

# 算数・数学教育における問題解決学習の研究(12)

重松敬一

(奈良教育大学数学教育講座)

吉田明史

(奈良教育大学大学院教育学研究科専門職学位課程)

川口慎二

横弥直浩

(奈良女子大学附属中等教育学校)

- Research on Problem-Solving in Mathematics Education (12) -

Keiichi SHIGEMATSU

(Department of Mathematics Education, Nara University of Education)

Akeshi YOSHIDA

(School of Professional Development in Education, Nara university of Education)

Shinji KAWAGUCHI

Yasuhiro YOKO

(Nara Women's University Secondary School)

**要旨:**これまでの高等学校における数学の授業では、教師による一方向的な講義の形式のものが多く見られる。これに対し、「生徒がわかったと実感することができるような授業を展開するためには、どのような教材を用い、どのような指導を行えばよいのか」という課題のもと、高校2年生の数学・数学Bの授業研究を通して、生徒の「わかる」状況を把握し、どのような授業が「わかる授業」になり得るのか、具体的な実践例を挙げながら、生徒の反応と合わせて考察を行った。その結果、生徒にとっての「わかる授業」には、作業や数学的活動を重視し、既習事項や他教科との関連を図り、概念間の相互関連を図ることが大切であるという結論を得た。

**キーワード:** 高等学校数学 Senior School Mathematics

わかる授業 Teaching and learning processes focused on students' understanding

授業実践 Practical research 生徒アンケート Students' questionnaire

## 1. はじめに

2006年度、筆者の一人である川口の初任者研修の一環として、「生徒がわかったと実感することができるような授業を展開するためには、どのような教材を用い、どのような指導を行えばよいのか」という課題のもと、5年次(高校2年に相当)生徒を対象とした数学・数学Bの授業研究を行った。また、重松と吉田は外部指導者として、横は内部指導者として、川口の授業を観察して共同して授業研究を行った。

その中から、2006年度と2007年度にわたり、奈良女子大学附属中等教育学校において、上記課題について生徒の「わかる授業」に関する意識をアンケート(2006年7月6日および2007年5月16日実施)により調査し、

その分析結果から再度授業研究を行った。年度末(2007年3月9日および2008年3月10日実施)に再び生徒にアンケートを取り、その効果について検証を行った。その結果、生徒にとっての「わかる授業」を展開するためには、作業や数学的活動を重視し、既習事項や他教科との関連を図り、概念間の相互関連を図ることが大切であるという結論を得た。

## 2. 従来の授業に対する反省

本研究を行うにあたり、まずは授業観察を通して、現状の授業の問題点や課題を次のように整理した。

(1) 教材および指導内容の観点

・演習問題や入試問題が解けることに重点が置かれ、

その解法の指導が授業の中心になっている。

- ・計算や機械的処理ができるようになることに指導の重点が置かれ、生徒はその計算や処理の意味を理解することが難しい。
- ・演習問題の枠を超えて、日常生活における諸現象と数学の関わりについて触れる機会が少なく、問題解決能力を育成・向上させるような内容の工夫が少ない。

## (2) 学習指導法の観点

- ・教師が授業で伝えたい内容を前面に押し出しすぎているため、生徒の自由な考察や思考を妨げ、生徒からの多様な意見、数学的な見方や考え方を十分には引き出せていない。
- ・生徒の数学的活動が少なく、実験や作業を取り入れた授業ではなく、教師が一方向的に進める講義が中心の授業である。
- ・授業中に生徒に発問しているものの、計算結果や知識を問う一問一答の発問が多く、数学的な考え方を問う発問が少ない。

以上をまとめると、大きく分けて次の2つの問題点  
問題演習とその解法の指導に偏重した授業内容

生徒の活動が少なく、教師による一方向的な授業展開

を挙げることができる。

## 3. 生徒からみた「わかる授業」の分析

上述の現状を踏まえた上で、「わかる授業」について考えるために、まず、生徒にとって「わかる授業」とはどのような授業であるのかを教師が認識しておく必要がある。生徒と教師の2つの立場から「わかる授業」をそれぞれ比較し分析することは「わかる授業」構築のために欠かせないものと考えられる。

加えて、生徒が授業中どのような状態・様子であるかを客観的にみることが、「わかる授業」を捉える際に重要である。生徒が授業のどこに反応し、どこに興味を示しているかを授業観察時に撮影されたビデオや写真などをもとに調査した。

### 3.1. 文系生徒に対する調査

まず2006年度5年文系生徒を調査対象とした。5年次生徒が対象である「解析」の授業は、数学・数学Bのうち、式と証明、指数関数と対数関数、数列微分積分を扱う授業である。文系生徒の様子としては、数学に自信がない、あるいは受験のために仕方がなく受講している生徒がいる一方、数学に興味をもち積極的に授業に参加する生徒も数名いる状況であった。全体的には数学を苦手とする生徒が多かった。

