物語論的アプローチによる授業実践学の創造
「数学がわからない」に応答するコミュニケーション活動

竹村景生
（奈良教育大学附属中学校）

Creation of teaching practice by narrative approach
Communication activities to respond to the " I do not know mathematics."

Kageki TAKEMURA
（Junior high school attached to Nara University of Education）

要旨：数学教育において、学習場面でのコミュニケーション活動における認知面に関する研究は、昨今注目されるようになった。それは、新学習指導要領で取り上げられたことにも認められる。しかし、その研究は子どもたちが「わかる」という側面に焦点化され、どのように数学を「理解し」「着想する」のか、またそこに現れた「問題解決のプロセス」の解明や、その学びの協働性に注目した内容であったといえる。本研究は、「わかる」ことの対極にある「わからない」に注目する。「わからない」を、自分という存在との関係性が見いだせない状態と捉え、その解消のために子どもたちが数学を「文化」として自らに「価値あるもの」として引き寄せ「語る」ことを通して、暫定的に受容していくプロセスを、数学レポートや読書課題にあらわれた子どもたちのナラティブとそのナラティブの変容に読み取っていく。そこから、「わからない」ことの自己認識が、子どもたちの数学物語を形成していくことを、解明していく。

キーワード：数学教育　mathematical education、 物語　narrative、 状況的文脈　situation context
数学的コミュニケーション活動　mathematical communication activities
数学的活動　mathematical activities

1．はじめに

中学校学習指導要領数学編ではその教科の目標として、「数学的活動」が大きく取り上げられることになった。数学的活動とは、「基礎的・基本的な知識及び技能を確実に身に付けるとともに、数学的に考える力を高めたり、数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするために、重要な働きをするもの」と捉えられ、「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」とされている。特に中学校数学科において重視されているのは、「既習の数学を基にして数や図形の性質などを見いだし発展させる活動、日常生活や社会で数学を利用する活動、数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動である。」と記されている。江森は「数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動」を、「数学的コミュニケーション活動」と呼んでおり、本稿もその意味に倣っていく[1)]。（江森2002）

現在数学教育におけるコミュニケーション研究では江森と金本の研究が、学校現場での理論的支柱として参照されている。江森のコミュニケーション論の特徴は、「学習者の自然な思考に沿った授業」への提言であり、自然な思考がどのようなコミュニケーション過程を経て子どもの中に相互作用的に現れているのかを解明するものである。そこには学習者の「わからない」ことへの不協和な状態への認知的な解消の手立てと、そこから生まれてくるコミュニケーションプロセスが示されている。江森の数学的コミュニケーション活動は、学習者が「わからない」認知的な不協和な状態を情動的な動機づけと位置づけ、その「わからなさ」を自らに引き受けて解決し、数学的な認識を深めていく学習活動と言える。（江森2012）

他方で金本のコミュニケーション論は「数学というものは、コミュニケーションを通して生徒一人ひとりが自らの中に築き、また、共有していくものである」という、「学習共同体」の中で形成されていく「文化としての数学」（文化的行為）を特徴として持っている[2)]。また、「わかれば楽しい」視点に立った「内発的動機づけ」論に依拠した教師による「楽しい」教材

開発論や授業論は、子どもたちの「わからなさ・学習の困難を自ら乗り越えていこうとする自律的な学習者を育成することについては、十分に成功していない」と懐疑的である。その克服には、① 他者とのかかわり・学習共同体での自らの位置という視点、② 自己を見つめる眼という視点を持ちながら、交流のための能力としての数学学習の特徴を踏まえた数学的コミュニケーション能力の獲得と、他者の視点を得ることによって、自らの視点を高めていく実感を自ら得ることが大切であると金本は述べている。(金本1996)

金本はさらに、「問いの生成」について言及し、「教師と子供たちとのコミュニケーションの中でコンテクストを転換させることによって問いを生成させていこうとする教師の試みと、新しいコンテクストをつくっていこうとする子ども達の努力の様子」のように3者（教師と子どもたち）の関係性に注目する。（金本1998）この「問いの生成」については、江森のコミュニケーション論では、「他者とのコミュニケーションのよさは、反照的思考をもたらす表現が他者によって突然眼前にもたら」され、「個人の知識や経験に縛られない創発的な思考過程が、ある例示をきっかけとして、突然活性化される可能性も出てくる」と、その２者（わたしと教師、わたしとあなた）、または表現されたものと向かい合う１者（わたし）の関係として述べられている内容に通底するものがあるだろう。(江森2012)

本稿は、この数学的コミュニケーションで捉えられた「問いの生成」までの認知的なプロセスの知見を得て、「物語論」で論じられる「意味の生成」のプロセスに、学習者の数学が「わからない」という、学びとの乖離を、数学を学ぶ主体としての自己像の不在という存在論的な問題として捉えようと試みた。

そのために、江森のコミュニケーション論に依拠しつつ、金本の学びの共同体における協働学習による数学的活動によって「問いの生成」が産出されるコンテクストとして、文化史的な流れを授業に構想した。この授業のなかでの情動的な動機に付随してあらわれてくる学習者のナラティブと、その語り直しのナラティブに「意味の生成」の契機を見出していく。

２．子どもたちと数学学習の現状認識

数学教育、特に中学校の数学教育の現実はこの10年間どうなっていたのだろうか。「OECD生徒の学習到達度調査（2003年調査)」いわゆるPISA調査における日本の数学的リテラシーの調査結果に対して、マスコミはPISAショックと問題視し、大きく報道した。しかし、現場の教師の反応はある意味冷静であったといえる。それは週３時間制の数学授業の現実が、教科書の内容を薄め、かつスキルの時間を圧迫していることを現場教師は痛感していたためである。また、「双こぶラクダ」といわれるＭ字型の成績分布が教室の中にあらわれてきたのもこの頃からである。これは1997年くらいを境目に経済原理主義の政策が所得格差を生み出し、それは学力格差にも連動しているという指摘もある。(苅谷2001)

他方で、学力低下を克服するために、スキルの復権と受験学力の再興が叫ばれる、「学力論争」が展開されていった。だが、この10年を振り返ってみて、現場教師の努力・改善で生徒の授業内容の「わかる」は、「どちらかといえば、当てはまる」も含めれば、64％から71.7％へと向上している。しかし、「数学の勉強はたいせつであるか」「将来、社会に出たときに役立つか」への問いに対しては70％前後を推移し留まったままである。それは、「将来の夢」への期待値とも一致している。

