

# 高校物理における空気抵抗の正しい理解

－風洞実験、理論解析、落下実験とデータ解析を通して－

増井壮太

(奈良教育大学 教科教育専攻 理科教育専修)

片岡佐知子

(奈良教育大学 理数教育研究センター)

中村元彦・常田琢・松山豊樹

(奈良教育大学 理科教育講座 物理学)

## Correct Understanding of Air Resistance in High School Physics:

Through observation of wind tunnel device, theoretical analysis, drop experiment and data analysis

Sota MASUI

(Graduate School of Education, Nara University of Education)

Sachiko KATAOKA

(Center for Educational Research of Science and Mathematics, Nara University of Education)

Motohiko NAKAMURA, Taku TSUNETA, Toyoki MATSUYAMA

(Department of Physics, Nara University of Education)

**要旨：**空気抵抗は高等学校で学習する力学の分野の中で「物体の落下」という単元で取り上げられている。しかし、その内容としては、「空気抵抗は速度とともに増す。空気抵抗があることにより落下速度はやがて一定になる。」としか記載されていない。本研究において、風洞装置を用いて空気抵抗と速度の関係について調べた結果、30 cm 四方の厚紙にはたらく空気抵抗は速度の二乗におおよそ比例することがわかった。物体にはたらく空気抵抗が速度の二乗に比例する場合、物体の質量と終端速度の二乗は比例関係にあるはずである。そこで、実際に高等学校の授業で実践できる空気抵抗と速度の関係を確かめる方法として、物体を落下させた時の終端速度と物体の質量との関係を調べる実験を提案する。

**キーワード：** 空気抵抗 Air resistance  
高校物理 High school physics  
風洞装置 Wind tunnel device

## 1. はじめに

### 1. 1. 空気抵抗

空気抵抗は一般に速度に比例する「粘性抵抗」と、速度の二乗に比例する「慣性抵抗」が存在することが知られている。流体中の物体の運動において、粘性抵抗と慣性抵抗のどちらが優位になるかを決定するのがレイノルズ数である。レイノルズ数とは流体の密度と粘性、物体の代表速度と代表長で表される数である。レイノルズ数が比較的小さい場合、粘性抵抗が慣性抵抗よりも優位になり、物体には速度に比例する空気抵抗がはたらくことになる。対してレイノルズ数が比較的大きい場合には、慣性抵抗が粘性抵抗より優位になり、物体には速度の二乗に比例する空気抵抗がはたらくことになる。

### 1. 2. 高校物理での空気抵抗の取り扱い

現在、高等学校で学習する力学の分野では、ほとんどの場合において空気抵抗を考慮しない運動を考えている。そのような中で空気抵抗の話が出てくるのは、高校物理における「物体の落下」という単元である。雨粒の落下運動を例に挙げ、運動を妨げる向きに空気抵抗がはたらくとき、その大きさは物体の速さとともに増すことを説明している。そして空気抵抗がはたらいっていることで、落下速度は上昇し続けるのではなく、終端速度になり一定になることが説明されている。そして発展として、空気抵抗の大きさと物体の速さの関係について触れている。空気抵抗は物体の速さが比較的小さいときは速さに、速さが大きいときは速さの二乗に比例する、と記載されているが、具体的な物体の速さの数値については言及されていない。

### 1. 3. 本研究の目的

そこで本研究では、まず、実際に物体の速度を変化させたとき、空気抵抗の値はどのように変化するのか調べることが目的とした。次に、実際に高等学校の授業で実践できる空気抵抗と速度の関係を確かめる方法を提案することを目的とした。

## 2. 風洞実験による空気抵抗の評価

### 2. 1. 実験方法

実際に空気中で物体を運動させ、空気抵抗を測定することは非常に困難である。そこで今回は風洞装置と力学台車を用いて疑似的に空気抵抗を測定することにした。風洞装置から発生させる風の速度を段階的に変化させ、その風を受けた力学台車に働く空気抵抗の大きさをバネばかりで測定しようというものである。図1に実験の様子を示す。

