多重対称図形の切り紙の折り方について *

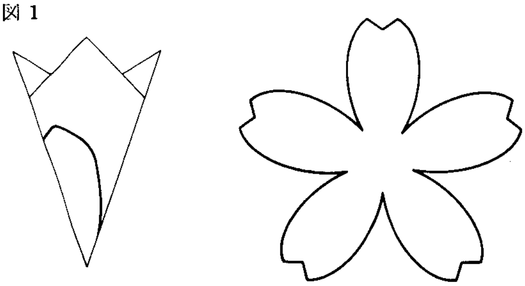
坂　口　杲　一　　　吉　田　美　智 **

（附属幼稚園）

1. はじめに

ある図形を1点のまわりに360°のn分の1だけ回転させると，もとの図形に重なるとき，その図形をこの点に関してn重対称であるという。幼稚園や小学校では色紙を切って，桜の花や桃の花，星の形などを作ることがある。これらは5重対称な図形であるが，そのうえ中心を通る5本の直線のおのおのに関して線対称にもなっているので，5重対称図形の中の特別なものである。色紙からこの種の5重対称図形を切り取る場合は，色紙を2つ折りにしたものを，さらに図のようにうまく5つに折りたたんで鋏をいれる。

図 1



分度器などの器具を使わないで，色紙をこの状態に折りたたむ方法は，われわれが調べた範囲では，色紙が正方形の場合，4通りほど知られている。どれも近似作図であるが，精度については必ずしも明らかにされていない。

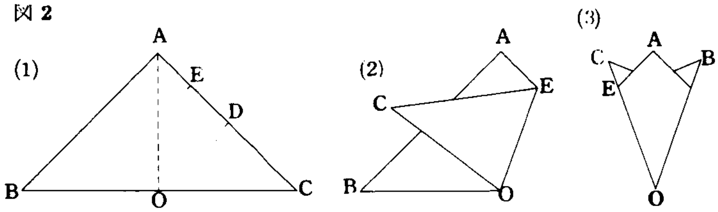
そこでわれわれはこれら4つの方法について精度を算定して比較し，次に精度を高かめる方法を検討し，さらに3重対称や7重対称な図形を切り取る場合の折り方についても研究してみた。2重対称，4重対称，8重対称の場合の折り方は明らかであるし，6重対称の場合は，3重対称図形の折り方がわかれば，それをさらに2つに折ればよいわけである。

2. 5重対称図形の切り紙の折り方

使う色紙は正方形のものに限定して，序文で述べた4つの方法を紹介しよう。

方法 I　右は折り方の説明図である。説明文は次ページに記す。この方法が一番よく知られているようである。

図 2



* On Methods of Cutting Paper in Multiply Symmetric Forms.

** Kōichi Sakaguchi and Michi Yoshida (Kindergarten, Nara University of Education, Nara)

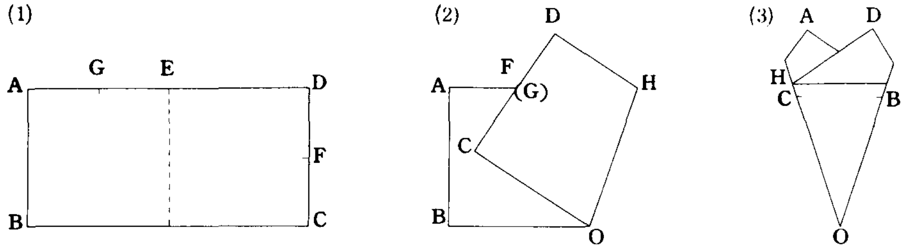
(1)　色紙を直角２等辺３角形ＡＢＣの形に２つに折り，ＢとＣを重ねてＢＣの中点Ｏを求める。次にＡとＣを重ねてＡＣの中点Ｄを求め，さらにＡとＤを重ねてＡＤの中点Ｅを求める。

