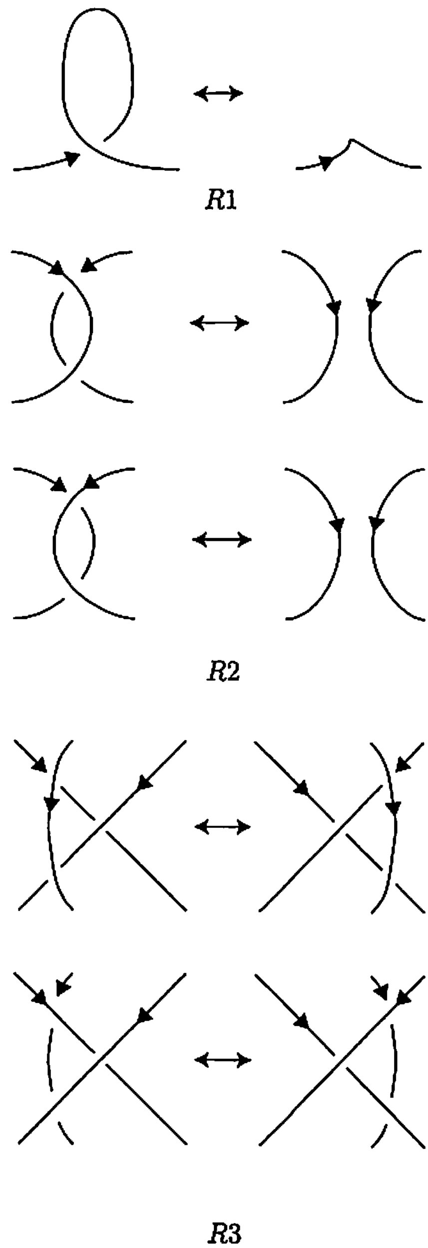


図 3　Reidemeister move

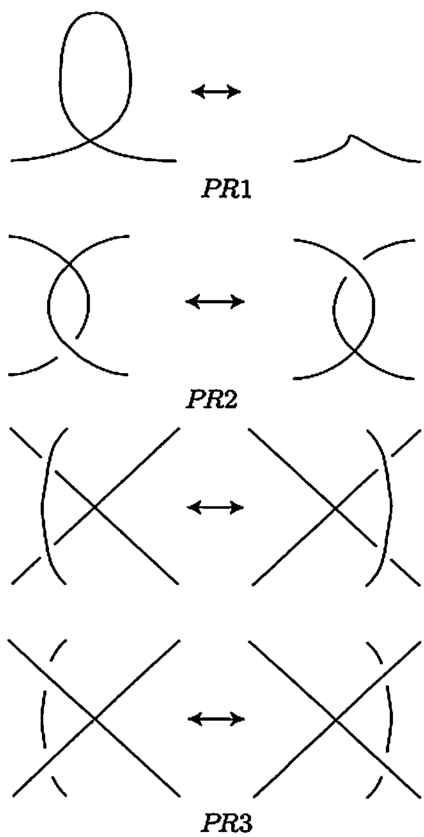


図 4　Pseudo Reidemeister move

以降は，それぞれのライデマイスター移動を $R1$，$R2$，$R3$，$PR1$，$PR2$，$PR3$ と呼ぶ．

絡み目のダイアグラムの鏡像 (mirror image) とはダイアグラムの交点の上下の情報をすべて入れ替えて得られるダイアグラムのことで，絡み目のダイアグラム L の鏡像を L^* で表す．

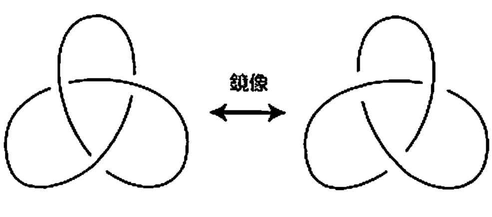


図 5

L と L' を絡み目のダイアグラムとする．L と L' が同型であるとは，絡み目の有限列

$$L = L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}, L_n = L'$$

が存在して，L_i が L_{i-1} から有限回の Reidemeister move，もしくは平面 $\mathbb{R}^2$ 上での有限回の Δ 移動を施すことによって，L' が得られるか，$L_i = L_{i-1}^*$ となっている場合である．ダイアグラムは結び目と同型の範囲で一意的である．

3　先行研究

結び目の「複雑さの度合」を量る基準として，結び目のダイアグラムの全体を考慮することによって，結び目の複雑さを比較している．素な交代結び目のダイアグラムについては [6] で，結び目の影については [5] で示されている．

3.1　素な交代結び目の順序

L を絡み目のダイアグラムとし，S を L の絡み目の影として，S の前交点の数を c とすると，S を影とする絡み目のダイアグラムが 2^c 個得られる．したがって，S から高々 2^{c-1} 個の絡み目形が発生する．S から発生する絡み目形の集合を $LINK(S)$ で表す．絡み目形 L_0 が $LINK(S)$ の要素であるとき，S は L_0 の影であるという．絡み目形 L_0 のすべての影の集合を $PROJ(L_0)$ で表す．

ここで絡み目形の間に，次のように大小関係を定める．

絡み目形 L_1, L_2 について，

$$PROJ(L_1) \supset PROJ(L_2)$$

であるとき，L_1 は L_2 のマイナーといい，$L_1 \leq L_2$ で示す．すなわち，L_2 のどのような影でも，その前交点に適当に上下を指定すると L_1 のダイアグラムになる．また，L_2 のどのようなダイアグラムでも適当に交点を選んで上下を入れ換えれば L_1 のダイアグラムとなるといったことを表す．

また，上の定義から以下が示される．

任意の $\mu (\mu \in \mathbb{N})$ 成分の絡み目形 L について

$$O_\mu \leq L$$

が成り立つ．ここでの O_μ は μ 成分の自明な絡み目形を表す．さらに次の命題も得られる．

絡み目形の集合 $\mathscr{L}_\mu$ 上で，関係 $\leq$ は前順序 (pre-order) である．

しかし，一般には反対称律は成り立たない．これは $PROJ(L_1) = PROJ(L_2)$，つまり L_1 と L_2 の影がすべて一致していても，$L_1 = L_2$ とは限らないからである．

ここまでは μ 成分の絡み目形の集合 $\mathscr{L}$ について記述してきた．これを，素な交代絡み目全体に制限することで半順序集合となる．

自明な結び目 (記号で 0_1) が最小元になることが上でわかっている．次に，結び目のうちもっとも簡単な結び目とされている三葉結び目 (記号で 3_1) について，以下が示されている．

非自明な任意の結び目形 K において

$$(3_1\text{の結び目形}) \leq K$$

が成り立つ．

上の定理は，非自明な結び目形 K の任意の影 S の前交点に適当に上下を指定すると，三葉結び目のダイアグラムとなる，または任意の結び目のダイアグラム D の交点を適当に選び，それらの交点を交差交換すると三葉結び目のダイアグラムとなることを示す．

これらの定義・定理をもとにかかれた Hasse 図は図 6 である．

3.2 結び目の影の順序

岩田 [Iwata] は，結び目の影を平面曲線 (plane curve) として扱っていたので，ここでは平面曲線 (plane curve) を結び目の影と表すこととする．はじめに，結び目の影に順序を与えるために定義を行う．

C を結び目の影とする．

$$Lift(C) := \{K | K \text{ は } C \text{ を影としてもつダイアグラム}\}$$

$$L(C) := Lift(C)/_{\cong}$$

C が 3_1 の影 (図 7) であるとき，C の前交点に上下の情報を与えて得られるダイアグラムの数は $2^3 = 8$ 個である．各前交点に上下を与えて得られ

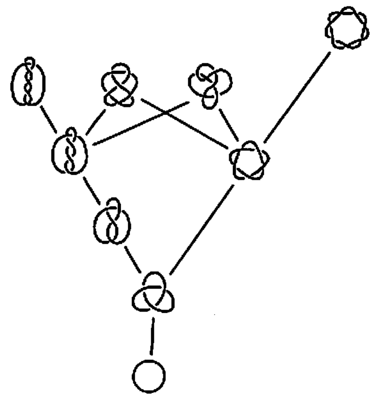


図 6　結び目の Hasse 図

た結び目は自明な結び目と三葉結び目と同値になる．ゆえに，$Lift(C)$ の要素の数は 8 個であるが $L(C)$ の要素の数は 3 個になる．

次に示す定義により結び目の影の同値類の集合に対して，その複雑さを表す順序をつける．

結び目の影の集合 $\mathbb{C}$ とする．結び目の影 C_1, C_2 に対して

$$C_1 \leq C_2 \Leftrightarrow L(C_1) \subset L(C_2)$$

とする．

上の定義より，例えば結び目 3_1 と 4_1 に着目すると

$$L(3_1) = \{0_1, 3_1\}$$

$$L(4_1) = \{0_1, 3_1, 4_1\}$$

となる．よって (3_1の影) $\leq$ (4_1の影) であることがわかる．ここでいう，3_1 の影，4_1 の影は図 7 の左が 3_1 の影，右を 4_1 の影とする．