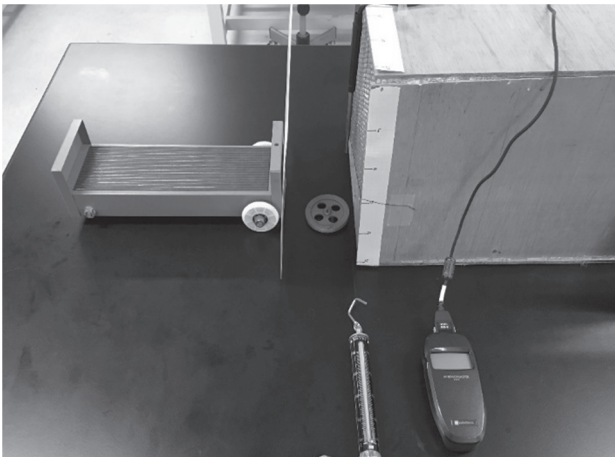


図1. 空気抵抗測定実験の様子

#### <実験器具>

- ・風洞装置（自作物 2. 2. にて後述）
- ・力学台車（今回、空気抵抗の変化を見やすくするために 30 cm 四方の厚紙で代表面積を増やした）
- ・バネばかり（秤量 2 N）
- ・携帯型風速計（カノマックス社 ANEMOMASTER）
- ・定滑車（机に固定）
- ・糸（力学台車とバネばかりを滑車を經由してつないでいる）

今回、力学台車と風洞装置の送風口との距離を縮めるために定滑車を用いた。また、金網を用意し、風洞装置の吹込口に於てがう金網の枚数を変えることで、風速を段階的に変化させることとした。

### 2. 2. 風洞装置

今回使用した風洞装置は、私が所属する研究室で過去に製作されたものである。風洞装置とは、人工的に整流

された風を発生させ、実際の流れの場を再現するための装置である。実際に空中を飛行する、すなわち流体の中で運動する物体について詳細な観測や解析を行うことは困難である。そこで、物質を固定した状態で周りの流体を動かすことで、局所的な風速や圧力分布、はたらく力や流れの可視化を詳細に観測しよう、というものである。図2に今回用いた風洞装置の模式図を示す。

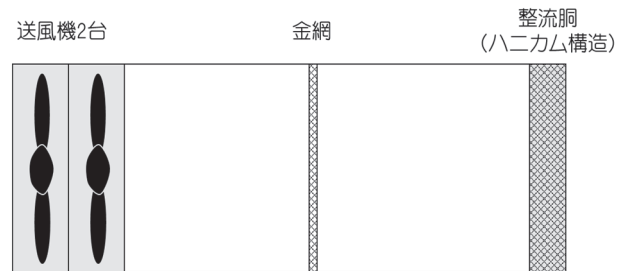


図2. 風洞装置の模式図

風洞装置を用いる目的は様々で、飛行機の翼周りの風の流れの観測<sup>(1)</sup>や建物の耐風性の検証<sup>(2)</sup>、自動車にかかる空気抵抗低減技術の開発<sup>(3)</sup>などが主な用途として挙げられる。今回は物体にはたらく空気抵抗の大きさを測定する目的で使用した。

## 3. 実験結果、考察

### 3. 1. 実験結果

図3に実験結果を示す。

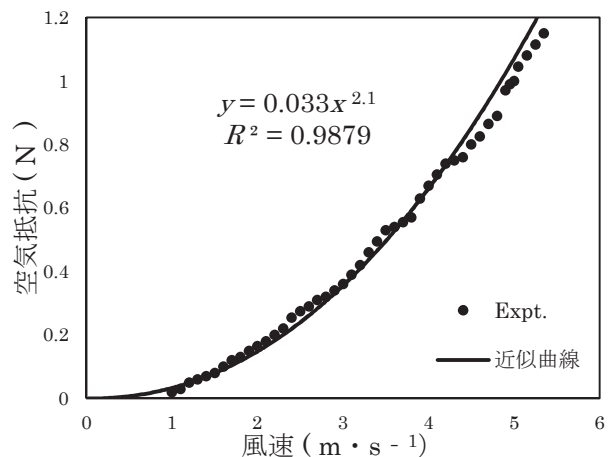


図3. 風速と空気抵抗の関係

図3の丸印は測定値、実線はべき関数で近似した曲線である。近似曲線のべき指数が2に近くなっているので、空気抵抗はおおよそ速度の二乗に比例していることがわかる。すなわち、慣性抵抗が粘性抵抗よりも優位にはたらくことがわかった。