私たちはこの調査項目に表れた「数学的リテラシー」の習熟度を読み取ることができるだろう[3)]。しかし、その一方で数学に取り組む子どもたちの「自己概念」の形成については読み取り難いものがある。これは、近年の学力検査や定期考査等で増えている「無答」の増加傾向と関係していると考えられる[4)]。無答というのは、問題が「わからない」＝「解けない」ということの表出ではあるが、解答欄に書かないという選択は「間違いたくない」、すなわち自分の解答に対して否定的な評価がなされることに対する「おそれ」の回避行動ともとれる。他方で、無答は問題への「無関心」、ここでは数学を学ぶ意味が見出せないという、「数学を学んでいるのは誰か？」という問いかけに対して、主語となる「自分（わたし)」が見出せない状態ともいえる。

このことに関連して、重松清と鷲田清一との対談『教育とはなんだ』の中での鷲田の次の言葉は、無答がなぜ増えてきたかについての示唆を与えてくれる。

受験勉強(特に数学の試験でよく言われることだが)では、問題が配られたら、まず「わかる問題」「わかるかもしれない問題」「わからない問題」に分けて、「わかる問題」から先にやるということです。「わからない問題」は捨ててしまう。でも人生は逆でしょう。わかっていることはもういいから、わからないことからやらなければいけない。ところが、受験勉強の方法が染みついてしまうと、「わからない問題」をあっさり捨ててしまうことになる。(重松2004)

受験方略の日常化により、単に問題が難しくて「わからない」というだけではなく、「わからない」ことそのものに無関心でいることに、疑問が生じなくなっている。また、金本が述べた「わかりやすい授業」の功罪も考える必要はあるだろう。「わからない」とは、問題解決のすべや知識を「知らない」「使えない」ことだけを言わない。「わからない」とは、その認知的

不協和の側面と「離れる」「かかわりを持たない」といった身体性を帯びた存在論的側面がある。つまり受験方略の数学学習による「自己概念」の獲得は、そこに参加するかしないかを強制し選択を迫ってくるし、知識基盤型社会を生きるリテラシーとして数学を学ぶこともまた、受験方略の獲得同様に将来役立つという価値観において先行投資型の数学学習である。

今日の数学の学力問題とは、スキルの低下も確かにあるだろうが、むしろ彼らの数学学習に対する自己概念が育っていないことにある。それは、「私」と「数学」の間に「何に驚いて」「何を知りたくて」「どう表現したらいいのか」と言った内発的な「問い」が育まれなかったことにあるのではないだろうか。数学的思考は、「問い」を数学的に記述し誰かに伝えるという数学的探求の文脈の上に育っていく。「いまここ」の「私」が、「数学」との間に「問い」によって探求の根を張ること。その「問い」は、授業中の素朴な「なぜ」から生まれてくるのではないか。数学を学ぶ意味を見出せないでいる自分の中の「疎外感」に対して、数学と自分をつなぐ「小さな物語」づくりが求められている。

３．物語論的アプローチの必要性

奈良県では毎年奈良県算数・数学研究会による学力診断テストが行われている。そこでの誤答分析において近年特徴的なことが起こっている。それは、無答が増えたことである。また、記述してあっても内容からは逸脱したでたらめな記述が増えたことである。

この数学科における無答やでたらめな記述を私たちはどのように受け止めていけばいいのだろうか。それは、出題された問題の内容やその単元がわかっていない、すなわち理解されてないからだというのは簡単なことである。だから、私たちは「わかりやすく」教えることに努めてきたのであり、そのために時に説明のために話し過ぎることになってしまったのである。つまり、「私は数学を習った。しかし、先生が何を言ってるのかわからないし、問題が解けない。嫌いだ。」という、意味を問う生徒からの声に対して、私たち教師は「論理科学的思考モード」（表１）でただただ「わからせよう」と対処してきたのである。

表１　論理科学的思考モードと物語的思考モードの比較（下山；心理臨床の基礎１　岩波書店）

	論理科学的思考モード	物語的思考モード
経験	具体化された構成物，出来事のクラス，分類・診断体系によって，個人的経験特殊性は排除される	個人的経験の特殊性に特権が与えられ，その生きられた経験の側面をつなぐことにより意味が生まれるとする
時間	自然界の一般法則や場所，時間を超えて真実とされる普遍的な事実の構成が目指されるため，時間の次元は排除される	ストーリーの成立には時間的経過に従って出来事が明らかになる過程が前提とされるので，時間性は決定的な次元となる
言語	不確定性と複雑さを減らすべく直接法に準拠する言語実践を行い，現実の物質化が試みられる．矛盾のない整合性がもととなり，多義的な意味は除外され，量的な記述と専門用語が好まれる	含蓄的世界を構成し，現実の可能性を広げ，多様な見方を準備し，読者がユニークな意味を生きられるように，仮定法に準拠する言語実践となる．多義性が採用され，日常語と詩的，絵画的描写が奨励される
個人の力	個人性を，非個人的な力，動因，衝動エネルギーなどに反応するだけの受け身的物とする	人をその人の世界の主人公または参加者とみなす．ストーリーの再語りは新しい語りとなり，人は他者とともに再著述に関与し，新しい関係を創る
観察者の位置	客観性の転化によって観察対象から観察者を排除する．観察者は被験者とは無縁で，観察による影響は免除されたものとなる	観察者と被験者はストーリーの共同制作者であり，そのなかで観察者は特権的な著作家の役割を引き受けている

この論理科学的思考モードを扱えることによって得られる解き方のわかりやすさは、生徒の「解けない」事実に照準し、「解ける」という操作や思考パターンを導き出すが、「数学を学んでいるのは誰か？」という「私」という主語が、数学を学ぶ意味には応えてはいないのである。そのことは中学校現場での数学の「補習」に端的に現れてくる。集まる生徒への教師側からの（それは生徒自身においても往々にして）数学への評価は、「数学嫌い」であったり、「苦手」な生徒として捉えられている。だから補習においては、とにかく「解ける」ようになることが大きく焦点化される。

１次方程式がわからないときには、文字式に遡ったり、正の数・負の数に取り組み直したりしている。さらに苦手な生徒には、小学校の四則まで遡る。それが極端な場合、高校まで続いていく。教科の系統性ということもあるが、このように要素に分解しながら苦手やわからなくなる原因を外科手術のように取り除いていく。その手だてによって数学が「解ける」「わかる」生徒が出て来ることは私たち現場教師の実感として確かにあるが、他方で「３年間同じような補習を繰り返す」なかで、生徒の「数学嫌いや数学離れがはたして解消されたのだろうか？」という疑問が教師には残る。それは、山口がいう「疾患」と「病い」に対する受け止め方や語られ方の差異に似たものがある[5)]。ここでは、いったい何が解決されて何が解決されていないのだろうか。