(2)　ＯＥを折り目にして２つに折る。

(3)　ＯＥがＯＣの上に重なるように折り，最後にＯＣを折り目にして左下の部分（ＯＢのある部分）を折りたたむ。（この部分は裏側へ折りたたむ方がよい。）

方法Ⅱ　これは本学の樋口助教授から教えてもらった方法である。

図３



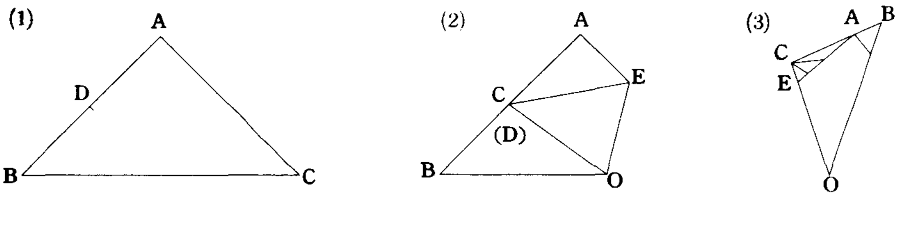
(1)　色紙を，ＢＣを折り目にして長方形ＡＢＣＤの形に２つに折り，ＤをＡに重ねてＡＤの中点Ｅを求める。次にＣとＤを重ねてＣＤの中点Ｆを求め，さらにＡとＥを重ねてＡＥの中点Ｇを求める。

(2)　ＦがＧに重なるように２つに折る。折り目をＯＨとする。次節で証明するように，この場合Ｏは色紙の中心になる。

(3)　ＯＨがＯＣの上に重なるように折り，最後にＯＣを折り目にして左下の部分（ＯＢのある部分）を折りたたむ。（裏側へ折りたたむ方がよい。）

方法Ⅲ　これは，アメリカの出版物（参考文献，末尾）に載っているのを，本学の鈴木助教授から教えてもらったものである。

図４



(1)　色紙を直角２等辺３角形ＡＢＣの形に２つに折り，ＡとＢを重ねてＡＢの中点Ｄを求める。

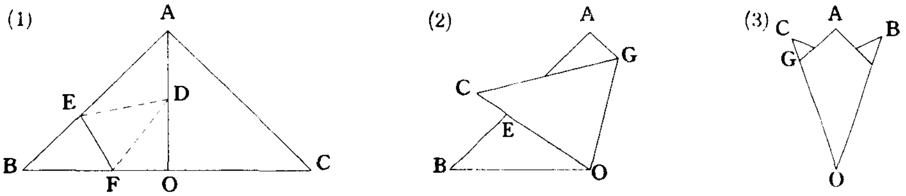
(2)　ＣがＤに重なるように２つに折り，折り目をＯＥとする。この場合，Ｏは色紙の中心にはならない。

(3)　ＯＥがＯＣの上に重なるように折り，最後にＯＣを折り目にして左下の部分を折りたたむ。（裏側へ折りたたむ方がよい。）

方法Ⅳ　これは筆者の１人吉田が記憶していた方法である。（図は次ページ）

(1)　色紙を直角２等辺３角形ＡＢＣの形に２つに折り，ＡＢとＡＣを重ねて折り目ＡＯを求める。次にＡとＯを重ねてＡＯの中点Ｄを求め，さらにＢとＤを重ねて折り目ＥＦを求める。

図 5



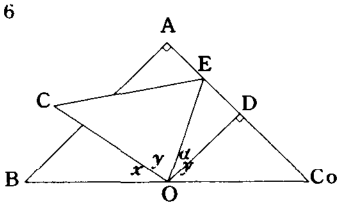
(2)　OCがOEの上に重なるように折る。即ちOCがEを通るように色紙を折る。折り目をOGとする。