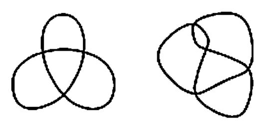


図 7

結び目の影の集合 $\mathbb{C}$ 上で，この関係 $\leq$ は前順序 (pre-order) である．

これらの定義をもとに [5] で Hasse 図がかかれているが，この Hasse 図は同型になる影も含まれている．それらを除いた前交点の数が 7 交点以下の結び目の影の順序は以下の Hasse 図である．

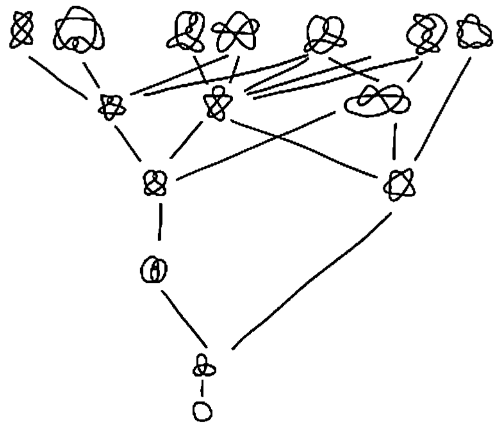


図 8

4 準ダイアグラムの順序

先行研究では，素な交代結び目の順序・平面曲線 (plane curve) の順序を定めることで，結び目の構造を与え考察が行われた．これらを参考に，結び目の影からどのような結び目が得られ，得られ方には特徴があるかどうかを考察した．また，準ダイアグラムの表は The Theory of Pseudoknots[Henrich][1] に示されている表を使用した．はじめに，準ダイアグラムに前順序となる関係を定める．

結び目の影から得られる準ダイアグラムを Q, Q' とする．Q, Q' のすべての前交点に上下の情報を与え得られるダイアグラムで表現される結び目の集合を $K(Q), K(Q')$ で表す．

$$K(Q) \supset K(Q')$$

であるとき，Q は Q' のマイナーといい，$Q \leq Q'$ で表す．これは準ダイアグラムの集合で，上で記述した関係 $\leq$ は前順序 (preorder) である．

準ダイアグラムの残りの前交点に上下の情報を与えることで得られる結び目の集合 $K(Q)$ を考える．以下は 6 交点以下の結び目の準ダイアグラムの $K(Q)$ の要素を表す．

$K(0_1) = \{0_1\}$
$K(3_{1-1}) = \{0_1, 3_1\}$
$K(3_{1-2}) = \{0_1, 3_1\}$
$K(3_{1-3}) = \{0_1, 3_1\}$
$K(4_{1-1}) = \{0_1, 4_1, 3_1\}$
$K(4_{1-2}) = \{0_1, 4_1, 3_1\}$
$K(4_{1-3}) = \{0_1, 4_1, 3_1\}$
$K(4_{1-4}) = \{0_1, 4_1\}$
$K(4_{1-5}) = \{0_1, 4_1\}$
$K(5_{1-1}) = \{0_1, 5_1, 3_1\}$
$K(5_{1-2}) = \{0_1, 5_1, 3_1\}$
$K(5_{1-3}) = \{0_1, 5_1, 3_1\}$
$K(5_{1-4}) = \{0_1, 5_1, 3_1\}$
$K(5_{1-5}) = \{5_1, 3_1\}$
$K(5_{2-1}) = \{0_1, 5_2, 4_1, 3_1\}$
$K(5_{2-2}) = \{0_1, 5_2, 4_1, 3_1\}$
$K(5_{2-3}) = \{0_1, 5_2, 4_1, 3_1\}$
$K(5_{2-4}) = \{0_1, 5_2, 3_1\}$
$K(5_{2-5}) = \{0_1, 5_2, 3_1\}$
$K(5_{2-6}) = \{0_1, 5_2, 4_1, 3_1\}$
$K(5_{2-7}) = \{0_1, 5_2, 3_1\}$
$K(5_{2-8}) = \{5_2, 3_1\}$
$K(5_{2-9}) = \{0_1, 5_2, 4_1\}$
$K(5_{2-10}) = \{0_1, 5_2\}$
$K(6_{1-1}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 6_1\}$
$K(6_{1-2}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 6_1\}$
$K(6_{1-3}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 6_1\}$
$K(6_{1-4}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_1\}$
$K(6_{1-5}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_1\}$
$K(6_{1-6}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 6_1\}$
$K(6_{1-7}) = \{0_1, 4_1, 6_1\}$
$K(6_{1-8}) = \{0_1, 4_1, 6_1\}$
$K(6_{1-9}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 6_1\}$
$K(6_{1-10}) = \{0_1, 4_1, 6_1\}$
$K(6_{1-11}) = \{4_1, 6_1\}$
$K(6_{1-12}) = \{0_1, 5_2, 6_1\}$
$K(6_{1-13}) = \{0_1, 6_1\}$
$K(6_{2-1}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1, 6_2\}$

$K(6_{2-2}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1, 6_2\}$
$K(6_{2-3}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1, 6_2\}$
$K(6_{2-4}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 6_2\}$
$K(6_{2-5}) = \{0_1, 4_1, 5_2, 6_2\}$
$K(6_{2-6}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_2\}$
$K(6_{2-7}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{2-8}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_2\}$
$K(6_{2-9}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{2-10}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_2\}$
$K(6_{2-11}) = \{0_1, 4_1, 6_2\}$
$K(6_{2-12}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1, 6_2\}$
$K(6_{2-13}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_2\}$
$K(6_{2-14}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{2-15}) = \{0_1, 4_1, 6_2\}$
$K(6_{2-16}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{2-17}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_2\}$
$K(6_{2-18}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_2\}$
$K(6_{2-19}) = \{4_1, 6_2\}$
$K(6_{2-20}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 5_1, 6_2\}$
$K(6_{2-21}) = \{0_1, 3_1, 6_2\}$
$K(6_{2-22}) = \{3_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{2-23}) = \{0_1, 6_2\}$
$K(6_{2-24}) = \{5_2, 5_1\}$
$K(6_{2-25}) = \{3_1, 5_1, 6_2\}$
$K(6_{2-26}) = \{3_1, 6_2\}$
$K(6_{3-1}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1, 6_3\}$
$K(6_{3-2}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1, 6_3\}$
$K(6_{3-3}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 5_1, 6_3\}$
$K(6_{3-4}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 5_1, 6_3\}$
$K(6_{3-5}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 5_1, 6_3\}$
$K(6_{3-6}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 6_3\}$
$K(6_{3-7}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 6_3\}$
$K(6_{3-8}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 5_2, 6_3\}$
$K(6_{3-9}) = \{3_1, 5_2, 6_3\}$
$K(6_{3-10}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_3\}$
$K(6_{3-11}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{3-12}) = \{0_1, 3_1, 4_1, 6_3\}$
$K(6_{3-13}) = \{0_1, 3_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{3-14}) = \{0_1, 3_1, 6_3\}$
$K(6_{3-15}) = \{0_1, 3_1, 6_3\}$
$K(6_{3-16}) = \{0_1, 3_1, 6_3\}$
$K(6_{3-17}) = \{3_1, 6_3\}$
$K(6_{3-18}) = \{0_1, 4_1, 6_3\}$
$K(6_{3-19}) = \{3_1, 5_2, 5_1\}$
$K(6_{3-20}) = \{0_1, 6_3\}$

以上を元に準ダイアグラムに大小をつけた Hasse 図は後半に示す.

ここで筆者はほとんどの準ダイアグラムから三葉結び目が得られていること，先行研究 [6] により，結び目の影からは必ず三葉結び目が得られることが示されていることから，準ダイアグラムの前交点に上下を与えて，三葉結び目 3_1 が得られるのはどのような場合であるか考察した.