### 3. 2. レイノルズ数

もちろん、流体中の物体の形状や大きさによってどち

らの抵抗が優位になるかは変わってくる。

ここでレイノルズ数について考察する。一般に、球におけるレイノルズ数  $Re$  は (1) 式で与えられることが知られている。(4)

$$Re = \frac{v\rho a}{24\eta} \quad (1)$$

ここで、 $\eta$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ ] は空気の粘性率、 $\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ] は空気の密度、 $v$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] は球の速度、 $a$  [ $\text{m}$ ] は球の半径を表す。粘性抵抗と慣性抵抗の大きさが等しいとき、レイノルズ数は 1 になる。したがって、 $1 > Re$  の場合は粘性抵抗が優位にはたらく、 $1 < Re$  の場合には慣性抵抗が優位にはたらく。

このことから、空気の粘性率を  $18.2 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ 、空気の密度を  $1.205 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  とした場合、半径  $0.02 \text{ m}$  のピンポン玉の速度が約  $0.02 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  以下の場合に粘性抵抗が優位にはたらくことがわかる。これはピンポン玉を自由落下させた場合、手を離してから約  $0.06$  秒間は粘性抵抗が優位にはたらくということになる。したがってピンポン玉にはたらく空気抵抗は、落下させてから  $0.06$  秒間は速度に比例する力が優位だが、 $0.06$  秒以降は速度の二乗に比例する力が優位であるということを示している。

このことを踏まえて先程の実験結果を見てみると、測定された範囲で空気抵抗が風速のおおよそ二乗に比例していることから、速度  $0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  からのごく僅かな立ち上がりのみで粘性抵抗が優位にはたらく、それ以降は慣性抵抗が優位であるということが予想される。

#### 4. 空気抵抗影響下の落下運動の理論的解析

どちらの抵抗が優位になるかは、物体の大きさとその速度が関係していることがわかった。そして、少なくともピンポン玉より大きな球においては、粘性抵抗が優位にはたらくのは、ごく限られた範囲であることがわかった。このことから、高校の教科書に記載されている「空気抵抗は速度に比例する」という状況は非常に限定的な場合であると言える。そこで、本研究では高等学校でも実践できる空気抵抗と物体の速度の関係がわかる実験を提案する。

そのための理論的解析を行う。物体を自由落下させるという状況において、(a) 空気抵抗がない場合、(b) 速度に比例する空気抵抗がはたらいている場合、(c) 速度の二乗に比例する空気抵抗がはたらいている場合についてそれぞれ運動方程式を解き、落下の速度や位置を比較する。今回は鉛直下向きを正とした。

(a) 空気抵抗がない場合：運動方程式は、 $ma = mg$  で表される。ここで  $m$  は落下する物体の質量、 $g$  は重力加速度を表す。従って、時刻  $t$  での速度  $v$  および落下距離  $y$  は、 $v = gt$ 、 $y = \frac{1}{2}gt^2$  となる。この場合、 $t \rightarrow \infty$  の時の速度、

すなわち終端速度は  $\infty$  となる。

(b) 速度に比例する空気抵抗がはたらいている場合：運動方程式は、

$$ma = mg - kv \quad (2)$$

となる。ここで  $k$  は空気抵抗係数である。(2) 式より、

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right) \quad (3)$$

が得られる。(3) 式を変数分離し、その両辺を積分すると、

$$\int \frac{dv}{\left(v - \frac{mg}{k}\right)} = -\frac{k}{m} \int dt, \quad (4)$$

$$\log\left|v - \frac{mg}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C \quad (5)$$

となる。ここで、 $C$  は積分定数である。(5) 式より、

$$v = De^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (6)$$

が求まる。ただし、 $D = e^C$  である。初期条件  $t = 0$  のとき  $v = 0$  なので、 $D = -\frac{mg}{k}$  となり、