(3)　OGがOCの上に重なるように折り，最後にOEを折り目にして左下の部分を裏側へ折りたたむ。

3．精度の算定と比較

Iの精度．　Iの図(2)で，△COEを展げたものを△C_0OEとし，AC_0の中点をDとする。

図 6



$\angle BOC = x$，$\angle EOC_0 = y$，$\angle EOD = \alpha$　とおけば，

$\tan\alpha = 1/2$，

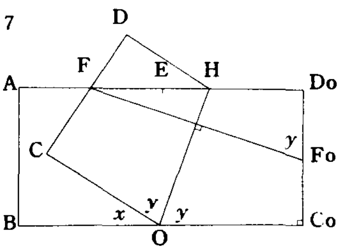
$$\tan y = \tan(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = 3$$

$\therefore \quad y = 71^\circ 34'$，$\quad x = 36^\circ 52'$

作図が完全に正確ならば，$x = 180^\circ/5 = 36^\circ$，$y = 2x = 72^\circ$になっていなければならない。だからこの方法では，$x$は$52'$の過剰誤差をもち，$y$は$26'$の不足誤差をもつ。

IIの精度．　IIの図(2)で，4角形DCOHを展げたものをD_0C_0OHとし，C_0D_0の中点をF_0とする。$\angle BOC = x$，$\angle HOC_0 = y$とおけば，

図 7



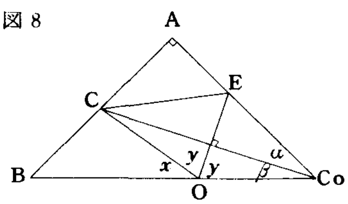
$\angle HOC_0 = \angle FF_0D_0$なので，$\tan y = D_0F/F_0D_0 = 3$

$\therefore \quad y = 71^\circ 34'$，$\quad x = 36^\circ 52'$

(注)　OがBC_0の中点であることは次のようにして証明される。BC_0の中点をO′とすると，3角形O′C_0F_0と3角形O′EFは合同になるから，O′F_0 = O′Fとなる。だからO′はF_0Fの垂直2等分線上にある。ところが，折り目OHはF_0Fの垂直2等分線である。ゆえにOとO′は同じ点でなければならない。

IIIの精度．　IIIの図(2)で，△OECを展げたものを△OEC_0とする。CとC_0を結び，$\angle BOC = x$，$\angle EOC_0 = y$

図 8



$\angle CC_0E = \alpha$，$\angle OC_0C = \beta$　とおけば，

$y = 90^\circ - \beta = 90^\circ - (45^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$　であって，

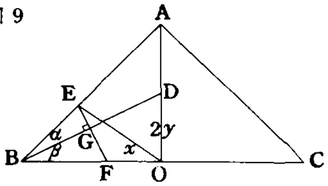
$\tan\alpha = AC/C_0A = 1/2$　なので

$$\tan y = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = 3$$

∴　　$y = 71°34'$，　$x = 36°52'$

Ⅳの精度.　Ⅳの図(1)で，BDとEFの交点をGとし，$\angle BOE = x$，$\angle EBD = \alpha$，$\angle DBO = \beta$ とおく。また $OD = DA = 1$ とおけば，$OB = 2$，$AB = 2\sqrt{2}$ となり，$BD = \sqrt{5}$，$BG = \sqrt{5}/2$，$\cos\beta = 2/\sqrt{5}$，$\sin\beta = 1/\sqrt{5}$ である。だから　$\cos\alpha = \cos(45° - \beta) = \cos 45° \cos\beta + \sin 45° \sin\beta = 3/\sqrt{10}$，$BE = BG/\cos\alpha = 5\sqrt{2}/6$ となるから，3角形BOEに余弦定理を適用して，OEの長さを求めると，$OE = \sqrt{74}/6$ となる。そこで同じ3角形に正弦定理を使えば，$\sin x = 5/\sqrt{74} = 0.5812$ を得る。それゆえ $x = 35°32'$　また $\angle EOC = 2y$　とおけば，$y = (180° - 35°32')/2 = 72°14'$

図9



さて，以上の4つを比較すると，**Ⅳの精度が一番高く；Ⅰ，Ⅱ，Ⅲは同じ精度で，Ⅳよりも悪い。** なぜなら，x の値を理想値36°と比べると，Ⅳでは28′の不足，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲでは52′の過剰となっており，x の誤差はⅣが一番小さい。同様に y の誤差もⅣが一番小さい。