はじめに，交点が 1 つである準ダイアグラムに注目しすると，次のことが示された.

交点が 1 つの準ダイアグラムの前交点に上下をうまくつけると三葉結び目が得られる.

さらに，交点が 2 つの準ダイアグラムに注目し，三葉結び目が得られる条件を考えた．準ダイアグラムから得られる結び目に注目していると 6 交点までの結び目の準ダイアグラムのうち，4 交点の結び目の準ダイアグラム 4_{1-4} からは三葉結び目が得られないことがみられた．そこで交点が 2 つの準ダイアグラムに対して次の予想があげられる.

Q を交点が 2 つ，前交点が 3 つ以上の準ダイアグラムとする．残りの全ての前交点に特定の上下のつけ方に従い上下を付けることで，三葉結び目が得られる.

参考文献

[1] Allison Henrich,Rebecca Hoberg,Slavik Jablan,Lee Johnson,Elizabeth Minten,Ljiljana Radovic.The Theory of Pseudoknots.

[2] Ryo Hanaki.Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs.Osaka J.Math 47 (2010),863-883.

[3] Ryo Hanaki.Trivializing number of knots.Journal of the Mathematical Society of Japan (2014),Volume 66, No.2,435-447.

[4] Ryo Hanaki.On scannable properties of the original knot from a knot shadow.preprint.

[5] Noriko Iwata.A Pre-order of Plane Curves.master thesis,Tsuda College(1999).

[6] Kouki Taniyama.A Partial Order of Knots,Tokyo J.Math.12 (1989),205-229.

[7] 鈴木晋一著,『結び目理論入門』, サイエンス社, 1994 年.

[8] 村上斉著,『アウト・オブ・コース　結び目のはなし』, 遊星社, 2000 年.

[9] C.C. アダムス著, 金信泰造訳,『結び目の数学　結び目理論への初等的入門』, 培風館, 1998 年.

[10] 鎌田聖一著,『シュプリンガー現代数学シリーズ 16　曲面結び目理論』, 丸善出版, 2012 年.

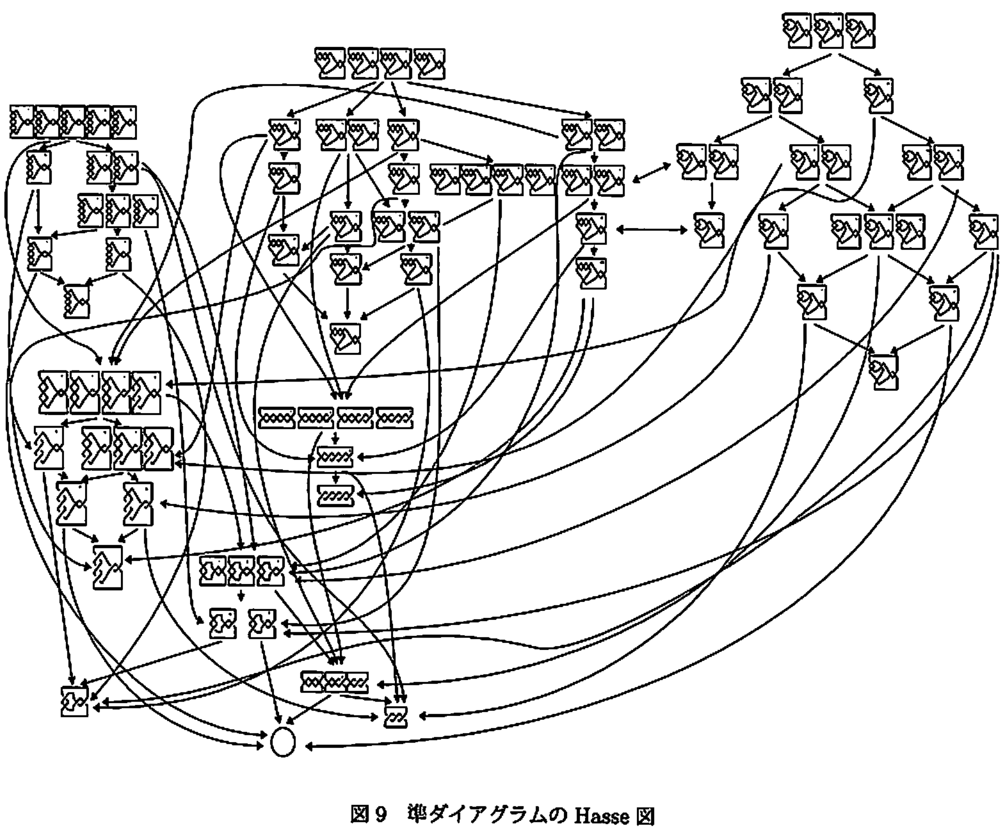


図 9　準ダイアグラムの Hasse 図

平成 26 年度　修士論文

離散グラフを用いたネットワーク問題に関する教材開発

奈良教育大学　教育学研究科　修士課程
教科教育専攻　数学教育専修
花木研究室　133302　川下優一

1　研究の目的と背景

新たな学習指導要領が平成 21 年に公示され，高等学校の数学科においては，平成 25 年度から第 1 学年から学年進行で新指導要領下の指導が実施されている．数学科における新学習指導要領の特徴の 1 つとして，知識・技能を活用する学習や探究する学習を重視した課題学習が導入されたことが挙げられる．また，科目「数学活用」が新設され，数学の社会的有用性について明確に言及しており，表現の 1 つとして離散グラフの活用が明確に挙げられている．

教育課程部会における議論では，日常生活に結びついた「数学的リテラシー」を育む必要があると結論付けている．「数学的リテラシー」とは，『様々な文脈の中で定式化し，数学を適用し，解釈する個人の能力であり，数学的に推論し，数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述し，説明し，予測する力』[3] である．これにより，『個人が世界において数学が果たす役割を認識し，建設的で積極的，思慮深い市民に確固たる基礎に基づく判断と決定を下す助けとなるものである』[3] とされている．最新の 2012 年の PISA 調査では，数学的リテラシーについて調査され，平均得点は上位であったが，数学的プロセスの 3 つのカテゴリー（定式化・適用・解釈）のうち，「解釈」の得点が，世界各国と比較しても相対的に低かった．

このように社会的背景として，日常の事象を数学に結び付けて課題を解決したり考察したりする力が求められている．また，そのようにして数学を活用する態度を養うことが求められている．そこで，本研究の目的として，数学的モデリングをする力の育成，及び数学的モデリングを通した数学を活用しようとする態度の育成の 2 つを挙げる．数学的モデリングとは，現実の事象を数学にして，現実事象での解釈，評価を行う一連の流れを指し，数学的リテラシーや課題学習の学習内容と類似する点が多い．社会に出て問題に遭遇した際に，その力を活用して生き抜いていく人材を育成したいと考え，社会への接続を考慮し，本研究における対象を中学生，高校生として研究を行う．

2　論文の構成

第 1 章　はじめに
第 2 章　最短経路問題に関する数学的モデリングを行う教材
第 3 章　最短経路探索アプリケーションの開発
第 4 章　おわりに

3　数学的モデリングの規定

西村 [4] は，Pollak,H.O. の「数学的モデル化過程」(2003) をもとに，島田茂の「数学的活動」(1977)，Treilibs,V.，Burkhardt,H. & Low,B. の問題解決過程 (1980)，三輪辰郎の「数学的モデル化過程」(1982)，OECD 生徒の学習到達度評価調査 (PISA 調査) の「数学化サイクル」(2004)，Wild,C.J. & Pfannkuch,M. の「統計的探究過程」(1999) を Pollak の概念規定と対比，整理して規定している．この規定の特徴として，Pollak の規定を基盤としてデータの扱いを加味した問題解決過程を示し，6 つの思考の相を明確化して，それらの思考において目指すものとして「社会の問題」,「数学の問題」,「数学的結論」を明示している．各過程における相の詳細は以下の通りである．なお，各相のアルファベットのラベリングについては，本研究者が独自につけたものである．