無答とは、単に「解けない」という状態ではなく、「解ける」の陰影としての「解けない」、「数学好き」に対する「数学嫌い」といった、授業が何に価値を置き、教室の同意を得ようとしているかによって「自己疎外」が生じている状態と考えられる。つまり、私の中に「数学を私が学ぶことに、意味がつながってこない。」という表出であり、身体レベルの「嫌い」や「離れる」という状態と捉えられる。それは、存在としての「数学を学ぶ自分」の価値を「わたし」自身の中に見出せないでいる疎外感と言える。すなわち、先述したように、学びが文化の根っ子にとどいていないということである。

たとえば、π について学んだとする。π を円の面積や円周を求めたりするときには使える。その場面で使えるという意味ではそれで十分なのだが、だが「私は π とはいったいどのようなものなのかはわからない」というままである。「私」の学びの中に π の物語が形成されないために π への無関心が生じてしまう

のではないだろうか。学年を経て時々問題演習で登場する π を上手に処理することだけが π の印象として私たちの意識に残されているだけである。

『不思議な数 π の伝記』[6] の訳者である松浦は「訳者あとがき」のなかで、「私は π を習った。しかし、数学は嫌いだ。」とならないための提案が述べられている。松浦は、「π というひとつの数をめぐって、様々な感覚」、たとえば「π を支える数や図形について」の感覚を呼びさまし、数学者になるわけではない人々のための数学は、「日常世界のリアルなイメージが伴うものを取り上げながら、それらの背後に π という一本の筋が通っていることを感じて、あらためて、楽しんでもらいたい。」と述べている。

数学への「無関心」と「数学は嫌いだ」いう個人の「感覚」の表出に対する緩和問題には、様々なアプローチが試みられている。本稿では、語りたくなるような学びの体験（「数学」と「私」が文化を媒介にして語り始める）を通して、数学との間に疎外されていた自己に気付くことによって、自らの今までの学びを語りなおし、その体験を経験として数学的な表現を交えて「物語」に変えていくことが一つの解決策になるのではないかと考えている。対話や語りを意識的に取り入れ、問いの生成を見出す、物語論的な授業へのアプローチ法、授業の実践学が求められる理由がそこにある。

４．「対話」や「語り」がひらかれる状況的文脈

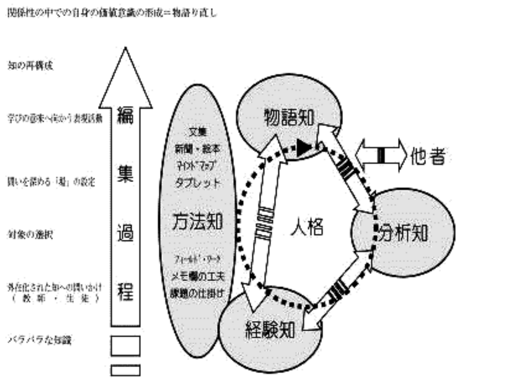
それでは、内なる他者性に気付き補完し、意味に向かう対話や語りが生まれる場面とはどのような場面であろうか。吉田（1999）が言う、「数学の学習における話し合いや討議は必然的に物語性を現出させ、そこに数学教育を考察する新たな視点が提示されるのではないかということである。数学を物語としてとらえることは,確かにその教授学習において必然的に『語る』という行為を現出せしめるだろうし、それが教える者と教えられる者との間にコミュニケーションを生み出し、それによって数学理解に質的変化がもたらされ、学習者の中にある数学がその学習者の成長とともに育っていくという、いわば自己のアイデンティティの確立に寄与することが期待されよう。」に注目して、このような学びの場として著者が授業に設定した題材なり場面は次のものである。

Ⅰ）範例的な問題　［一斉授業、小グループ］
　ex；「鶴亀算と連立方程式」（２年）
Ⅱ）誤答の教材化　［一斉授業］
　ex；授業中や試験の解答に出てきた内容で随時
Ⅲ）実験・実習などの体験　［班］
　ex；「ガリレイに挑戦」（３年）：『関数』
　　「１枚の封筒から」（１年）：『空間図形』
Ⅳ）読書活動を主体とした課題制作
　［一斉授業、小集団（異学年交流型）、個人作品］
　ex；「ブックトーク　数学紹介」
　　「なぜ、数学を学ぶか？」

Ⅰについては、奈良教育大学附属中学校研究集録第33号で取り上げたが、これは、「生徒が意味を理解し、考えることの楽しさを経験する」ことを、教材に埋め込まれた問いから対話を通して明らかにし、そこで練られた問いが授業を構成していくという内容であった。私たちが普段使っている教科書は、その構成上もあって１時間－見開き約２ページの分量を基本に進められている。範例は、２ページ刻みの積み上げを一度単元全体に還元し、生徒自らが問題意識を持てる「問い」の仕掛けを設定するよう単元を再構成する。そのために、まず教師から出される「教材」や「問い」を吟味することである。そして、教えの文脈の中で時に教師はファシリテーター役（援助者と指揮者役）となることである。Ⅰ～Ⅳのような、対話や語りが生まれてくる授業設定や課題の仕掛けとその授業における協働の展開をここでは、状況的文脈とよぶことにする。それでは、このような状況的文脈において、教師はファシリテーターとしてどのような配慮が求められるのだろうか。

① 生徒の発言・対話（経験知）を（何が問題となっているかを）よく聴くこと。（必要に応じて補助、補正、導き）
② 対話が難渋する場面では議論の交通整理と、数学的表記へのよさ（分析知）を促すこと。
　　　［論理科学的思考モードの獲得］
③ 出された結論に対して、集団の討議のプロセスも含めて評価すること。　［自己内省］
④ 学んだ内容を数学の歴史・文化的な価値（物語知）につなげていくこと。
　　　［新しい世界の共同的創造］
⑤ 個々の生徒の意味との出会い（人格的成長）を見取ること。　［ホリスティックな学び］

図１　人格形成をめぐる４領域の関係と知の編集過程



が、知の編集過程の中で求められる。(図１参照)

状況的文脈においては、どのような生徒の対話がそこで行われ、意味に出会うのかが大切であって、班の形態にはあまりこだわらなかった。それが１対多であったり、隣同士であったり、クラスの何人かによるものであったりする。このような授業の場面では一般に、協働学習が設定されることが多いが、常に意識しなければならない授業形態とは捉えなかった。授業における協働もまた、学ばれるべきものであるから、意識的に小集団をまず組むこともあるが、ここでは、むしろ学びへの疎外感への気付きをゆるやかに促しながら「対話」を組織するプロセスとして協働学習の必要性を、個々に意識化させていきたいと考えた。