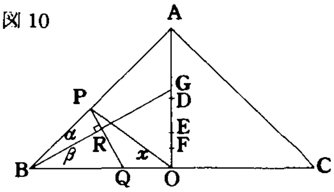
なお，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲでは，x の値も y の値も完全に一致する。精度が等しいから，この3者のうちでは作図の一番簡単なⅢが最も優れているように思われるが，ⅢのOは色紙の中心から外れているため，切り取られる対称図形が小さくなるという欠点をもっている。しかし作業が簡単なので，Ⅲは幼稚園の子どもには向いている。

4．精度を上げる工夫

Ⅰ，Ⅱ，Ⅲでは x が52′だけ大きすぎるので，これらの場合は作図の(2)において，心持ちだけ x が小さくなるように折ればよい。またⅣでは x が28′だけ小さすぎるので，作図の(2)において，心持ちだけ x が大きくなるように折ればよい。しかしながら，この心持ちだけ微小角を修正することは必ずしもやさしくはない。へたをすると，かえって誤差を大きくするおそれがあるからである。そこで客観的な手段によって精度を上げる工夫をしてみた。次のⅤがその試案である。なおこの試案はⅣの改良に当っている。

方法Ⅴ

図10



色紙を直角2等辺3角形ABCの形に2つに折り，ABとACを重ねて折り目AOを求める。AとOを重ねてAOの中点Dを求め，同じように，DOの中点E，EOの中点Fを求め，最後にAFの中点Gを求める。こうすればGDはADの8分の1になる。さて次にBをGに重ねて折り目PQを求め，OCがOPの上に重なるように色紙を折る。あとの折り方はⅣの場合と全く同じである。

この方法の精度を調べるため，$\angle BOP = x$，$\angle PBG = \alpha$，$\angle GBO = \beta$　とし，$AO = BO = 8$ とおけば，$OG = 4.5$，$BG = \sqrt{8^2 + 4.5^2} = \sqrt{84.25}$，$BR = \sqrt{84.25}/2$（ただしRはBGとPQの交点），$\cos\beta = 8/\sqrt{84.25}$，$\sin\beta = 4.5/\sqrt{84.25}$　となる。それゆえ　$\cos\alpha = \cos(45° - \beta) = \cos 45° \cos\beta + \sin 45° \sin\beta = 12.5/\sqrt{168.5}$

となるから，$BP=BR/\cos\alpha=3.37\sqrt{2}$ である。そこで△BOPに余弦定理を適用して

OPの長さを求めると，$OP=5.7266$ となる。ここで同じ3角形に正弦定理を用いれば，

$\sin x=0.5885$ を得る。 $\therefore\quad x=36^\circ 3'$

次に$\angle POC=2y$ とおけば，$y=(180^\circ-36^\circ 3')/2=71^\circ 58' 30''$ となる。

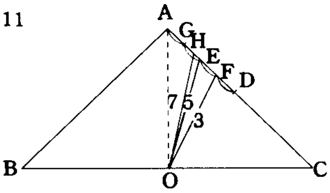
このx，yの値を理想値36°，72°と比較すると，**かなり精度の高い**近似値になっていることがわかる。この精度ならば，折り紙の場合，ほぼ正確な作図と見なすことができよう。

5. 3重対称，7重対称図形の場合

3重対称や7重対称な図形を切り取る場合には，色紙を直角2等辺3角形か長方形の形に2つに折って，それをさらに3重折りまたは7重折りにすればよい。3重折りの場合は，実際に試みたらわかるように，手さばきだけで十分正確に折ることができる。しかし幼児には必ずしもたやすい事柄ではない。さて3重折り，5重折り，7重折りが一連の似通った方法によって得られることがわかったので，数学的な興味もまじえて，ここでまとめて述べることにする。

方法Ⅰ′.