● 「社会の問題」から「数学の問題」への相

a. 問題の解釈
　解決したい，理解したい「社会の問題」に対して，数量化や幾何学化などをし，数学を適用しやすくする．

b. 定式化
　重要と思われる対象や関係を見出すとともに，保つべきことは何か，無視すべきことは何かを決定する．また，必要なデータがあれば，収集する．

● 「数学の問題」から「数学的結論」への相

c. 数学的モデルの作成
　定式化した数学の問題に対して，関連のある数学の分野を同定し，それに対する直観や知識を働かせ，数学的モデルを作成する．

d. 数学的処理
　数学的方法により，結論を得る．この過程で，新しい概念や方法，アルゴリズムなどを得ることもある．

● 「数学的結論」から「社会の問題」への相

e_1. 解の翻訳
　数学的方法により得た結論を，社会へ訳し戻す．

e_2. 評価
　結論は実際的か，合理的か，受け入れられるか等を検証する．もし十分ならば，他者に的確に伝え，不十分であったり満足がいかなかったならば，a. に戻り，その原因を突き止め，再び始める．

本研究ではこの規定をもとに，以下の図 1 を用いて，生徒の活動を各相と照らし合わせながら，数学的モデリングを考察する．

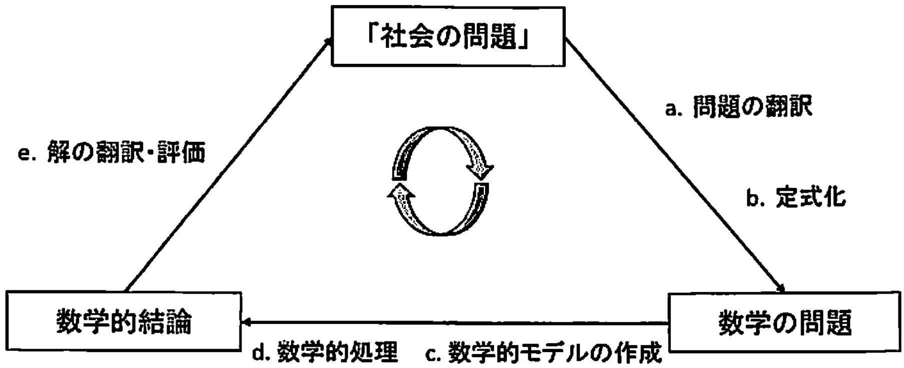


図 1: 本研究における数学的モデリングの規定

4 教材の内容

a. 問題の解釈

問題を以下とする.

> 皆が会社の社員となって城崎漁港から曽爾に新鮮な水産物を届けます. 漁港から曽爾へ松葉ガニを運ぶ上で, どのような点に気をつかう必要があり, どのように運べばいいでしょう.

はじめに, どのような点に気を遣いながら運送する必要があるか検討する. 新鮮なものを届けるために早く運ばなければならない点や, 利益を出すために出来るだけ費用を抑えて運ばなければならない点, 安全に運ばなければならない点などの気を遣う必要のある点が挙げられる.

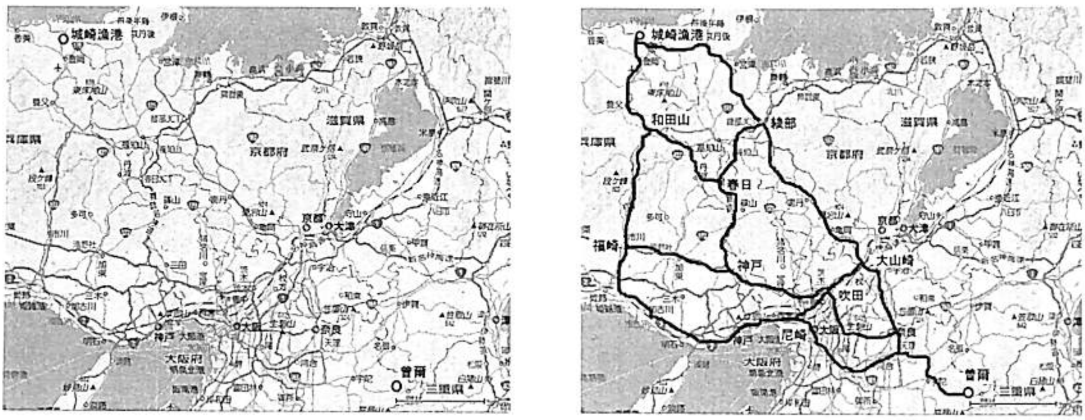
次に, 気を遣う点を考慮しつつ, どのようなに運べばいいか検討する. 新鮮なまま運ぶことを考慮すれば, 生きたまま生簀で運んだり, 発泡スチロールで運んだりすることが考えられる. 交通手段は, 内陸部の運送のため鉄道か車が挙げられるが, 目的地付近の鉄道網が充実していないこと, また早く運ぶということから車(トラック) による運送を考える.

そして, 運送上考慮すべき条件 (考慮条件とする) を検討する. 考慮条件として, 車での運送ということで運送経路の距離, 早く運ぶということで運送にかかる時間, また会社にとっての利益を考えるために運送にかかる費用が挙げられる.

このように与えられた問題を,「距離, 時間, 費用の 3 つの考慮条件に着目して, どのように運送すればよいか」と解釈して, 次の考察を行う.

b. 定式化

次に，運送経路の考察を行う．漁港から目的地までの経路を知るために本やインターネット等で道路を調べる．道路地図には大きな道から細い道まで沢山の道路が掲載されているが，問題の解釈の際に考察したより早く運ぶという観点から，県道や町道などの細かい道を除いて，出来るだけ高速道路や国道を利用した経路を考える．



道路地図　　経路を太線で示した地図

図 2: 道路地図及び経路を太線で示した地図（Yahoo!地図より転載・加筆）

経路の決定後，各経路間における考慮条件の数値化を行う．

距離の算出は，インターネットを利用して自動車ルート検索サイトによる経路間の探索や，道路地図の縮尺を利用した探索を行う．各経路間の距離は以下となる．

表 1: 各経路間の距離

区間	距離	区間	距離
城崎温泉～和田山	50km	城崎温泉～綾部	90km
和田山～福崎	45km	和田山～春日	38km
綾部～春日	35km	綾部～大山崎	78km
春日～神戸	49km	神戸～吹田	30km
尼崎～吹田	25km	尼崎～曽爾	105km
吹田～曽爾	95km	大山崎～吹田	21km
大山崎～曽爾	90km		

費用として考えられるものは，トラックのガソリン代，運転手の人件費などが考えられる．ここでは人件費などを無視して，かかる費用としてトラックのガソリン代と高速道路路の料金のみを挙げる．まず，運搬する

のに用いるトラックを 10t トラックと仮定して平均燃費を調べる．より理想的な値を算出するため，一般道よりも高速道路での平均燃費をよく設定し，経路を考慮しながら必要なガソリン量を計算してガソリン代を求める．高速道路料金については，仮定の 10t トラックから料金をインターネット等を用いて算出する．各経路間の費用は以下となる．尚，百円単位は四捨五入して算出した．

表 2: 各経路間の費用

区間	費用	区間	費用
城崎温泉～和田山	3 千円	城崎温泉～綾部	6 千円
和田山～福崎	3 千円	和田山～春日	2 千円
綾部～春日	2 千円	綾部～大山崎	3 千円
春日～神戸	3 千円	神戸～吹田	3 千円
尼崎～吹田	2 千円	尼崎～曽爾	5 千円
吹田～曽爾	7 千円	大山崎～吹田	2 千円
大山崎～曽爾	8 千円		

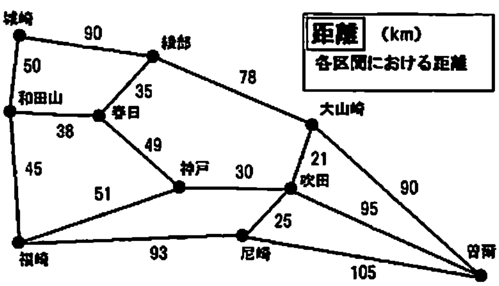
時間の算出は，各区間の距離をその経路における法定速度で割って算出する．経路によって，特に一般道では法定速度が複数存在するところもあるが，複数の法定速度の平均をとるなどの単純化を行う．各経路間の時間は以下となる．