５．数学的コミュニケーション連鎖の実際

それでは、先に示した状況的文脈が表れた授業の記録、ここではⅡについて、ある日の授業を記録したものから考察していく。授業場面は、中間考査に出された次の問題による、生徒の誤答から設定された。

> Q；$\sqrt{2}+\sqrt{5}$はなぜ$\sqrt{7}$にならないのか？
> ２通りの方法で説明しなさい。

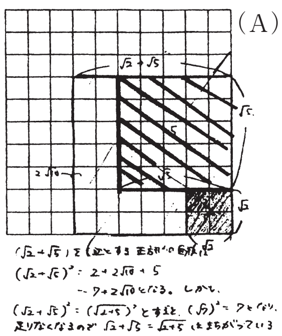
（１）方眼紙を活用して図形によって説明をしなさい。
（２）計算によって説明をしなさい。

ここでは図形による説明に絞って話を進めていく。

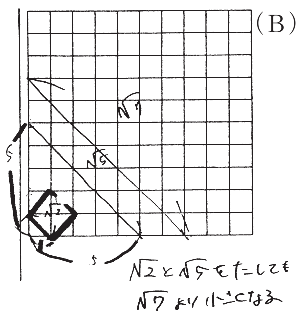
生徒たちの誤答の多くは、平方根の認識の誤りがほとんどであった。その代表例（誤答の８割強を占めている）を図２のように例示して、生徒たちの考え方を交流していった。図２は平方根の定義がまだ理解されていない段階である。

図２　代表的な誤答例
（上図；A，下図；Bとする）

（A）



（B）



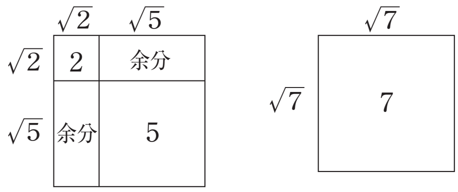
両図とも、$\sqrt{2}$を面積２の正方形の１辺として考えることから始めている。A図は論理科学的思考モードで考えようとしているが、面積図と無理数がつながっていないときに現れる例である。B図は大小のイメージはあるが、論理科学的思考モードが育っていないとよく現れる例である。そのため、生徒たちの対話の中で、教師は定義を確認し、「わからない」生徒を助けていく必要がある。

また、B図は以下の対話が展開されていく方向性を、論理科学的思考モードで指し示していける種子を胚胎しているのだということを、「苦手」とする生徒に教師は示唆する必要がある。そのことが、自らの学びの疎外感（「どうせ私は数学が苦手なんだから」という自己認識）に気付き、変化していく契機になると考えられる。つまり、対話の中で例えそれが誤った表記であっても自己表出の機会が、自らの「数学嫌い」の物語を書きかえていく。「意味は関係の中から生まれるものであり、個人の自己表出は、他者に補完されない限り意味を獲得されることはでき」ないのである[7]。

A図は、（方眼紙に書き入れなければ）イメージ図としては、すばらしい考え方である。

Ｔ　「これでいいのかな？何か気になるんだけど。」
Ｓ１「それでいいと思います。」（５人ほどの生徒が同意している）
Ｓ２「でも、ちょっとおおきさちがうよ。５って５でしょ？」
Ｓ３「面積５って２５マスもあるの？」
Ｓ４「方眼紙で面積５って、マス目５マス分だから20もおおきくなっているわ。」

図３　図２（A）の説明図



Ｓ５「これ、方眼紙の１マス１辺を$\sqrt{1}$とし、$\sqrt{1}\times 5=\sqrt{5}$としていないか？」
Ｓ３「えっ？　あっ、そうか！ルート１って１だよね！・・・」

> ◆電卓で近似値を計算して$\sqrt{5}$がおよそ2.23620679…と求めていたことが　$\sqrt{1}\times 5=5=\sqrt{5}=2.23620679$…となって、近似値とのつながりが認識できないでいる。場面の設定が変わると生徒は、その誤りに気付かなくなるようだ。間違っていた生徒たちは、最初の問題解決の場面での自分を振り返り、対話によって補完されながら、平方根の認識を修正し、平方根と自分との意味を編みなおしていく。江森の数学的コミュニケーションでいう反省的思考であり、しかしここでは「表す」レベルから「表現する」レベルへの過渡期の段階と言える。素朴な経験知からの語りである。これらの誤りは、電卓などの方法知の活用によって修正されていく。

T　「誰か、面積５をグラフ黒板にかいてくれませんか？　Ｓ５君。」

Ｓ５「面積５の正方形は方眼紙にこうかいて、面積２はこうかく。」
一同Ｓ５の説明に納得。（合意）

T　「じゃ、図形で説明するためにはこの正方形を活用すればいいんだね。この続きはどうなりますか？」

Ｓ６「前に２乗して２になる平方根を電卓使って出したから。この正方形の１辺がそれぞれ$\sqrt{2}$と$\sqrt{5}$になるんでしょ。」

Ｓ５「その長さをとって、横に並べて$\sqrt{7}$より大きかったらいい。」

Ｓ７「それだったら、別に正方形作らなくてもこうしたらいいのとちがう。」（その他数名支持）

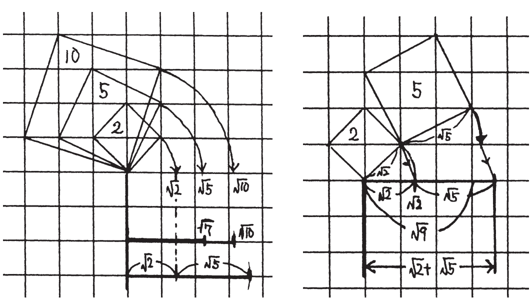
◆２つの平方根を直線の和として捉えればよいという意見が出された。注目したいことは、対話の中では、いろいろな解答へのアプローチが模索され、多様な考え方や解答があるということを共有することである。ここでの評価は、「こうであるべき」だという「正答」からのものではなく、個々の生徒が自ら見出した解答を、対話の文脈の中で肯定的に評価していくものだと考える。

そして、次のような解答が見出された。

T　「納得できましたか？」

Ｓ８「その説明わかるんだけど、私は$\sqrt{7}$を覚えてないから$\sqrt{7}$より大きいとか小さいとかがもうひとつ自信がないわ。」

図 4　Ｓ９さんの説明図



T　「という声があがっていますが？　この疑問に答えられるような説明の仕方はないですか？」

Ｓ９「数直線上に$\sqrt{2}+\sqrt{5}$をとったら３より長いでしょ。３といったら$\sqrt{9}$のこと。だから$\sqrt{7}$より大きくなるから、$\sqrt{2}+\sqrt{5}$は$\sqrt{7}$にはならないっていったらだめかな。」