従来の一方向的な講義では、その授業の場では問題を

解くことができ、目指している表現や処理ができていくものの、その効果は一時的であり、しばらく時間が経過すると忘れてしまう部分が多いように感じられた。つまり、本質的な理解に至っていないのである。また、新出の概念や定義が定着せず、授業のたびに前時の内容説明に大きく時間を割かなくてはならないときもあった。これに対し、ある授業において、内容に関連した歴史や応用例を余談として提供したところ、生徒たちが従来の授業より興味を示すという反応があった。

生徒の授業中の様子から考えられるのは、

問題演習や解説が中心である場合、生徒は完全に受身であり自らの思考を停止しやすい。新出の概念の導入時に、具体例や歴史的背景について触れた話題を提供すると、授業における反応もよく、概念の定着がスムーズになされる。

の2点が「わかる授業」の要素として考えられる。

一方、生徒の視点からみた「わかる授業」がどのようなものであるかを把握するために、受講生徒を対象にアンケート調査を実施した。本節では、そのアンケート結果をまとめた。

### 数学の授業に関するアンケート 結果

(2006年7月6日実施 回答人数:35人)

(1) あなたにとって、数学が「わかる」状況とはどのような状況を指していますか。(複数回答可)

- ・問題集の問題が解けたとき。(22人)
- ・授業中の説明・解説に対して納得できたとき。(21人)
- ・定理や公式の証明ができたとき。(15人)
- ・以前に学習した内容との関連性が見つかったとき。(14人)
- ・応用例を知ったとき。(11人)
- ・授業の内容に関する歴史や背景を知ったとき。(5人)

(2) あなたにとって、「わかる授業」とは、どのような授業ですか。最も近いものを選んでください。

- ・解き方のポイントを提示し、練習を多くできる授業。(13人)
- ・身近な話題や現象を取り入れた授業。(11人)
- ・内容に関する歴史や応用例について語られる授業。(6人)
- ・コンピュータ以外の作業を取り入れた授業。(3人)
- ・コンピュータを活用した授業。(2人)

(3) あなたが今まで受けてきた授業のなかで、印象に残っている授業とはどのような授業ですか。

(自由記述)

## [おもな意見]

- ・グラフ電卓のセンサーを用いて、三角関数のグラフをかいた実験の授業。(7人)
- ・正多面体をポリドロンで作ったり、展開図をかいて組み立てたりする授業。(5人)
- ・二次方程式や二次不等式を、二次関数のグラフから考えることを知った授業。(4人)
- ・三角錐の体積を求める公式を作った授業。(3人)
- ・幾何の授業において、球の体積を求めるときに、実際にりんごを細かい柱状に切り、それを集めると球状になることが実感できた授業。(2人)
- ・三角比において、単位円の使い方を教えてもらった授業。(1人)

- (4) あなたは、数学が「わかる」ようになるためには、どのような方法が効果的だと思いますか。(自由記述)

## [おもな意見]

- ・問題を数多くこなし、演習になれること。(27人)
- ・定理や公式を鵜呑みにしないで、なぜそれが成り立つのかを根本から理解すること。(8人)
- ・先生や友達にどんどん質問して、疑問をその都度解決しておくこと。(7人)
- ・自分で問題が解決できるまで、粘り強く取り組むこと。(3人)
- ・定理の証明を自分でやり直すこと。(2人)

## 3.2. 理系生徒に対する調査

2007年度は5年理系生徒を調査対象とした。5年次生徒が対象である「代数・幾何」の授業は、数学・数学Bのうち、複素数と高次方程式、図形と方程式、ベクトルを扱う授業である。生徒の様子としては、数学に興味・関心の高い者や数学に自信を持つ者がいる一方、数学にいまひとつ自信の持てない生徒もいる。全体的に、授業に臨む基本的な姿勢はできており、その授業の場では問題を解くことができ、目指している表現や処理ができています。演習問題にもきちんと取り組み、課題の提出率も高い。文系生徒に比べると、新出の概念や定義に対する対応力は高いが、理解や定着は難しい。しかし、抽象的な話題にも一定の興味を引いた。もちろん、歴史的な背景や物理現象との関わりについての話題を提供したときにも、生徒たちは興味を示した。

このように、理系生徒の授業中の様子をまとめると、抽象的な概念に対する抵抗は少ないものの、理解することに困難が伴う。教科を越えた具体例や歴史的背景について触れた話題に対する反応がよい。新しい単元に入ると、全く新しい話として初めから覚えようとしてしまう。