表 3: 各経路間の時間

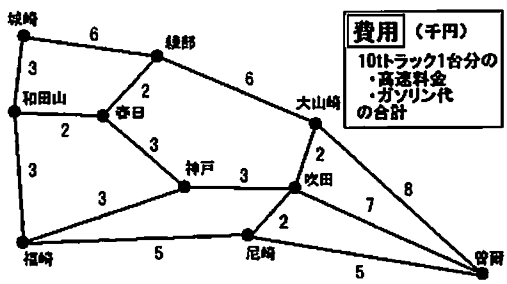
区間	時間	区間	時間
城崎温泉～和田山	1.3 時間	城崎温泉～綾部	2.3 時間
和田山～福崎	0.6 時間	和田山～春日	0.5 時間
綾部～春日	0.4 時間	綾部～大山崎	1.6 時間
春日～神戸	0.6 時間	神戸～吹田	0.4 時間
尼崎～吹田	0.3 時間	尼崎～曽爾	2.1 時間
吹田～曽爾	1.6 時間	大山崎～吹田	0.3 時間
大山崎～曽爾	1.8 時間		

c. 数学的モデルの作成

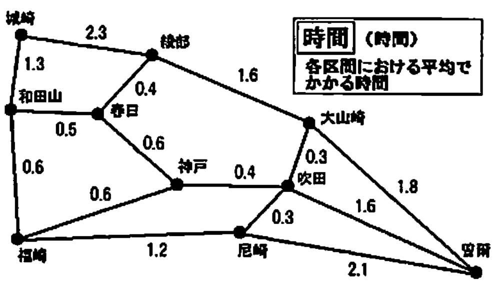
定式化した内容をまとめ，端的に表す方法を考える．はじめに，道路地図から経路以外の不要な道を除く．また，道の曲がり具合や長さ，また分岐点の位置等は，単純に表す上では不必要な情報であるため，分岐点を適当に定めてその区間を線分で表す．そして，各線分に考慮条件の数値をラベルすることで，定式化した内容をまとめ，端的に表すことができる．これは，頂点として分岐点を，辺として道路を，重みとして考慮条件の数値を表した離散グラフである．定式化した内容を重み付きグラフに表したものが以下である．



距離を重みとした離散グラフ



費用を重みとした離散グラフ



時間を重みとした離散グラフ

図 3: 距離，費用，及び時間を重みとした離散グラフ

d. 数学的処理

これまで検討してきた内容を基に，各考慮条件に配慮した最適経路の算出を行う．最適経路の探索については，ダイクストラ法を用いて導く．各考慮条件における最適経路は，

・距離：城崎温泉～綾部～大山崎～曽爾：258km
・費用：城崎温泉～和田山～福崎～尼崎～曽爾：16 千円
・時間：城崎温泉～和田山～春日～神戸～吹田～曽爾：4.4 時間

である．数学的モデリングを円滑に行うようにしたり，また数学的モデリングの中でも解の翻訳・評価に重きを置いたりする際は，探索に表計算ソフトなどのアプリケーションを用いることも考えられる．表計算ソフトを用いる際は，城崎温泉から曽爾までの考えうる経路を７つに絞って，それぞれの経路における重みの和を計算する．その７つの経路の重みの和から最短経路を探すことで，最短経路を見出すことができる．

e. 解の翻訳・評価

各考慮条件における最適経路の探索をしてみると，考慮条件によって経路が異なることに気付く．例えば，城崎から距離を考慮すれば綾部方面へ行くべきであるが，その他の考慮条件を検討すれば和田山方面へ行くべきである．綾部方面に進み，城崎温泉～綾部～大山崎～曽爾で経路を設定すれば，距離は最短で最適であるが，時間や費用などは多くかかってしまう．このように，考慮条件によって経路が異なるため，複数の考慮条件を踏まえて経路を考えると，経路の設定にジレンマが生じる．そこで，複数の考慮条件を加味して，どのような考慮条件で運べばより最適に運送できるか考える．その上で算出方法，及び結果を考察し，実際的か，合理的か，また受け入れられるか検討を行う．

始めに，すべての条件を考慮すべく，すべての条件の重みの算術平均をとって経路を探索すると，城崎～綾部～大山崎～曽爾となる．結果としては距離に重きを置いた経路となるが，この結果及びその算出方法について考察を行う．各考慮条件の経路間における算術平均を算出してみると，距離が 60km，費用が 4 千円，時間が 1 時間である．費用と時間が 1 位数に対して，距離が 2 位数であり，算術平均をとるとの多い距離の重みが増え，他の重みが反映されにくい．そのため費用や時間の重みが反映されているかどうかは検討できず，算術平均をとるだけではすべての考慮条件が考慮されたとは言い難い．

そこで，数値の持つ意味，比重に着目して考察する．例として，時間と距離に着目すると，一般道路の法定速度が 60km/h であることから，算術平均である 1 時間と 60km が現実においても等価であると捉えることができる．値としては 2 位数の距離に寄ってしまうが，平均値における数値の比重は同じであることから，算術平均をとってもよいと捉えることができる．そこで時間と距離の算術平均をとって最適経路を探索すると，経路は，城崎温泉～綾部～大山崎～曽爾となり，距離に重きを置いたときの最適経路と同じになる．したがって，最適経路は城崎温泉～綾部～大山崎～曽爾と解釈することができる．

以上の各相における活動を図にまとめると，以下の図のようになる．

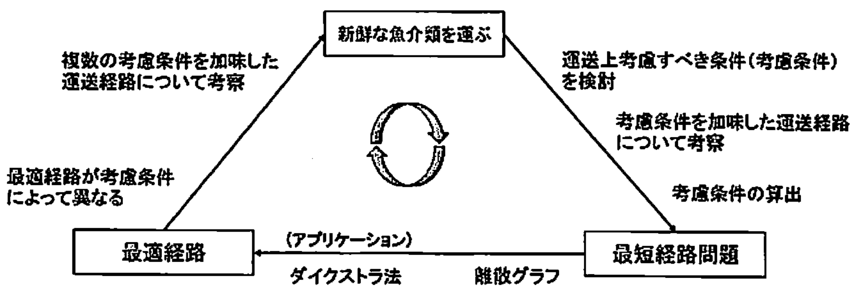


図 4: 本教材の数学的モデリングの各相（1 巡目）

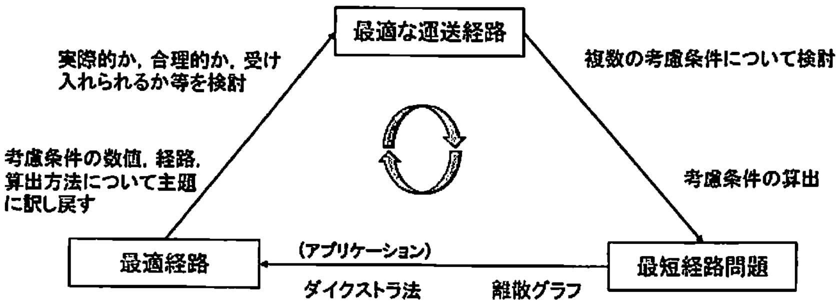


図 5: 本教材の数学的モデリングの各相（2 巡目以降）

5　実践授業の考察

a. 問題の解釈

問題の設定については，前の映写機で簡易的な地図や松葉ガニの写真を映し出して，解決したいと思わせるように工夫を凝らした．その後の積極的な意見の導出からも，この工夫は良かったものと考える．主題の解釈として，「距離，時間，費用の 3 つの考慮条件に着目して，どのように運送すればよいか」とし共有することも容易にできた．生徒から様々な意見が出され，中学生に対してこの過程についてのモデル化を行う態度や素地を養うことは可能であるだろう．

b. 定式化

90 分と限られた時間の中で数学的モデリングをするということで，条件の数量化は授業者が行ったが，条件の数値化を生徒自身で行うことで，翻訳，評価をより意味を考えて行うことができると考える．評価の際に，各条件の和を何気なく行った生徒については，その数値の持つ意味を理解しきれていなかったのではないかと考えられる．費用であれば，様々なコストを加味して算出する過程を経ることによって，評価の際，費用と距離を足すことは変ではないかと捉えることも容易であろう．しかし，授業時間数が制限されている場合についても，どのように算出したのか説明しておくことで翻訳，評価を行うことは可能であると考えられる．

経路の単純化については，実践授業を行った生徒にとっては，高速道路等の交通網が身近でなく，また地図が煩雑なものでありすぎたため，単純化が難しかったのではないかと考えられる．実際の地図から導出を行うことにこだわりすぎず，もう少し簡素な高速道路と主要な国道のみを掲載した地図を用いて，早く運ぶためにはどうすればよいか目的意識をしっかり持たせた上で，経路の単純化を行う必要があるだろう．