◆Ｓ９の発言は、方眼のマス目をそのまま扱っている。これまで平方根の捉え方が曖昧であったクラスに、平方根の大小関係を改めて見直すきっかけとなったようだ。［試行錯誤］［反省的思考］

T　「Ｓ９さんが今云ったことを書いたら$\sqrt{2}+\sqrt{5}>3=\sqrt{9}>\sqrt{7}$ということですか。」（黒板にかく。）
教室に「おお！」と納得の声。隣同士で意味を確認しているペアもある。［情動的経験］

T　「なるほど！　$\sqrt{7}$にこだわらなくてもいいんだ！ということがわかってきたようだね。」

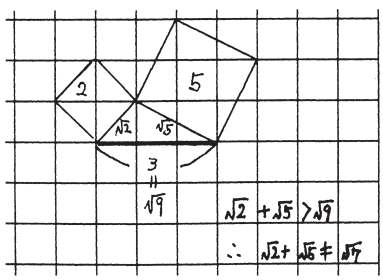
◆教師は、子どもたちから出た［反照的思考］から、［初源的な仮説の形成］［演繹命題の形成］を板書しながら誘導していく。

T　「他にはないですか？」

S10「だったら、この面積５の正方形を下におろしたらもっとわかりやすいんじゃないですか。」

S10さんによって図５のような図形による説明が示された。これには、一同が「なるほど！」と先の解答よりも強く感心した。

図 5　S 10さんの説明図



◆ここには、S10さんのＳ９さんの考え方を自分の中でモニターしながら、アイデアを練っていることが読みとれる。ファシリテーターとしての教師は、Ｓ９さんの発表を数学の言葉で翻訳することの大切さを、対話の中で生徒に意識化するよう提示している。「気付く」ということは、ほんのわずかな差なのかもしれない。次に、話し合いの前半戦では会話に入ってこなかったS10さんではあったが、その間様々な意見を参照しながら自分の考えに出会ったといえる。ここには、S10さんの考え続けることができる態度が伺える。クラスとしては、考えることの広がり・深まりが共感を呼んだことを読みとれるし、考えることの楽しさが共有されていくのが見てとれた。まずは積極的な発言者と対話のモデリングを示し、対話によって意味が構成されていく授業の醍醐味を体験させたい。そこでは、多様な考え方とともに間違いもまた授業を構成していくのだという考え方をルールとして示しておきたい。

すると、3人ほどの男子から「その形って三平方の定理や！」という声が挙がった。Tの方から彼らに、三平方の定理って何ですか？とすかさず問い返すと、彼らの1人が前に出てその説明を行った。

> ◆本校では、長期休暇前の特別補習で「数の悪魔」[8]などを使いながら、学年に囚われずに三平方の定理を扱っている背景がある。彼らの説明で、平方根と2次方程式と図形がどうやらつながっているんだというイメージは描けたかもしれない。これは、彼らにとって新たな数学の発見であると同時に、学びの協働といった状況的文脈から導かれた「問いの生成」の瞬間でもあると考えられる。また、彼ら自身が「その形って三平方の定理や！」と、三平方の定理のパターン化による適用が成功した例でもある。そして、これらの発見が一連の対話に参画する中で導かれ、ここでの情動が次の高次な探求へと学びを深めていくことになる。
>
> ［新しい世界の共同創造］

発表した者にとっては「数の悪魔」の読書体験は、この授業の中で経験として物語り直されるだろう。自らの気付きが、学んだ数学の歴史・文化的な水脈とつながっているのだという実感を、実践から得られたことは、学びの意味を考える上で大切なことである。自らの学びが、数学の文化に根ざしているのだという体験は、自らの学びの意味を強化していくと考える。

以上、誤答による授業展開の中に、学習者のコミュニケーションの連鎖を見出してきた。学習の中で、「三平方の定理」「2次方程式」「平方根」がばらばらな知識としてあったが、状況的な文脈の中で生成された問い（ここでは、「三平方の定理が問題の解決の新たな手立てになるのだろうか？」）がそれらを結びつけて、問題解決に至ったと考えられる。ただ、本授業の中でこのようなつながり、すなわち新たな問いが生成（創発）されるにいたったのは、単元毎に課している「自由課題」（レポートや数学新聞、数学絵本等）の制作という伏線があったことは特記しておく必要がある。つまり、問いの生成が必ずしも意味の生成に向かうという訳ではない。ここに、物語としての学びの有意味性、すなわち意味の生成を自己に見出すためには、学習者の情動がさらに向かう先、「文化的数学観」（伊達2012）に根ざした授業の展開（探究）を構想する必要がある。

6．物語と創造性

数学をするということは、考えることであり、考えること自体に楽しみを持つことである。しかし、実際には体験しつつも「それが数学なんだよ」と意識されることは少ない。そのためには、単なる体験から「考えるとはどういうことかが理解されるとはこういうことなのか」といった経験へと高める必要がある。この体験を経験に高める場が、状況的文脈の中にあると考える。すなわちメタ認知的活動を様々な角度から本人に、またはクラスという学習集団に意識化（共有化）させたり、または形成していくためには、授業が状況的文脈に位置づけられ、そこでの問いや対話によって構成されることが有効であると考える。

この状況的文脈でデザインされた実践のよさは、生徒が学ぶ意味と出会えることである。数学科での学ぶ意味とは、自分が学習した内容が自分の既習の知識体系の中に位置づくことである。そのことが、すでに持っている知識体系を広げ、深めることによって、新たな自分を見出すことになる。分かることの自信や考えることの楽しみに出会うことが、新たな自分の発見につながる。そして、自分で「私の数学の物語」を論理科学モードでデザインし、語れることである。

「わかること」や「考えること」が、私たちが生きている社会に根を張りつながっていくように、数学の文化や歴史にも「今考えている問いの意味」を位置づけ直したい。このような、自分への意味を形成する学びも、数学科においては重要であると考える。ここでの問題解決は、学び手がなかまからの共感と評価を得ることによって、再び学び手自身をエンパワーするものとして戻ってくる。そして、よき学び手としての「信念（態度）」を形成し、計算や証明などの「技能（スキル）」への信頼を促すのである。このように、意味が分かるということは、繰り返す中で変わっていくものである。また獲得された技能は、別の問題解決の場面で使えば使うほど、意味は深まり、広がりをもってくるだろう。