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \quad (7)$$

が導かれる。

(7) 式から、 $t \rightarrow \infty$  の時の速度、すなわち空気抵抗が速度に比例するときの終端速度  $v_1^\infty$  は

$$v_1^\infty = \frac{mg}{k} \quad (8)$$

となる。

さらに、速度を積分すると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{mg}{k} \int \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) dt, \\ &= \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + C \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで  $C$  は積分定数である。初期条件  $t = 0$  のとき  $y = 0$  なので、 $C = -\frac{m^2g}{k^2}$  である。従って、

$$y = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) \quad (10)$$

となる。

ここまでは高校で学習する内容である。数Ⅲの積分が出てくるが、計算自体は難しいものではない。問題は速度の二乗に比例する空気抵抗がはたらいている場合である。

(c) 速度の二乗に比例する空気抵抗がはたらいている場合：運動方程式は、

$$ma = mg - k'v^2 \quad (11)$$

となる。ここで  $k'$  は空気抵抗係数である。 $\frac{k'}{mg} = \alpha^2$  とおくと、

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - \alpha^2 v^2) \quad (12)$$

となる。ここで変数分離と部分分数分解を利用して積分を行うと、

$$\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1-\alpha v} + \frac{1}{1+\alpha v} \right) dv = g \int dt, \\ -\log|1-\alpha v| + \log|1+\alpha v| = 2gat + 2C \quad (13)$$

となる。ここでCは積分定数である。(13)式を変形して、

$$\log \left| \frac{1+\alpha v}{1-\alpha v} \right| = 2gat + 2C, \\ \left| \frac{1+\alpha v}{1-\alpha v} \right| = e^{2(gat+C)} \quad (14)$$

となる。ここで、(14)式の左辺の分母の正負によって場合分けをする必要がある。すなわち

$$v = \frac{1 \pm e^{2(gat+C)} - 1}{\alpha 1 \pm e^{2(gat+C)}} = \frac{1 \pm e^{(gat+C)} - e^{-(gat+C)}}{\alpha \pm e^{(gat+C)} + e^{-(gat+C)}} \quad (15)$$

となる。(15)式において、 $0 < v < \frac{1}{\alpha}$  のとき、 $\frac{1}{\alpha} < v$  のとき-をとる。

さらに、 $\sqrt{\frac{mg}{k'}} = \beta$ 、 $\sqrt{\frac{k'g}{m}} = \gamma$  とおいて (15)式を書き直すと、

$$v = \beta \frac{\pm e^{\frac{t}{\gamma}+C} - e^{-\frac{t}{\gamma}+C}}{\pm e^{\frac{t}{\gamma}+C} + e^{-\frac{t}{\gamma}+C}} \\ = \beta \tanh\left(\frac{t}{\gamma} + C\right) \quad (0 < v < \beta) \quad (16)$$

$$= \beta \left( \tanh\left(\frac{t}{\gamma} + C\right) \right)^{-1} \quad (\beta < v) \quad (17)$$

となる。

初期条件 $t = 0$  のとき  $v = 0$  なので、 $C = 0$ となる。

したがって、 $v = \beta \tanh\left(\frac{t}{\gamma}\right)$ 、すなわち

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k'}} \tanh \sqrt{\frac{k'g}{m}} t \quad (18)$$

となる。また、速度を積分して、

$$y = \sqrt{\frac{mg}{k'}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k'g}} \log \left| e^{\sqrt{\frac{k'g}{m}} t} + e^{-\sqrt{\frac{k'g}{m}} t} \right| + D \quad (19)$$

となる。ここでDは積分定数である。初期条件 $t = 0$  のとき  $y = 0$  なので、 $D = -\frac{m}{k'} \log 2$ となる。したがって、

$$y = \frac{m}{k'} \log \left| \cosh \sqrt{\frac{k'g}{m}} t \right| \quad (20)$$

が求まる。

以上の導出において、速度の二乗に比例する空気抵抗がはたらいている場合の運動における速度、及び位置を

表すことができる。双曲線関数が現れており、これは高校の範囲から逸脱した内容であるが、指数関数、積分の公式、双曲線のグラフさえ理解すれば計算することができる。

こうして求められた落下運動において、(a) 空気抵抗がない場合、(b) 速度に比例する空気抵抗がはたらいている場合、(c) 速度の二乗に比例する空気抵抗がはたらいている場合、それぞれについて落下速度の時間変化(図4)、及び位置の時間変化(図5)を比較する。今回は自由落下させる物体をピンポン玉(直径4cm、質量3g)とした。