また，考慮条件について数値の理想化を行う活動については，本実践で扱っていない．そのため，その活動による成果について本実践では言及できないが，90 分と限られた時間でその活動まで取り扱うことは，条件の数量化と同様に難しいと考える．理想化の活動が行えるとすれば，費用について例えば，人件費などのコスト

をインターネット等で算出したり，逆に人件費などのコストを考えずに費用として算出したりなどして，生徒同士の意見から理想化を行うことが期待される．

c．数学的モデルの作成

数学的モデルである離散グラフの表現については，すべての頂点について時間内に描いた生徒はいなかったが，迷いながらも途中まで描く生徒は数人見られた．辺ということで，辺を定規で線分として描いている生徒がほとんどであったが，情報の劣化を意識して描いている生徒は少なく，分岐点の位置関係をそのまま描いている生徒がほとんどであった．生徒の活動から，単純化における情報の劣化箇所についての意識付けが十分でなかったと考えられる．離散グラフを描く欄を小さく設定したり，皆に分かりやすいように描くように意識付けを行ったりすることで，情報の劣化が必要となる流れを作らなければならない．そこで元の情報と比較した上で，どの箇所が劣化し，どの箇所が保存されているか，また劣化したことによる利点と欠点を考察する活動が必要であろう．

一方で，示した離散グラフの導入に際して，道を線分にすることは生徒から意見が出され，離散グラフを見てどういう意味か分からないといった質問もなかったことから，馴染みのない離散グラフではあるが，生徒にとって直感的に分かりやすい表現方法であったと考える．数学的モデルの作成の過程については，数学的モデルとして離散グラフを用いることで，生徒にとって分かりやすく，次の相への接続についても適していると考える．

d．数学的処理

数学的処理において，iPad の操作については中学生にも容易であったが，表計算ソフト「Numbers」におけるセル内の関数計算については，前で映しながら一斉に享受してもついていけない生徒が見られた．そのため，操作説明で予想以上に時間を割いた．離散グラフの数学的モデルを用いた，生徒にとってより容易な数学的処理が求められる．そこで，離散グラフから最短経路を算出するアプリケーションの開発を行った．

e．解の翻訳・評価

数学的モデル化過程のサイクルを回す発想については，時間及び費用を優先する生徒が双方いる中で，時間と費用で最短経路が異なることに着目し，どう折り合いをつければよいか考える，という流れで生徒に受け入れられた．しかし，複数の考慮条件を考慮して経路を探索するものの，その結果を探究的に考察できている生徒は少なかった．その要因として，単位の違うもの同士の計算に違和感を持っていないこと，そして単位の持つ意味や数値そのものの価値についての考察が不足していることが挙げられる．複数の考慮条件の重みの和を算出している生徒が見られたが，単位の違うもの，例えば円と km を足すことの違和感が不足している．また重みの平均をとって考えている生徒についても同様のことが言え，平均値が持つ意味やそのものの価値について考察が不足している．解の翻訳・評価については，算出した解の持つ意味やそのものの価値についての考察不足が課題である．

この課題に際して，普段の授業展開においても，数値のもつ意味を考えたり，単位に着目にして計算方法を考えたりする授業や活動が必要である．例えば，60km の距離を 40 分かけて高速道路上を車で移動したときの時速を考える活動において，回答として，$60 \div 40 = 1.5$ や $60 \div 0.4 = 150$ と答えたとする．この間違いは

時間の単位を分のまま計算したり，時間の単位変換を間違えたことによるが，間違いに気付き直す方法としていくつか挙げられる．1つに答えの値の意味を検討することである．高速道路上を車で移動しているということで，1.5km/時であると明らかに遅すぎ，また，150km/時であると速すぎる．値の持つ意味に着目することで，見出した答えがおかしいことに気付くことができる．また，間違いに気付く方法として，単位に着目することが挙げられる．時速の単位はkm/時であり，距離（km）から時間（時）を割らなければならないことに気付く．それにより，40で割ったり0.4で割ったことに対する間違いに気付くことができる．このように普段の授業において，数値のもつ意味を考えたり，単位に着目にして計算方法を考えたりする授業や活動が可能であり，それにより，解の翻訳・評価をより探究的に考察することができるだろう．

参考文献

[1] 文部科学省（2009），「高等学校学習指導要領解説　数学編」．

[2] 文部科学省（2014/11/26 アクセス），「OECD における「キー・コンピテンシー」について」，http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/016/siryo/06092005/002/001.htm.

[3] 国立教育政策研究所 (2013)「PISA2012 年調査国際結果の要約」．

[4] 西村圭一 (2012a)「数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究」，東洋館出版社．

[5] 西村圭一 (2012b)「算数・数学科における「体験的活動」〜イギリスの Bowland Maths. に着目して」，学事出版，中等教育資料平成 24 年 12 月号 pp.14〜pp.19.

[6] 西村圭一（2007）「中等教育における離散グラフを用いた数学的モデリングに関する研究」，日本数学教育学会誌 89(3), pp.8-16.

[7] 花木良（2007）「最短経路問題に関する教材研究〜中学・高等学校向け離散グラフ教材〜」，第 40 回数学教育論文発表会論文集，pp.853-858.

[8] 真鍋佑香，花木良（2012）「スケジュール問題に関する教材研究-中学・高等学校向け離散数学教材-」，第 45 回数学教育論文発表会論文集（2012），pp.353-358.

[9] AISIN AW (2014/6/2 アクセス)「教えて!カーナビの仕組み」，http://www.aisin-aw.co.jp/products/information/structure/.

[10] アラン・ドーラン，ジョーン・オールダス著，大石泰彦訳，(2003)「よくわかるネットワークアルゴリズム」，日本評論社

A smoothing order of link shadows

奈良教育大学大学院 教育学研究科
修士課程 教科教育専攻
数学教育専修 花木研究室
133309 本村 悠

修士論文概要

結び目とは三次元空間内にある閉曲線のことをいい、結び目がいくつかあるとき、その集まりを絡み目という. 絡み目の影とは絡み目を平面に自然に射影したときの像であり、絡み目の影の多重点は横断的な二重点のみである. ダイアグラムとは絡み目の影の二重点に上下の情報を与えて得られる平面上の図のことである. このとき、このダイアグラムは絡み目の影から得られたダイアグラムという. 上下の情報がない二重点を前交点、上下の情報のある二重点を交点という. 絡み目の影には前交点しかなく、反対にダイアグラムには交点しかない.

結び目理論の研究で、絡み目の影から元の絡み目の特徴を捉える研究がある. 絡み目の影のいくつかの前交点に上下の情報を与えることで、元の絡み目がほどけているのか、絡まっているのかを判断することができる. またそのときの交点数の最小値について考察している. [3]

本研究はこのような研究を背景に、絡み目の影の前交点に上下の情報を与えることに加え、スムージングという操作を施して、でてくる絡み目について考察することを目的としている.

先行研究では、絡み目の交点を交差交換、もしくはスムージングを施して得られるダイアグラムを考察し、素な交代絡み目に半順序となる関係がつくことを示している. また結び目の影の前交点に上下の情報を与えて得られるダイアグラムを考察し、絡み目の影に前順序となる関係がつくことを示している. 本論文ではこれらの先行研究を参考に、絡み目の影に前順序の関係となる関係がつくことを示している.

1 研究動機

結び目理論を学んでいく中で、結び目・絡み目の影を対象とした研究 [3][4] を知った. その研究は結び目・絡み目の影から元の絡み目の特徴を捉える研究であり、DNA 結び目に応用できるのではないかと考えられている. 筆者はこの研究から結び目・絡み目の影を対象とした研究に興味を持ち、研究を行いたいと考えた. そして先行研究から絡み目の影に順序をつけることを考えた.

2 結び目・絡み目について

結び目 (knot) とは、空間 $\mathbb{R}^3$ 内にある閉曲線 (多辺形) のことをいう. また空間 $\mathbb{R}^3$ 内にある、互いに共有点を持たない μ 個の結び目 $K_1, K_2, \cdots, K_\mu$ からなる図形

$$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\mu$$

を絡み目 (link) という. また各 $K_1, K_2, \cdots, K_\mu$ をその成分という. 一般に、結び目は 1 成分の絡み目と考える.