の3点が特徴として挙げられる。

そこで、2006年度と同様に、受講生徒を対象にアンケート調査を実施した。2006年度は、項目を選択する形式であったが、選択肢に縛られることなく、より率直に回答してもらうために、同じ質問であるが自由筆記の形式を採った。

## 数学の授業に関するアンケート 結果

(2007年5月16日実施 回答人数:75人)

- (1) あなたにとって、数学が「わかる」状況とはどのような状況を指していますか。(自由記述)

## [おもな意見]

- ・問題集の問題が解けたとき。(48人)
- ・授業中の説明・解説に対して納得できたとき。(34人)
- ・物理などへの応用例を知ったとき。(16人)
- ・以前に学習した内容との関連が見つかったとき。(14人)
- ・定理・公式の証明ができたとき。(13人)
- ・授業の内容に関する歴史や背景を知ったとき。(8人)
- ・頭の中でイメージできたとき。(3人)
- ・仕組みが理解できたとき。(2人)
- ・考える道筋が見えたとき。(1人)

- (2) あなたにとって、「わかる授業」とは、どのような授業ですか。(自由記述)

## [おもな意見]

- ・解き方を提示し、問題練習を多くできる授業。(45人)
- ・身近な話題や現象を取り入れた授業。(27人)
- ・コンピュータや作業などの活動を取り入れた授業。(24人)
- ・授業内容だけではなく、より発展的な数学の話が聞ける授業。(10人)
- ・結論がはっきり明確である授業。(8人)
- ・内容に関する歴史や応用例について語られる授業。(7人)
- ・浮かんでくる疑問を確実に解消していける授業。(4人)
- ・先生が熱心で、その情熱が伝わる授業。(1名)
- ・生徒の進路を考えながら進めてくれる授業。(1名)

- (3) あなたが今まで受けてきた授業のなかで、印象に残っている授業とはどのような授業ですか。(自由記述)

## [おもな意見]

- ・グラフ電卓のセンサーを用いて、三角関数のグラフをかいた実験の授業。(16人)
- ・正多面体をポリドロンで作ったり、展開図をかいて

て組み立てたりする授業。(11人)

- ・角の三等分線の作図が一般には不可能であることを学んだ授業。(8人)
- ・三角比の角度を拡張して(一般角を扱うことにより)三角関数へと拡張した授業。(1人)
- ・特にない。(18名)

(4)あなたは、数学が「わかる」ようになるためには、どのような方法が効果的だと思いますか。  
(自由記述)

[おもな意見]

- ・問題を数多くこなし、演習になれること。(27人)
- ・定理や公式を鵜呑みにしないで、なぜそれが成り立つのかを根本から理解すること。(8人)
- ・先生や友達にどんどん質問して、疑問をその都度解決しておくこと。(7人)
- ・自分で問題が解決できるまで、粘り強く取り組むこと。(3人)
- ・土台となる考え方や基本事項の理解に力を入れる。(2人)
- ・定理の証明を自分でやり直すこと。(2人)
- ・基本となる計算力を身につける。(2人)

### 3.3. アンケート結果の分析

上記アンケートの結果を分析して、文系生徒と理系生徒の側からみた「わかる授業」の認識について、共通点と相違点に分けて考察してみた。

まず、共通点として、質問(1)、質問(2)および質問(4)の結果についてみることにする。生徒にとって「わかる」こととは、問題が解けるようになることであることが明らかになった。この理由としては、「問題が解けるか否か」は生徒から見てもはっきりとした視点であり、生徒が自分で判断できることである点が考えられる。したがって、当然「わかる授業」が解法のポイントを押さえた解き方を提示する授業であることになるのであろう。しかし、多くの生徒にとっては、「わかる」状況は問題が解けるようになるだけではなく、教師の説明に納得でき、自らのなかできちんと消化できているという状況や、自分の中にある既存の知識と関連付けができ、「知のネットワーク」が形成されている状況も含まれていることにも気づく。したがって、身近な具体例や内容に関する背景を知ることができる授業が「わかる授業」であるとする生徒がいることも納得できる。

次に質問(3)についてみてみると、生徒のなかで印象に残っている授業は、体験・実験を取り入れた授業が多いことがわかる。実際に自分たちで作業を行い、そこから数学的事実を抽出し考察するという数学的活動は、学習内容の定着や「わかる」感覚をつかむ上で、大変有効である。「わかる授業」としての認識は浅い

ものの、生徒の中に残っている授業こそまさに生徒が「わかった授業」を指していると考え。また、質問(3)においても、学習内容が既存の知識と結合し、関連付けを行いながら、学習内容の発展・拡張が行われているとともに、そのような関連性に大きな驚きと感動をおぼえている点が興味深い。