数学科における創造的な活動の背景には、興味・関心のある対象への深い観察と直観、その対象への数学的なパターン認識がある。また、状況的文脈の中で伝えたい相手との対話によって産出されるアイデア、気付きというものが、その活動の持続と問いに向かう情動を支えている。ここでいう状況的文脈の役割とは、異なった考え方をもった他者との「ずれ」と向かい合い（それにはある程度の受苦的な体験も必要となるだろう）、自らの価値観と出会い直し、自らが変わっていく関わり合いの学び場と言える。この創造的な学びが、数学の文化を自らの学びの文脈の中に「問い」として形成し、物語っていける文化的実践につながっていくプロセスとして捉えておきたい。

7．数学のリアリティに出会い意味を構成する

ここでは4で示したⅣの取り組み、レポート「なぜ平方根を学ぶのか」について紹介する。これは、「平

方根の学習と近似値の勉強がもうひとつつながりがわからない。」という生徒の疑問（新たに生まれた問い）から発展させている。

授業では、「平方根と近似値の考え方」についてあまり深く追究しなかったため、「なぜこの単元で近似値を勉強するのか？」という疑問の声が、提出された授業用ノートの感想に表れていた。

「平方根の中で、まだ納得できないのが『平方根の近似値』です。$\sqrt{2}$なら、$1.4<x<1.5$というのがすぐ出てくるのですが、$\sqrt{7}$とかになると一つずつ当てはめていくようなこんなやり方では時間がかかりすぎるのではないかなと思いました。」
「応用問題をやってたら　‘$\sqrt{7}$の小数部分をａとして　a^2-3a+2　の式の値を求めなさい。’というのが出てくるけど、計算の仕方として何となく分かるけど、でもそれがなんやというのか。それをする意味が見えてこない。」
「分母を有理化するというのは、分母が無限小数だと都合悪いんじゃないか。つまり、近似値を計算するにはそのままよりかは平方根を分子にもっていく方が扱いやすいからですか？」

このような、平方根の本質的な意味を問う疑問に対しては教科書では十分ではないため、数学準備室や図書館にある「数学図書」を活用した自由課題を単元末に課している。

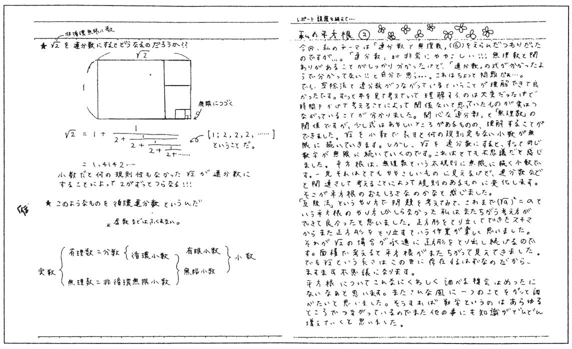
上記のようなテーマを設定したのは、彼らの「問い」が、電卓がなかった頃の平方根の求め方（正体）への探究へと問いを深めていく動機につながっていくと同時に、その文化を追体験してもらいたいという願いがあったからである[9)]。数学は歴史を内包した、人がつくりだし、積み上げてきた文化だということを、「人間の文化遺産」で終わらせるのではなく、「私の物語」に組み入れてほしいし、発表をする機会を設けて「私たちの物語」として教室での文化実践として紡ぎだしたい。それは、「教科書（授業）で習った平方根の知識」からの「物語り直し」を生み出すことになった。

ここでは、「連分数」について調べて発表してくれた生徒のレポート課題（図６）から考察したい。なお、「レポート発表会」の授業は、夏休み前の授業の１時間分を活用した。

Ｋさんのレポートは、連分数をユークリッドの互除法から進めて考察している。（他の生徒に『開平法』に挑戦する生徒もいた）他方で２次方程式を習ったこともあって、黄金分割との類似性を持ち出してきて検討を加えている。発表では、正方形で分割していくというイメージは何となく伝わったようだが、式との対応がなかなか呑み込みにくいようであった。

このようなアプローチでは、教師のファシリテーターとしての比重が高くなる。生徒のレポートは基本的に調べ学習の域にあるわけで、「なぜ？」はあっても「どうして？」には理解が及ばない場面が多い。だからこそ、ファシリテーター役の教師が教室の関心をＫさんの論理科学的思考モードによる探究活動へと周辺参加させていく語りの実践が要求されるのである。ここではＫさんのレポートをテキストにしながら、彼女の説明に寄り添い対話していく形で解説を加えていった。そして、話しの中で出てきた疑問やつぶやきを拾い上げて共に考えていく。みんなが、Ｋさんのテキストを「理解のテキストに仕立て上げる」実践に参加していこうという仕掛けでもある。

図６　Ｋさんの連分数レポート



Ｋさんのレポート発表では、有理数の連分数化は比較的容易に説明を切り抜けたのではあるが$\sqrt{2}$の連分数化については、分母の有理化を活用していくタイミングとコツを説明するのは相当困難をともなった。

そのため、Ｋさんを対話者として、教室のみんなと確認しながら分母の有理化をしながらひっくり返していく過程を体験していった。$\sqrt{2}$の連分数から近似値を計算して求める場面では、みんなと共に計算をしていく中で、計算機がない時代に人類の英知がこれほどすごいものなのか！という嘆息が漏れた。それは、平方根の歴史と出会えた瞬間であり、近似値と平方根がつながった瞬間でもあった。電卓で1.414以下の次の数をキーボードを打ちながら逐一探していくのも方法である。しかし、連分数というものを学んでみることは、電卓による方法以上に意味が形成されていく契機となる。分数をできるだけ回避して教えていくことも、手段としての数学的知識を伝達していくためには時には選択されることもあるだろう。しかし、難しいからと避けて通ってしまっている過程で、このような数学のリアリティを発見する数学文化の妖野を切り捨ててしまってはいないかと、ファシリテーターとしての教師は自らも反省的に、専門性の語り手として文化的実践の行為者として生徒の前に立たなければならないと考える。なぜなら、現在のカリキュラムでは、高校での生徒たちの数学の履修状況では生涯にわたってこのような数学文化に周辺参加していく可能性は極めて低いからである。Ｋさんは、自分の数学物語（ナラティ

ブ）を歴史・文化に位置づけ語ることによって、論理科学的思考モード（数学的表現活動）のよさを再認識したと言えないだろうか。

この節の最後に２人の「無理数」についてのレポートを紹介する。このレポートの特徴は、ここ数年来数学科で続けている授業「先輩が後輩に語る数学；『なぜ数学を学ぶのか？』」として、１年生に「語る」ことを想定したところにある。２人のレポート制作に共通していることは、