自然な射影 p を

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

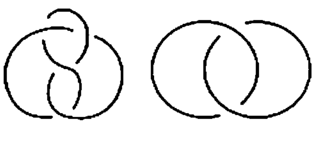


図 1: 結び目（左）と絡み目（右）

と定めると、p が結び目 L の射影であるとは、$p|L$ の多重点が有限個の横断的な 2 重点のみのときをいう.このとき、この像を絡み目の影(link shadow) という. ダイアグラム (diagram) とは、絡み目の影の全ての 2 重点に、上下の情報を与えたもののことをいう. ダイアグラム D は絡み目 L を一意的に表し、D を L のダイアグラムという. 上下の情報のない二重点を前交点 (precrossing) といい、前交点に上下の情報を与えたものを交点 (crossing) という. 絡み目の影は前交点しかもたず、ダイアグラムは交点しかもたない.

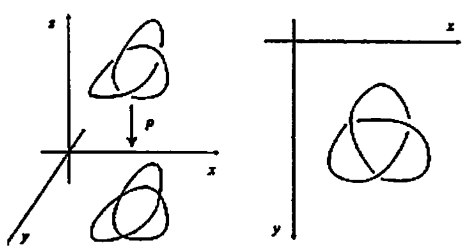


図 2: 絡み目の影（左）とダイアグラム（右）

交差交換 (crossing change) とはダイアグラムにおいて、交点の上下の情報を入れ替えることをいう.

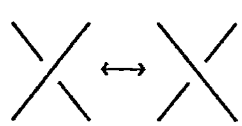


図 3: 交差交換

2 つの絡み目が同じ絡み目であるとは、片方の絡み目を伸ばしたり縮めたりする変形を行って、他方に重ね合わせることができるときと考えるのが自然である. そこでその変形を次のように定める. 絡み目 L_1 において、uv を L_1 のある成分の辺の一部とする. Δuvw を $\mathbb{R}^3$ 内の三角形とし、$\Delta uvw \cup L_1 = uv$ とする. ここで L の辺 uv を Δuvw の他の 2 つの辺 vw、wu に置き換えることによって新たな絡み目 L_2 を得ることができる. このとき L_2 は L_1 から Δ 移動 (Δ- move) で得られたという. また逆に、L_2 上に弧 uw、wv をとり、Δuvw の残りの弧 uv と置き換えて新たな絡み目 L_1 を得ることができる. このとき L_1 は L_2 から Δ 移動 (Δ- move) で得られたという.

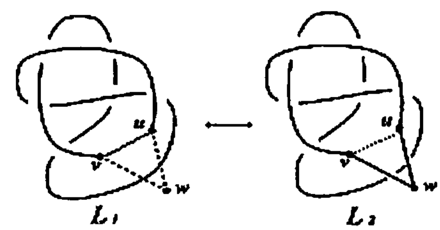


図 4: Δ 移動

次に 2 つの絡み目が同じであることを定義する. 空間内の写像

$$r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

を、平面 $\mathbb{R}^2$ に関する鏡映 (reflection) という. 絡み目 L の鏡映を L^* と表す. 絡み目 L と L' に対し、結び目の有限列

$$L = L_0, L_1, \cdots, L_n = L'$$

が存在して各 L_i が $L_{i-1} (i = 1, 2, \cdots, n)$ から Δ 移動で得られるか、$L_i = L^*_{i-1}$ のとき、L と L' は同型であるといい、$L \cong L'$ と表す. 絡み目の集合において同型という関係は同値関係であり、各同値類を絡み目型 (link type) という. 絡み目 L がほどけている (自明である) とは、次のように定義される. 絡み目 L が自明 (trivial) であるとは、

L と同型 となる平面上の絡み目 L' が存在するときをいう.

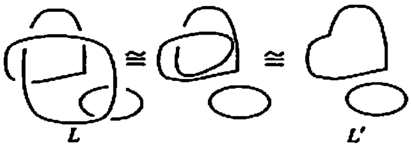


図 5: 自明な絡み目

$L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ を絡み目とし、$L = \tilde{K}_1 \cup \cdots \cup \tilde{K}_\mu$ を絡み目 L のダイアグラムとする. ダイアグラムの各成分 $\tilde{K}_i$ 上を一定の向きに辿って 1 周するとき、$\tilde{L}$ の上を通る交点と下を通る交点を交互に通過するならば、$\tilde{L}$ は交代 (alternating) であるという. 交代なダイアグラムを持つ代表元 L が存在するとき、その絡み目型 $[L]$ は交代 (alternating) であるという.

図 6: 交代である絡み目

図7のように、ある絡み目 L に対して 2 点のみで交わるような球面が存在するときを考える. その 2 点において結び目を切断し、球面の内側と外側のそれぞれで新しい弧を用いて切断した部分をつなげると、新たな絡み目 L_1 と L_2 を得ることができる. このとき L は球面によって L_1 と L_2 に分解 (decompose) されたという. 絡み目 L が素 (prime) であるとは、L が自明な絡み目ではなく、L にどんな分解を与えても一方が必ず自明な結び目となる場合である. また素でない絡み目を合成絡み目 (composite link) という.

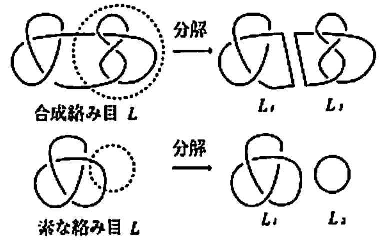


図 7: 分解と合成絡み目、素な絡み目

3　先行研究

先行研究 [8] では結び目と絡み目の「複雑さの度合い」を測る基準として、結び目と絡み目に順序が付けられることを示し、その複雑さを比較した. また [9] では結び目の影の複雑さを比較している.

3.1　結び目と絡み目の順序

Endo、Itoh、Taniyama は [8] で、成分数の異なる絡み目の集合に前順序が付くことを述べている. L_1 と L_2 を絡み目型とする.L_1 の全てのダイアグラムが、いくつかの交点に図 8 の変形を施すことによって、L_2 のダイアグラムに変形できるとき、L_1 は L_2 の s-メジャー (s-major) であるといい、$L_1 \succeq L_2$ と表す. また逆に L_2 は L_1 の s-マイナー (s-minor) であるといい、$L_2 \preceq L_1$ と表す. この関係をスムージング順序 (smoothing order) とする.

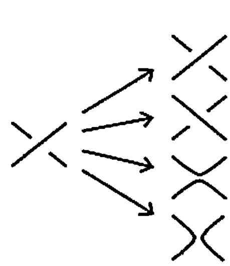


図 8: ダイアグラムの交点の変形

絡み目型の集合 $\mathcal{L}_\mu$ 上でスムージング順序は前順序 (pre-oeder) である．一般的には反対称律は成り立たないが、絡み目型の集合 L を素な交代絡み目全体に制限すると半対称律は成り立ち、半順序集合となる．

交点数が 6 以下の素な交代絡み目のハッセ図は以下のようになっている．

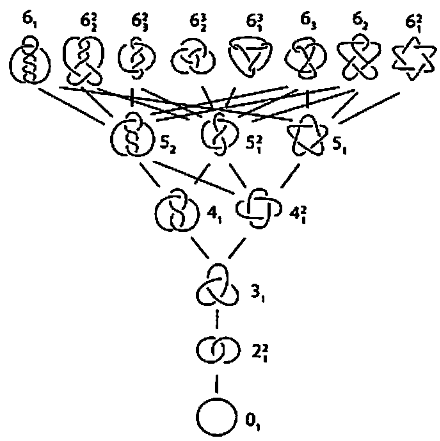
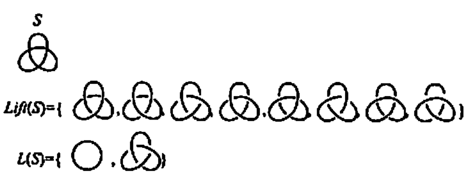


図 9: 交点が 6 個以下の絡み目のハッセ図

3.2 結び目の影の順序

Iwata は結び目の影の集合に順序をつけることを考え、論文 [9] にまとめている．結び目の影 S から得られるダイアグラムの集合を $Lift(S)$、$Lift(S)$ の集合を同型で割った集合を $L(S)$ とする．

下図の結び目の影を S とする．



S は前交点の個数が 3 個なので、S から得られるダイアグラムは $2^3 = 8$ 個である．よって $Lift(S)$ の要素は 8 個あり、そのうち 6 個は自明な結び目と同型で、2 個は三葉結び目と呼ばれる結び目と同型である．よって $L(S)$ の要素は 2 個になる．