一方、相違点は、「知のネットワーク」を構成する要素が、文系生徒にとっては身近な具体例や学習内容に関する背景が中心であるが、理系生徒の場合には、それらに加えて、既習の概念や抽象的な内容が含まれることである。理系生徒のなかでは、学習内容が既存の知識と結合し、関連付けを行いながら、学習内容の発展・拡張が行われていることがわかる。その上で、理系生徒はより抽象的な世界において、学習内容と具体例や既存の知識との関連付けがなされることを「わかる」と捉えていることが明らかになった。つまり、文理どちらでも、学習内容と具体的事例などの関連付けが理解を促進しているが、理系生徒は文系生徒に比べて、より抽象度の高いレベルでの関連付けを行っていて、「わかる」ことに対する認識に差異が生じているのである。

### 4. 授業者の視点からみた「わかる授業」

前節の生徒から見た「わかる授業」に対し、授業を行う川口が「わかる授業」に対して、どのような認識を持っているのかについて整理しておく必要がある。そこで本節では、従来の授業の現状を踏まえ、授業者川口の「わかる授業」観についてまとめておく。

教師は授業において、四つの観点を考慮して授業展開をする必要があるが、表現・処理に偏った授業が多くなりがちである。もちろん、表現・処理の力を身につけることは重要であることは言うまでもない。

しかし、表現・処理の力を育成するためにこそ、その内容に対する興味や関心を持つことが有効であり、それゆえに興味・関心を喚起することが「わかる授業」には欠かすことができないと考える。また、表現・処理を目標とした演習問題だけではなく、広く社会に存在する諸問題を数学的に解決する「問題解決能力」の向上を意識した問題や課題の設定を行う必要がある。

この点から、学習内容をいろいろな視点から眺め、既存の知識や具体的な応用例に関連付けて考察することができる授業も「わかる授業」の一つとして考える。

まとめると、授業者の目指す「わかる授業」とは、学習内容に関連した歴史的背景や作業を提供することで、興味・関心を喚起する授業  
現実社会における具体例や応用例を取り入れた授業  
既存の知識を関連付け、それを総動員して解決を目指す「問題解決型」授業

の3つが挙げられる。

### 5. 授業実践例

#### 5.1 2006年度の実践例

##### 5.1.1 対数の導入

負の数や分数の指数まで拡張された指数法則の導入として、具体的な状況と数値を用いて考えるような題材を作った。機械的に指数法則が成り立つことを説明してしまいがちであったが、生徒たちから見ると、具体的な計算結果と指数を比較することで、指数法則が成り立つことがより実感できた。

##### 5.1.2 時事に絡めた常用対数の導入

「指数・対数」の単元において、現実世界との関わりが強い内容として、常用対数があげられる。底が10である対数を特別に「常用対数」と呼び、その応用を学ぶのかを理解するためには、生徒にその必要性と有用性を感じさせることが有用であると考えた。そこで、極めて大きな数や極めて小さな数を扱う具体的な状況を図1のように設定した。

具体的には、ちょうどこの授業を行った時期に、「国際天文学連合 (IAU) の決議として、冥王星が惑星から外れて矮惑星に分類される」というニュースと、「北朝鮮により核実験が実施される」というニュースが話題になっていた。太陽系や惑星という巨大な世界と、原子や陽子といった微小な世界という対称的な世界が同時期に話題になっていたため、このような数を同一の見方で表現、処理する道具として常用対数を導入した。

加えて、太陽系や惑星のような天文学における巨大な数の計算こそが、ネイピアによる対数概念形成の契機であったこともあわせて話題として提供した。

具体的な事例や話題と数学的内容をいかにスムーズに接続するかが課題といえる。しかし、10の累乗と常用対数の比較を行うことにより、それまで学習した対数の意味や対数計算の根拠が補われていた。ここでより理解を深めた生徒が多かった。また、生徒たちには地学選択者がほとんどであり、地学で学ぶ内容との相互補完作用も働いたようである。

##### 5.1.3 対数の応用を意識した演習問題

新しい内容・概念の導入だけではなく、生徒が重視する演習問題においても、うまく現実の世界や身近な生活を意識させるものがないかという観点から、演習プリントにおいて北朝鮮による核実験のインターネットの記事を題材に、常用対数を用いる図2の問題を作成した。



図1 常用対数の導入に関する授業プリント



図2 常用対数の応用問題

文系生徒の中には、この時期に海外から本校に訪問していた生徒たちを広島原爆ドームへ連れて行き原爆被害を紹介した者もいて、原爆の悪影響や完全に消滅するまでのあまりに長い時間に大きな驚きをおぼえ、原爆の悪影響を実感していた。このように、具体的な

事例を関連させた問題に取り組ませることで、単純な計算問題を行わせるよりも、問題に対する関心を引き出し、計算結果の吟味を深める効果が生まれた。具体的事例との関連付けは、導入における課題だけではなく、活用を意識したものでなくてはならず、活用の観点から授業を構成することも「わかる授業」のための重要な要素であることを確認できた。