（ア）教科書から学んだ「無理数とは何か？」について何かしっくりいかないものが残っている。（問い）
（イ）自分に納得させる形で記述が進む。（意味への探究）
（ウ）誰かに伝える形での記述に変化していく。(対話)
（エ）学ぶことの楽しさに出会う。（さらなる探求へ向かう情動）
（オ）トータルとして作品化されている。　　　（制作）

である。それでは、１年生に「無理数を語る」ことは、２人にとってどのような意味があるのだろうか。

Ｓさんは、レポート「数の世界　～実数から、有理数・無理数と循環小数までを見てみる・・・～」を、堀場芳数著『無理数の不思議』を活用して数の世界を見渡そうとしている。しかし、Ｓさんの「レポートを終えて」では、「無理数って何？？」というタイトルで次のような文章で締めくくられている。

> まだ私の中には、実数や無理数について？？が残っています。本で調べてもよくわからなくて、自分なりにこういうことかな！？と、考えたりもしましたがまだすっきりしていません。本には「集合」ということばが出てきたり、有限・無限などよくわかりませんでした。ア）私がこのレポートを書いて、１つ思ったこと。それは“数”って不思議だなぁと思いました。同時に面白いなと思いました。有理数のように分数にすることが出来て、すっきりしている数もあれば、永遠にずっと続くような無理数があることです。特に循環小数は、おもしろい。同じ順序に並んでいて、なんでこんなにうまくできているのだろうと思いました。今まで1,2,3…のような数しか知らなかった私が、マイナスの数があらわれ、そして無理数のような不思議な数に出会う。数というのは何と範囲が広いんだろうと思いました。昔なら特に、1,2,3…などの数字のみで普通に生活できるだろうに、なぜこんな発見をするようなきっかけがあったのだろう？いろんな“？”疑問が出てきます。調べたら調べただけ疑問が出てくる。それが調べることの面白さだと思います。また、この疑問を明らかにし、調べたいと思います。

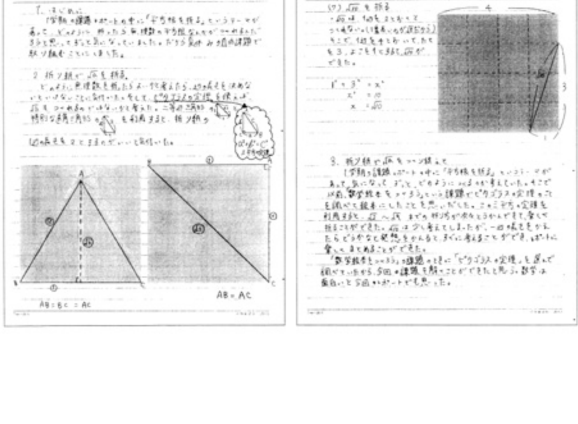
そして、Ｓさんは続編のレポート「数の発展と無理数を解明した人物」を提出した。その最後にＳさんは次のように感想を書いて結んでいる。

> ・・・数の発展の順序があって、今は普通に数を使って生活している。昔の人はよりよい生活・暮らしを目指して数に工夫を加えていったことが分かった。・・・無理数の解明に挑戦した人たちはすごいと思う。とても簡単なことではないし、知識もたくさん必要だと思う。親友同士で難題を解決していくのはすごいなぁ。私が続編のレポートで感じたことは「人間ってすごい！」です。数も勝手に創られたものではないし、単位も人間がこの方が使いやすいと思わないとつくられません。無理数も誰かが証明しないとみんな信用しません。人間がすべてを考え生み出すのです。本当にすごい生き物だと思いました。イ）

Ｓさんにおいて、この２つのレポート作成の間に何が起こったのだろうか？Ｓさんは、当初下線ア）にも示したように、無理数の不思議を論理科学的思考モードで意味を埋めようと試みるのである。しかし、それは調べれば調べただけ疑問が出てきて、もちろん調べることの面白さには出会ったりはしたけれども、無理数を私が学ぶ意味には出会えないでいる。ところが下線イ）では、数学者の「数学の営み」(歴史や文化的な背景も含めて）が、Ｓさんの学びの文脈と符合したようだ。Ｓさんは無理数の共同探求者として再著述に関与し、無理数、そして数学との新しい関係を創ろうとしている。(自己変容の物語）つまり、「なぜ無理数が生まれてきたのか？」が、数学者を介して物語的思考モードによって意味づけられていく。

次に（イ）から（ウ）（エ）への移行について、Ｙさんのレポートを紹介する。Ｙさんは、レポートのはじめに、「１学期の課題レポートの中に『平方根を折る』というテーマがあって、どのように折ったら無理数の平方根なんかがつくれるんだろうと思ってずっと気になっていました。」と書き出している。(図７）

図７　Ｙさんの折り紙を使ったレポート



Ｙさんは、「折り紙で$\sqrt{a}$を作り終えて」で、以下のような感想を述べている。

・・・以前「数学絵本をつくろう」という課題でピタゴラスの定理のことを調べて絵本にしたことを思い出した。この三平方の定理を利用すると、$\sqrt{2}$～$\sqrt{9}$までの折り方が浮かんできて、楽しく折ることが出来た。$\sqrt{10}$は少し考えましたが、一辺の長さを変えたらどうかなと発想を変えると、すぐに考えることができ、レポートに楽しくまとめることが出来た。数学は面白いと今回のレポートでも思った。

そして、このレポートを１年生に紹介しようと図７のように、紙面を折り紙を使ったシンプルな形式にとどめ、対話を通して１年生を数学の世界に誘っていく工夫を企てていく。Ｙさんの１年生へのメッセージは次のような内容であった。

「・・・私も３年間いろんな課題に取り組んで、自分で課題を見つけ、調べたり、考えたり、制作したりして、数学の面白さをしることが出来ました。数学は物事を考え、楽しみ、学んだことを役立てながら、自分で知っていくものだと思います。・・・」

このＹさんのメッセージ（物語り直し）もまた、１年生という対話する相手があってこそ、自らの振り返りのなかで見出されたものである。その意味で、このＹさんの作品は１年生との対話までを含めた共同制作として完成されたといえる。と同時に、自分の中の数学が育ってきた学びの時間的経過を振り返り意味づけるために、本稿で紹介したような、数学への多様な見方や考え方を育む文化実践（制作）は、数学を物語り、物語り直していく仕掛けとして有効であると考える。

８．おわりに

数学の問題解決においては、ある程度の入り口までは自由な発想のもとでの対話は許容されるが、式化し論理的説明が求められる段になると、彼らの数学への習熟度の差が沈黙やあきらめという形でグループ内を支配してくる。小集団の組み方によっては解決に至る会話に全く届かない場面も生じ、いきおい教師の介入で終始する場面もあったりする。対話は問題解決のためだけではなく、数学の文化とのつながりに気付いたり、個人的な数学的経験の特殊性に特権を与えたりと、多義的な場面を装う。茂木（2005）が、「自己の確立は対話をモデリングすることによって確立される。」というように、教師は様々な「対話のモデリング」が生まれる状況的文脈を用意する必要がある。