図11



方法Ⅰの図(1)において，さらにEDの中点F，AEの中点G，GEの中点Hを順次求める。

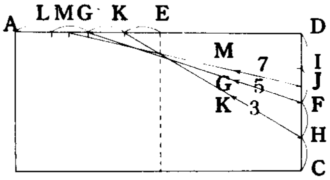
1．OFを折り目にして△FOCを折りまげると，それから3重折りができる。

2．OEを折り目にして△EOCを折りまげると，それから5重折りができる。（方法Ⅰ）

3．OHを折り目にして△HOCを折りまげると，それから7重折りができる。

方法Ⅱ′.

図12



方法Ⅱの図(1)において，さらにFCの中点H，DFの中点I，IFの中点J，GEの中点K，AGの中点L，LGの中点Mを順次求める。

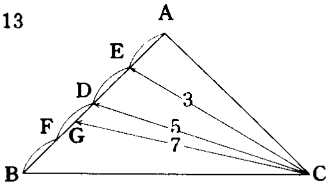
1．HがKに重なるように折りたたむと，それから3重折りができる。

2．FがGに重なるように折りたたむと，それから5重折りができる。（方法Ⅱ）

3．JがMに重なるように折りたたむと，それから7重折りができる。

方法Ⅲ′.

図13



方法Ⅲの図(1)において，さらにADの中点E，DBの中点F，DFの中点Gを求める。

1．CがEに重なるように折りたたむと，それから3重折りができる。

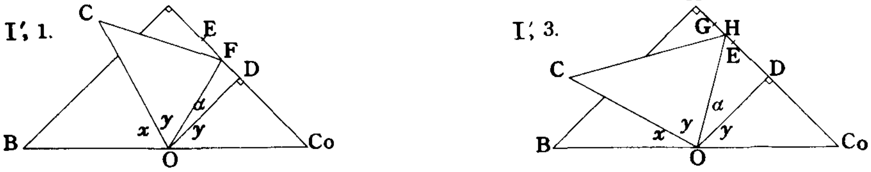
2．CがDに重なるように折りたたむと，それから5重折りができる。（方法Ⅲ）

3．CがGに重なるように折りたたむと，それから7重折りができる。

精　度. 先ずⅠ′について，1．と3．の精度を調べてみよう。（2．の精度は第3節で調べが済んでい

る。）下の左の図が1．であるが，$\angle BOC = x$，$\angle FOC_0 = y$，$\angle FOD = \alpha$とおけば，$\tan\alpha = 1/4$，$\tan y = \tan(45^\circ + \alpha) = (1 + \tan\alpha)/(1 - \tan\alpha) = 5/3 = 1.6667$

図14



だから，$y = 59^\circ 2'$，$x = 61^\circ 56'$　である。x，yの理想値は共に60°であるから，切り紙の精度としては許容範囲におさまっていると考えられる。

右の図は3．であるが，$\angle BOC = x$，$\angle HOC_0 = y$，$\angle HOD = \alpha$　とおけば，$\tan\alpha = 5/8$，$\tan y = \tan(45^\circ + \alpha) = (1 + \tan\alpha)/(1 - \tan\alpha) = 13/3 = 4.3333$となるから，$y = 77^\circ$，$x = 26^\circ$　である。xの理想値は$180^\circ/7 = 25^\circ 42' 50''$，$y$の理想値は$77^\circ 8' 35''$　であるから，この作図の精度は比較的高いことがわかる。

Ⅱ'，Ⅲ'の精度もⅠ'の精度と全く同じである。計算はⅡ，Ⅲの場合と同じようにできる。

Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの精度が一致したように，Ⅰ'，Ⅱ'，Ⅲ'の精度も完全に一致する。この一致は偶然ではなく，説明は省略するが，3者の間に存在する幾何学的な関係に由来するものであることがわかる。なおⅣとの関連において方法Ⅳ'に当たるものが考えられるが，それについての記述は省略する。

文　献

Pauline Johnson, Creating with paper (Basic forms and variations), University of Washington Press, p. 136

山田貞実・伊藤　清，新しい紙の造形，日貿出版社，　p. 190