#### 5.1.4. 対数の応用

授業で取り扱う時間が足りないこともあったため、レポート課題の解答プリントに、常用対数のいろいろな応用例をコラムとして提供した。文系生徒は、生物や地学を履修しているものが多く、理科でよく知っているpHやマグニチュードなどの概念が、実は対数により定義されていたことを知って驚いている生徒もいた。

### 5.2 2007年度の実践例

#### 5.2.1. ベクトルの導入

ベクトルの導入として、幾何の問題を設定し、生徒たちがどのように解くのかを観察した。その結果、平面幾何を用いて考える者、座標を入れて計算で処理しようとする者など、多様であった。メネラウスの定理を用いれば、即座に解決する問題であるが、この方法で解決した生徒は1人のみであった。

##### 例題

同一直線上にない3点O、A、Bがあり、OAを2:1に内分する点をQ、OBを1:3に内分する点をR、ARとBQの交点をSとする。また、点Oから点Sに向かって半直線を引き、OC=10OSとなるように点Cをとる。このとき、四角形OACBは台形になることを示せ。

この題材は、共同研究「高大連携を志向した実験的教科書・教材の有効性の実証的研究」([1] p.82)の実践として行った授業であり、導入では幾何的に苦労して解決した問題を、ベクトル学習後には、より容易に解決することにより、ベクトルの有用性や多様な見方の重要性を認識することに対して、効果的であった。パラシュート型学習(単元全体を見渡し、到達点を定めてから具体的学習に降りる学習方法)を取り入れた導入という教科書作成の工夫について、一定の効果を見たといえる。

#### 5.2.2. ベクトルの応用

「オイラー線」の証明問題を図3のように提示したところ、多くの生徒が「重心」や「垂心」などといった言葉から、平面幾何の知識で証明しようと試みていた。

しかし、ベクトルの考え方をを用いれば、鮮やかに証明することができる。複雑な幾何の対象を、ベクトル

という代数的対象へ見方を変えることにより、比較的容易な代数的処理により、解決することができることを生徒たちは実感していた。また、一部の生徒には複素数平面の考え方で説明してみたところ、「ベクトルとほとんど同じだ」という指摘をした生徒もいた。このような見方ができることも、「わかる」上では大切である。この実践例において、平面幾何を苦手としていた生徒は、ベクトルの有用性を強く認識していた。ここでも、概念間の関連を用いることで相互補完作用が働いたといえる。

【ベクトルの導出】  
外心Oを位置ベクトルの基準として、A(a), B(b), C(c)とする。  
[step1] このとき、△ABCの重心Gの位置ベクトルは

$$g = \frac{a+b+c}{3}$$

である。  
[step2] 次に、位置ベクトルaが  $\vec{a} = a + b + c$  で表される点K(a)を考えると、この点Kは△ABCの外心Oと一致することから、  
 $\vec{AK} = \vec{OK} - \vec{OA} = \vec{a} - a = b + c$  である。また、 $\vec{BC} = c - b$  である。したがって、  
 $\vec{AK} \cdot \vec{BC} = (b+c) \cdot (c-b) = c^2 - b^2$   
となる。ここで、Oは△ABCの外心であるから、 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 、ゆえに、 $\vec{AK} \cdot \vec{BC} = 0$  となる。よって、 $\vec{AK} \perp \vec{BC}$  となり、KはAからBCに引いた垂線の上にある。  
同様にして、KはBからCAに引いた垂線の上にもあり、CからABに引いた垂線の上にもあることがわかり、△ABCの外心Oと一致する。  
以上から、  
 $\vec{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 、 $\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$   
であるため、 $\vec{OH} = 3\vec{OG}$  であることがわかり、△ABCの外心O、重心G、垂心Hは一直線上にある。さらに、 $OH = 3OG$  である。(Q.E.D.)

図3 オイラー線の証明

#### 5.2.3. 複素数平面を意識した演習問題

複素数の実部、虚部をそれぞれ第一成分、第二成分とする座標あるいはベクトルと見ることによって、複素数とベクトルという代数的対象同士の間にも、概念間の相互関係を見ることができるよう、課題プリントにおいて問題を作った。

複素平面は、現学習指導要領からは外れているものの、今年度の代数・幾何の内容からすると、複素平面も含めた系統的な学習も可能であった。

#### 5.2.4. 軌跡の応用

既習事項であるグラフの移動について、新しく学習した軌跡の考え方をを用いて解説したプリント(図4)を配布した。グラフの移動については、3年次から4年次にかけて学習していたが、消化不良のまま、公式