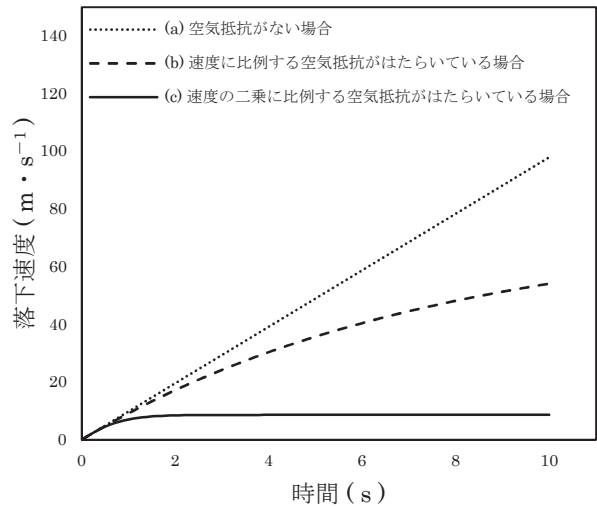


図4. 落下速度の時間変化

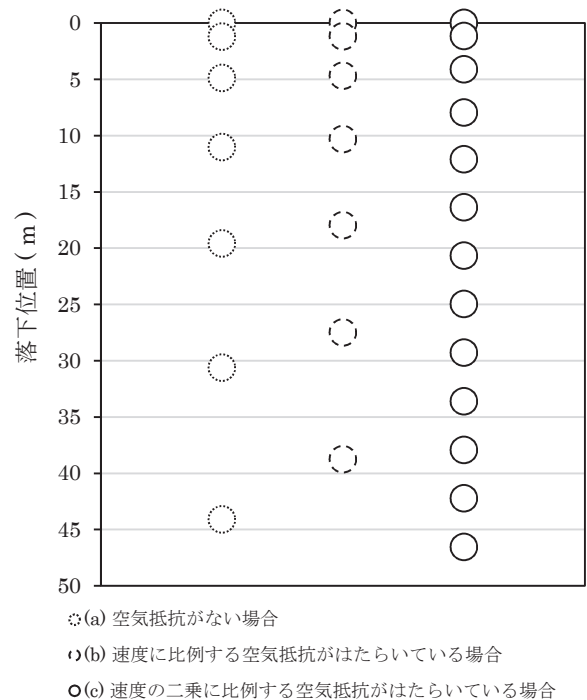


図5. 0.5秒毎の位置の時間変化

図4より、空気抵抗が速度に比例するのか、速度の二乗に比例するのかによって、終端速度に至る時間が明らかに異なることがわかる。また、図5からも、落下の様子は明らかに異なることが見てとれる。このように、空気抵抗は速度に比例すると仮定して計算した結果と、実際に運動させた時の挙動（おおよそ速度の二乗に比例する空気抵抗がはたらいっている）との間には大きなギャップがあることが予想される。そこで、実際に運動させた場合の物体にはたらく空気抵抗と物体の速度との関係を確認する実験を提案する。

### 5. 空気抵抗の速度依存性を判別する実験の提案

空気抵抗と速度の関係を確認する実験を行う。しかし、高校が保有するであろう測定機材で実際に運動中の物体にはたらく空気抵抗の大きさを測定し、その時の物体の速度との関係を見ることは非常に困難である。そこで今回は、終端速度に着目した。