本稿では「対話」や「語り」が教室でどのような役割をはたし、学び手の「物語」が数学にどのような意味を形成していくのかを数学的コミュニケーション過程とそこにあらわれてきた学習者の情動より考察してきた。また、それは「制作」という文化的実践を介して物語られ、物語り直されることで、意味が生成されてくる自己の変容の場面が授業に見出されてくることを述べてきた。課題としては、自己評価の場面を主に「感想文」から得ているが、学び手の「物語」の何が数学的か、そこにどのような数学（論理科学的思考モード；物語知）が現れているのか、という明確な評価規準は示されないで終わった。また、文化的実践としての制作課題そのもの（の難しさ）が、数学を苦手とする学習者または対話過程に発言が見出しえなかった学習者の「わからない」に必ずしも応答できているかは課題として残された。だが、苦手な生徒もまた「聴く」ことを通して金本の言う学習の共同体に参画してきた経験として残ることは、繰り返し実践される物語論的アプローチによる授業実践においては、学習者の次なる契機として有効であると考える。

註

１）江森（2002）は数学的コミュニケーションにおける創発連鎖について次のように示している。［試行錯誤→反省的思考→情動的体験→反照的思考→新しいアイデアの創発］

２）「数学はわれわれがつくるがままのものなのである。ただし、われわれ一人一人が、われわれの文化のなかで数学としているものを十分顧慮することなしに、個々に行動してつくるのではない。古い理論の見地に立って新しい理論を建設しようと試み、また、現存の数学の進歩にとって価値あり、とひろく認められた未解決の問題を解決することによって、つくって行くものなのである。」（Ｐ．Ｌ．ワイルダー，吉田洋一訳「数学基礎論序説」，培風館，1969，ｐ405）。また、伊達（2012）が指摘するように、「数学は、人間の活動から生み出された文化的所産であり、各文化の中でつくられ発展している。数学を学ぶことは、数学的活動を通して自らの中に数学をつくっていくことに他ならない。」ことであり、「授業を知識・技能の習得の場とだけに捉え、自らの中に数学をつくっていく授業を行っていなかった」ことが、文化としての数学という、数学を学ぶことの根っ子につながっていないところに学習者の「わからない」の原因があると示唆し、「わかりできる数学」（習得型）の授業から「考えつくる数学」（探求・習得型）への転換を、文化人類的な視点からの授業によっ

て提案している。

3）OECD・PISA では、数学的リテラシーは「数学が世界で果たす役割を見つけ、理解し、現在及び将来の個人の生活、職業生活、友人や家族や親族との社会生活、建設的で関心を持って思慮深い市民としての生活において、確実な数学的根拠にもとづき判断を行い、数学に 携わる能力である。」と定義されている。この調査では、「量」「空間と形」「変化と関係」「不確実性」の４領域の習熟度が示されている。これらを生徒たちは学校数学で学び、習熟した数学的知識や技能を、数学内外の多様な場面で役立つように使えることが評価の焦点となっている。

4）数学の「無答」は、一般的な傾向として表れてきていることが指摘されている。例えば、公的調査では「教育課程実施状況調査研究委員会報告書」国民教育文化総合研究所，2005，ｐ35を参照。

5）山口智子「人生の語りの発達臨床心理」（ナカニシヤ出版　2004　ｐ12）では、「疾患」は医療関係者が論理科学的思考モードを働かせ、専門的モデルに従って再構成するものであり、個別性から抽象的心理に向かう。・・・一方、「病い」は実際の患者や家族が経験するものであり、物語的思考モードによって、「なぜ、こんなことになったのか」が問い直され、個人的な経験が意味づけられていく。

6）Ａ.Ｓ.ポザマンティエ／Ｉ.レーマン，松浦俊輔訳「不思議な数πの伝記」日経BP社　2005

7）Ｋ・Ｊ・ガーゲン，東村知子訳「あなたへの社会構成主義」，ナカニシヤ出版，2004，p239
私たちの現実が、他の人々に耳を傾けられ、肯定されて、会話がますます調和したものになった時、変化力をもつ対話へ向けてのさらなる動き－「自己内省」－が生じる可能性が生まれます。

8）H.M.エンツェンスベルガー／R.Z. ベルナー，丘沢静也訳「数の悪魔」晶文社　2000

9）伊達（2012）は、「教師の文化的数学観」の重要性を、アーネスト（Ernest,P.）『数学教育学の哲学』を引用しつつ次のように述べている。「教師の数学観とその指導法との間には一貫性が観察される。だから、数学に対する教師の見方、信念、好みがその教育実践に強く影響するのである。教師の『文化的数学観』があってこそ、子どもの『文化的数学観』への意識変容を可能にする。」

引用・参考文献

梅沢敏夫「ディスコース算数数学の授業変革」文芸社　2001
江森英世「数学的コミュニケーション論序説」明治図書　2002
江森英世　教育科学「数学教育」No.659　2012
江森英世　教育科学「数学教育」No.667　2013
金本良通「数学的コミュニケーション能力の育成」明治図書　1998
金本良通　教育科学「数学教育」No.460　1996
苅谷剛彦　「階層化日本と教育危機」有信堂高文社　2001
小寺隆幸・清水美憲編著「世界をひらく数学的リテラシー」 明石書店　2007
Ｋ・Ｊ・ガーゲン，東村知子訳「社会構成主義の理論と実践」ナカニシヤ出版 2004
重松清『教育とはなんだ』筑摩書房　2004，p.98
下山晴彦「心理臨床の基礎１」岩波書店　2000
高取憲一「ヴィゴツキー･ピアジェと活動理論の展開」京都・法政出版　1994
高取憲一郎「文化と進化の心理学」三学出版　2000
伊達文治「『わかりできる数学』から『考えつくる数学』への発展」上越数学教育研究　第27号　2012
茂木健一郎「脳と創造性」ＰＨＰ研究所　2005
やまだようこ「人生を物語る」ミネルヴァ書房　2000
吉田稔「学習意欲論の試み」筑波数学教育研究　第18号　1999
竹村景生　奈良教育大学附属中学校研究集録第33号　2005
竹村景生　奈良教育大学附属中学校研究紀要第43号　2014
文部科学省「中学校学習指導要領解説　数学編」教育出版　2008
国立教育政策研究所編「算数・数学教育の国際比較」ぎょうせい 2005