として丸暗記している生徒が多い。そこで、軌跡の概念を学習した直後に、グラフの移動の公式について、その根拠を軌跡の見方で説明してみたらどうかと考えた。

このように少し見方を変えただけで、グラフの移動について十分納得することが可能であることを実感した題材である。軌跡の考え方を理解すること自体が生徒にとって難しいことであるが、生徒のコメントやアンケート結果から、グラフの移動という視覚的効果も働き、軌跡の理解促進に繋がった。このように、学習内容を既習事項にいかに関元するかという観点をもつことも重要である。先にも述べたように、生徒たちはそれぞれの内容を独立したものと捉えていることが多い。しかし、この実践例から、各内容の根幹に目を向けさせることで、数学全体に広がるより有機的な関係を発見し、理解を深めることができた。

### 6. 授業後のアンケートの分析

前節で挙げた実践例を通して、生徒がどの内容を「わかった」と感じたのか、また生徒の数学観や数学に対する認識がどのように変化しているのかをみることにより、「わかる授業」の考察についての検証を行えるのではないかと考えられる。そこで、生徒にアンケートを実施し、その結果を分析してみる。

#### 6.1 文系生徒に対するアンケート結果とその分析

##### 数学の授業に関するアンケート 結果

(2007年3月9日実施 回答人数:35人)

(1)「指数・対数」の内容がわかったと感じるのは、どのようなときですか。(複数回答可)

- ・対数の計算ができたとき。(16人)
- ・累乗根と指数の関係を知ったとき。(15人)
- ・実際の現象に、指数関数や対数関数を応用して考えることができたとき。(14人)
- ・対数の意味を知ったとき。(13人)
- ・指数関数や対数関数のグラフがかけたとき。(12人)
- ・常用対数の意味を知ったとき。(10人)
- ・対数の底の変換ができたとき。(9人)
- ・指数法則を、負の指数や分数の指数へ拡張できることを知ったとき。(7人)
- ・指数関数や対数関数の意味を知ったとき。(7人)

(2)あなたにとって、「数学」とは一言で表すとどのような教科ですか。(自由記述)

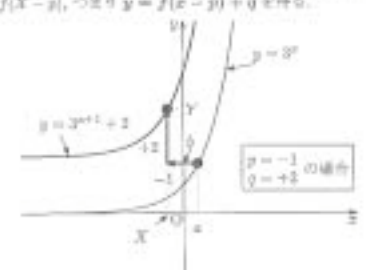
[おもな意見]

- ・専門的 ・筋が通っている
- ・理解できるとスッキリする ・elegant
- ・果てしないもの ・無限に広がる世界
- ・日常生活にそのまま使いにくい ・難敵

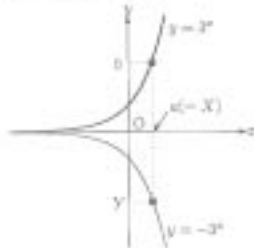
**[コラム] グラフの移動**

グラフの平行移動は、軌跡を用いて考えることができる。  
関数  $y = f(x)$  のグラフを移動させたときに、得られるグラフを表す式について考えよう。(ただし、ここでは、具体的に指数関数・対数関数で考えている。)

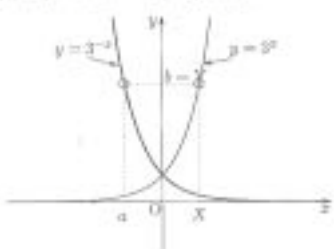
①  $x$  軸方向に  $+p$ ,  $y$  軸方向に  $+q$  だけ平行移動した場合。  
このとき、 $y = f(x)$  上の点  $(a, b)$  がこの平行移動によって移る点を  $(X, Y)$  とすると、下図のように、 $X = a + p$ ,  $Y = b + q$  となる。したがって、  
$$a = X - p, b = Y - q \dots (1)$$
  
ここで、 $(a, b)$  は  $y = f(x)$  のグラフ上の点なので、 $b = f(a)$  を満たす。(1)から、 $Y - q = f(X - p)$ , つまり  $y = f(x - p) + q$  を得る。



②  $x$  軸に関して対称移動した場合。  
このとき、 $y = f(x)$  上の点  $(a, b)$  がこの対称移動によって移る点を  $(X, Y)$  とすると、下図のように、 $X = a$ ,  $Y = -b$  となる。したがって、  
$$a = X, b = -Y \dots (2)$$
  
ここで、 $(a, b)$  は  $y = f(x)$  のグラフ上の点なので、 $b = f(a)$  を満たす。(2)から、 $-Y = f(X)$ , つまり  $y = -f(x)$  を得る。