結び目の影 S_1、S_2 に対し、S_1 が S_2 のマイナー (minor) であるとは、$L(S_1)$ が $L(S_2)$ の部分集合となっている場合をいい $S_1 \ll S_2$ と表す．そして結び目の影の集合において、関係 $\ll$ は前順序 (pre-order) である．これらの定義を元に、[9] でのハッセ図をフライプという操作で割って得られるハッセ図は以下である．

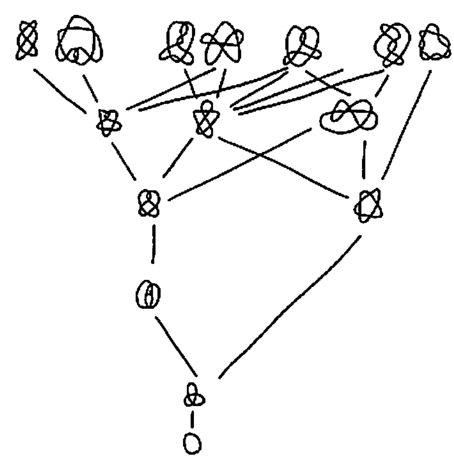


図 10: 前交点が 7 個以下の結び目の影のハッセ図

4 絡み目の影のスムージング順

先行研究を参考に、絡み目の影においても関係がつくことを考え、考察を行った。はじめに絡み目の影が前順序となる関係を定める．

絡み目の影の前交点に上下の情報を与えるか 、スムージングを施して得られる絡み目の集合を考える．

絡み目の影 S の前交点の個数が n 個のとき 、得られる絡み目は 4^n 個となる．その集合を同型な絡み目で割ったときの集合を $\mathcal{L}_S$ とする．図 12 の絡み目の影 S は前交点の個数が 2 個なので、4^2=16

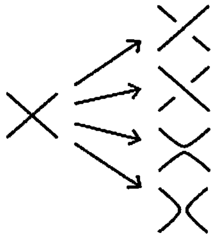


図 11: 前交点の操作

個の絡み目が得られる．その絡み目を同型な絡み目で分類すると、$\mathcal{L}_S$ の要素は 3 個となる．

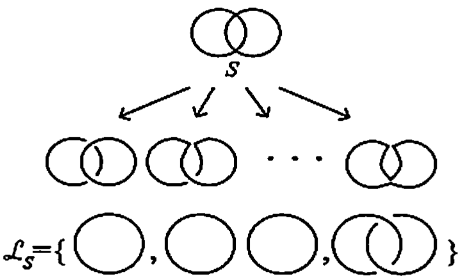


図 12: $\mathcal{L}_S$ の例

[5] の表を参考に、前交点が 5 個以下の絡み目の影と前交点が 6 個の結び目の影について、$\mathcal{L}_S$ をまとめた．その図は最後に示す．

絡み目の影の関係を次のように定める．

絡み目の影 S、S' とする．絡み目の影 S、S' に対し、S が S' の s-マイナー (s-minor) であるとは、$L(S)$ が $L(S')$ の部分集合となっている場合をいい、$S \leqq S'$ と表す．そしてこの関係を絡み目の影のスムージング順序とする．絡み目の影のスムージング順序は、前順序 (preorder) になっている．図 13 に調べた絡み目の影のハッセ図を示す．

絡み目の影から図 11 の操作で得られる絡み目の考察を行った結果、次の定理が得られ証明を行った．

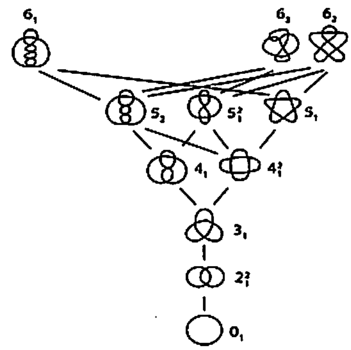


図 13: 絡み目の影のハッセ図

定理

S : 連結な絡み目の影

$O_n \in L(S)$: n 成分の自明な絡み目

$\Rightarrow O_1, O_2, \cdots O_{n-1} \in L(S)$

参考文献

[1] C.C. アダムス著、金信泰造訳、結び目の数学、培風館、1998.

[2] 鈴木晋一著、結び目理論入門、サイエンス社、1991.

[3] Ryo Hanaki. Pseudo Diagrams of Knots, Links and Spatial Graphs , Osaka Journal of Mathematics. 47(2010), no.3, 863-883.

[4] Ryo Hanaki. On scannable properties of the original knot from a knot shadows , preprint

[5] Allison Henrich, Rebecca Hoberg, Slavik Jablan, Lee Johnson, Elizabeth Minten,Ljiljana Radovic.The Theory of Pseudoknots ,Journal of Knot Theory and Its Applications, June 2013, Vol. 22, No. 7, 625-650.

[6] Kouki Taniyama. A Partial Order of Knots ,Tokyo J. Math. 12(1989) 205-229

[7] Kouki Taniyama. A Partial Order of Links ,Tokyo J. Math. 12(1989) 475-484

[8] Toshiki Endo, Tomoko Itoh, Kouki taniyama. A graph-theoretic approach to a partial order of knots and links ,Topology and its Applications, 157 (2010)1002-1010

[9] 岩田 典子、A Pre-Order of Plane Curve,Tsuda College (1999), In Japanese.

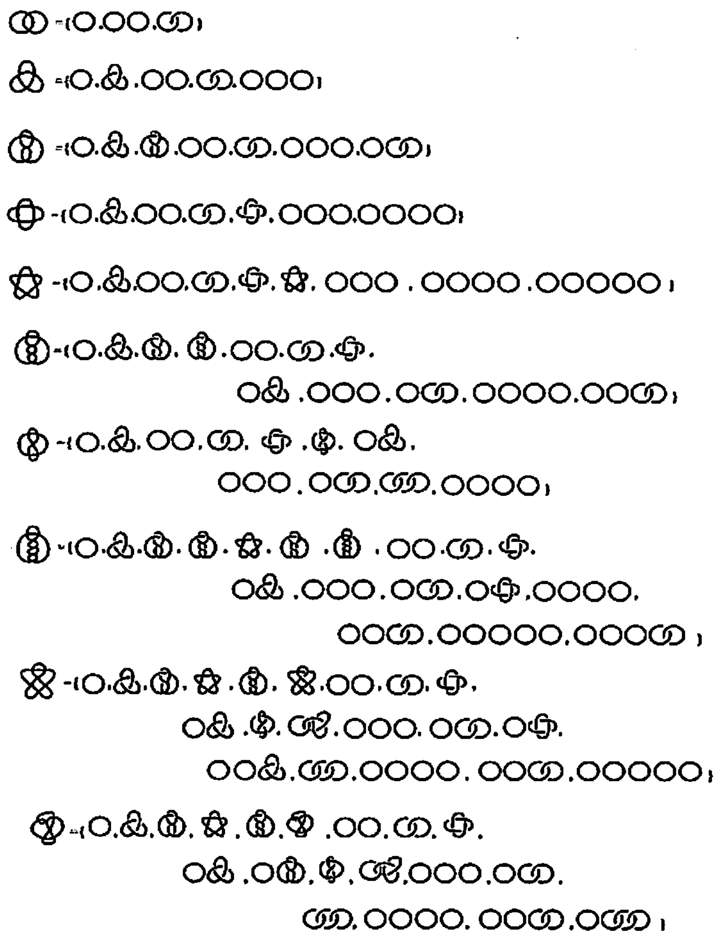


図 14: 絡み目の影から出てくる $\mathcal{L}_S$

編集後記

編集後記

数学教育専修　西山数馬

私たちはこの飛火野を、これからゼミ決定・教育実習・教員採用試験を控えている数学教育専修の学生に向けて編集させていただきました。この飛火野を、これからの進路決定などの一助としていただければ幸いです。また、昨年度に教育実習を終えられた先輩方の実習の記録を特集として組ませていただきました。

今回、我々が数学科の伝統である飛火野作成に編集者として関わることができたことに、数学科として光栄に思っています。これからも、この飛火野が数学科の伝統として引き継がれることと共に、更なる発展を願っています。

飛火野作成にあたり、ご協力いただいた数学教育専修、情報・数理専修の先生方、上回生の方々にこの場を借りて御礼申し上げます。お忙しい中、飛火野作成にご協力いただき誠にありがとうございました。

飛火野係

代表　阪井　築

井岡　俊雄

上田　悠右

西山　数馬

安部　隼太