③  $y$  軸に関して対称移動した場合。  
このとき、 $y = f(x)$  上の点  $(a, b)$  がこの対称移動によって移る点を  $(X, Y)$  とすると、下図のように、 $X = -a$ ,  $Y = b$  となる。したがって、 $a = -X$ ,  $b = Y \dots (3)$  である。ここで、 $(a, b)$  は  $y = f(x)$  の点なので、 $b = f(a)$  を満たす。(3)から、 $Y = f(-X)$ , つまり  $y = f(-x)$  を得る。



④ 直線  $y = x$  に関して対称移動した場合。  
このとき、 $y = f(x)$  上の点  $(a, b)$  がこの対称移動によって移る点を  $(X, Y)$  とすると、下図のように、 $X = b$ ,  $Y = a$  となる。したがって、 $a = Y$ ,  $b = X \dots (4)$  である。ここで、 $(a, b)$  は  $y = f(x)$  の点なので、 $b = f(a)$  を満たす。(4)から、 $X = f(Y)$ , つまり  $a = f(y)$  を得る。

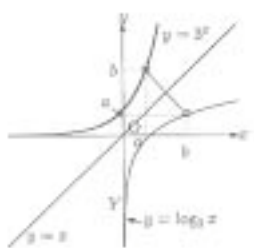


図4 軌跡を用いたグラフの移動

- ・ 深遠なもの ・ 答えが一つに定まるもの
- ・ 人間の想像力が極みに達したもの
- ・ 様々な話が複雑に絡んでいる

(3) 授業を受けた感想を自由に書いてください。(自由記述)

[おもな意見]

- ・ いろいろな話が面白かった。(7人)
- ・ 一度で理解することができていなかったので、何度も説明してくれてよかった。(6人)
- ・ いつもよりは頭に残っている感じがする。(5人)
- ・ 苦手意識が強かったが、「そうなんだ」と感じることができる時があった。(4人)
- ・ 身近な現象の話は、数学が大嫌いだったけど、興味をもった。(4人)
- ・ 数学が少しだけ面白いと感じたし、好きになった。(3人)
- ・ 単元のはじめで、ゆっくりいろんな話をしてくれて、なんとかついていけた。(3人)
- ・ 数学嫌いの私にも、なんとなくわかった話があったので嬉しかった。(3人)
- ・ すこしペースが遅く、教科書以外の話が長かったように思う。(2人)
- ・ 決して数学が得意でもないし、好きにはなっていないが、授業は楽しかった。(2人)
- ・ 公式をひとつひとつ作っていくことが、私には驚きだった。(1人)

このアンケートから、前節で紹介した授業を取り入れていくことにより、生徒の中には数学に対する意識・姿勢が変化したことがわかる。数学に対する嫌悪感や苦手意識を完全に取り去ることは難しいが、授業のほんの一部でも興味を抱いたり、納得できたり、面白さや驚きを感じられる部分ができ、従来の授業とはかなり異なる反応がみられた。

また、教科書にはない話題や題材を提供することにより、大多数の生徒にとっては、数学がどのように現実の世界に現れているのかを知るよい機会になっている。一方、文系生徒の中でも、受験意識の強い少数の生徒は依然として「問題を解く」ことにも価値を見出している。

## 6.2. 理系生徒に対するアンケート結果とその分析

数学の授業に関するアンケート 結果

(2008年3月10日実施 回答人数:75人)

(1) 代数・幾何 授業の内容がわかったと感じたのは、どのようなときですか。(自由記述)

- ・ やの意味や使い方がわかったとき。(16人)
- ・ 因数定理と剰余の定理の使い方がわかったとき。(15人)

- ・ 解と係数の関係と解の公式や判別式と関係がわかったとき。(7人)
- ・ 組立除法ができたとき。(4人)
- ・ 幾何で考えると複雑な問題が、式の計算だと簡潔に解決してしまったとき。(28人)
- ・ 円の接線を考える際に、判別式を用いた方法と半径と中心 直線間の距離を用いて考える方法を知ったとき。(12人)
- ・ ベクトルも見方を変えると、図形と方程式でやった内容と同じ部分があると気付いたとき。(37人)
- ・ 位置ベクトルをうまく使いこなせたとき。(10人)
- ・ 空間ベクトルと平面ベクトルの共通点と相違点をきちんと理解できたとき。(15人)

(2) あなたにとって、「数学」とは一言で表すとどのような教科ですか。(自由記述)

[おもな意見]

- ・ 無限 ・ 絶対的 ・ 自由 ・ 自然科学の言葉
- ・ 緻密 ・ 完璧を追求する学問 ・ 忍耐の学問
- ・ 奥深い ・ 深くて広い ・ ジャングルみたい
- ・ 一つの結論に様々な方向からたどり着く
- ・ 現象を式で表して解決できる ・ パズル
- ・ 面白い教科 ・ 意味の世界 ・ 堅い学問
- ・ 客観的
- ・ 規則がきっちりしているからこそ有力な学問

(3) 授業を受けた感想を自由に書いてください。(自由記述)

[おもな意見]

- ・ 数学を専攻するわけではないが、数学を「受験のためだけのもの」にはしたくない。(19人)
- ・ 一度で理解することができていなかったので、何度も説明してくれて助かった。
- ・ 一年間楽しんで授業に参加できた。(48人)
- ・ 難しかったが、いつものように「お手上げ」にはならなかった。
- ・ テストはよくなかったけど、次元の話は面白かった。
- ・ 授業の中の雑談(「数学」という学問のこと)は面白かった。(41人)
- ・ 進度は決してゆっくりではなかったが、テンポがよかった。
- ・ しんどかったが、力がついたような気がする。
- ・ 特にベクトルが楽しかった。
- ・ 数学は根っこでつながっているのだと知りました。(23人)

このアンケートから、前節のような授業を行うことにより、理系生徒の中に対しても、数学に対する意識・姿勢の向上に効果があったことがわかる。もともと、



理系生徒では、数学に対する嫌悪感や苦手意識は少ないが、これをさらに好転させることができた。授業のほんの一部の雑談や教科書には載っていないような発展的な話題に興味を抱いたり、面白さや驚きを感じられたりする部分ができ、従来の「解説 演習」を繰り返す授業とはかなり異なる反応が理系生徒でもみられた。

また、大多数の生徒にとって、「複素数」、「座標幾何」、「ベクトル」の相互関係を意識する機会が増えたことで、より広い視野で問題を眺めることが可能になった。当然、生徒の中には、受験意識が強く、依然として「問題を解く」ことにも価値を見出している者もいることだろう。しかし、「受験だけの数学で終わらせたくない」という感想が複数の生徒からあがったことから、より抽象的な概念まで含めて関連付けを行う授業には一定の効果があるように思われる。質問(1)のなかでも、「幾何の問題として考えると複雑であったものが、式やベクトルを用いることで容易に考えられる」ことを多くの生徒が指摘していることも、この有効性を支える結果といえる。このように、各単元の内容や概念を、いかに関連付けて指導できるかという観点は、「わかる授業」を構成する上で、重要なポイントになる。

## 7. おわりに

普段の授業では、内容を進めることに多くの教師は必死な面もあり、教材や学習指導法を考察する機会も少なく、演習問題が解けることに重きを置くスタイルが多くなりがちである。本研究を通して、授業対象の生徒が「わかる」状況あるいは「わかる授業」をどのように捉えているか考察した。教師の「わかる授業」の認識との間には差異もあったが、生徒たちの数学観を少しでもよい方向に転換できた。

文系理系を問わず、多くの生徒が「わかる」状況あるいは「わかる授業」を、問題を解く力をつけるものとして捉えていることがアンケート結果から明らかになった。また、授業後のアンケート結果をもとに、2006年度の文系生徒と2007年度の理系生徒の変容を比較することにより、生徒の数学に対する姿勢・意識や予備知識の程度に応じて、「わかる」状況もより多様に変容し得ることもわかった。後述のように、概念間の相互関係を把握するには、基本事項をある程度抑えておく必要があることが、生徒の状況に応じて、「わかる授業」にも段階が生じる一因であるのではないかと考える。

本実践を通して、次のような結論を得ることができた。

生徒自身による作業や数学的な活動を取り入れた授業は生徒の理解を補助する。

身近な生活や既習の内容、既習事項や他教科との関連付けが可能な教材を活用した授業は生徒の理解に対して有効である。

概念間の相互関係を意識して、事象や課題を多角的・多面的に考察する授業も「わかる授業」の一つの側面をなす。

もちろん、先に触れたように、「わかる」という感覚は生徒の能力や経過、状況に応じて当然変化するものであり、これまで考察した内容が、すべての場面、すべての生徒に適するものではなく、さらに対象を広げて有効性を分析する必要がある。平成20年度に川口は同じく5年次で、学校設定科目「総合数学」を担当している。この授業は、数学・数学Bではない「数学基礎に相当する」授業であり、このような授業の観点から、これまで考えてきた「わかる授業」の効果について検証すると同時に、このような授業特有の「わかる授業」を中心とした授業研究を継続したい。

今後は「わかる」状況をいかに評価するのにかについても、更なる検討が必要である。アンケート項目の掘り下げやインタビューの実施などを試行していきたい。

## 参考文献

- [ 1 ] 丹後弘司：「高大連携を志向した高等学校数学の教育課程や教科書の開発研究」、平成17・18年度科学研究費補助金・基盤研究(C) (課題番号 17500585) 研究成果報告書、2007年3月
- [ 2 ] 吉田明史、重松敬一：「わかる算数・数学授業の構築のための基礎的研究」、奈良教育大学紀要、第56巻第1号(127-134)、2007年11月