まず、空気抵抗を速度に比例するとした場合の終端速度  $v_1^\infty$  を考える。運動方程式の(2)式より、終端速度に達した場合、加速度は0になるので、

$$0 = mg - kv_1^\infty \quad ,$$

すなわち

$$v_1^\infty = \frac{mg}{k} \quad (21)$$

となる。

次に、空気抵抗を速度の二乗に比例するとした場合の終端速度  $v_2^\infty$  を考えると、運動方程式より、終端速度に達した場合、加速度は0になるので、

$$0 = mg - k(v_2^\infty)^2 \quad ,$$

すなわち

$$v_2^\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (22)$$

となる。

(21)式及び(22)式から分かるように、質量を変化させたときの終端速度の振る舞いが、空気抵抗を速度に比例するとした場合と速度の二乗に比例するとした場合とで異なることがわかる。すなわち、質量と終端速度の関係をみれば、空気抵抗と速度の関係がわかるはずである。そこで、質量と終端速度の関係を確認するために以下のような実験を行った。

まず風船を用意する。(風船に限らず質量が小さく、表面積が大きい物体であればよい。)これは、自由落下させた時により早く終端速度に達するためである。壁に10cm間隔で目盛りを書き、その前を風船が落下する様子を、2mほど離れた位置から高速度カメラ(CASIO, EXILIM EX-F1)で撮影する。撮影した映像をパソコンに取り込み、10cm落下するのに要した時間を計測する。5回測定を繰り返し、10cm落下するのに要した時間が

一定になったところの速度を平均して終端速度とする。

続いて風船にクリップを引っ掛け、わずかに質量を大きくした状態で同じ作業を繰り返し、その質量での終端速度を求める。徐々にクリップの数を増やしていき、終端速度が観測できなくなるまで繰り返す。風船にクリップを引っ掛けている様子を図6に示す。

この実験から得られた質量と終端速度の二乗の関係を図7に示す。図7の丸印は測定値、実線は近似直線である。実験結果より、風船の質量と終端速度の二乗は比例関係にあると言える。したがって、風船にはたらく空気抵抗は物体の速度の二乗に比例することが確認できた。

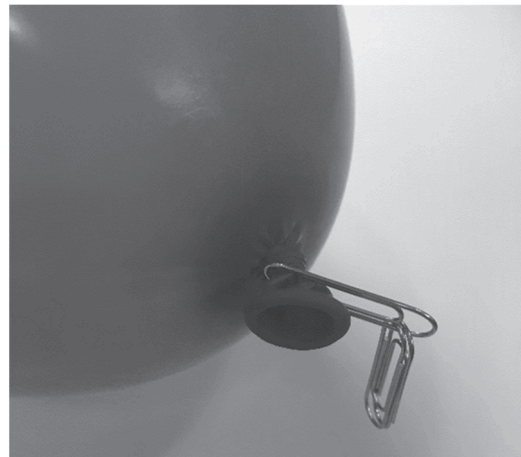


図6. 風船にクリップ3つを引っ掛けている様子

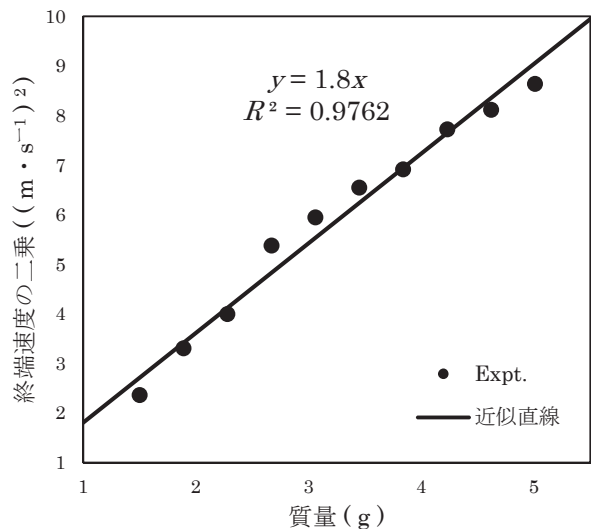


図7. 質量と終端速度の二乗の関係

### 6. まとめ

高校物理において空気抵抗を学習した際には、ほとんどすべての教科書で、「物体の速さが比較的小さいとき、落下する物体にはたらく空気抵抗はその物体の速さに比例する」と習う。しかし、それが実現される条件はかなり狭い範囲に限定されることがわかった。おそらく高校

で実現可能な実験でこのことを確かめるのは難しいだろう。むしろ、通常、入手可能な物体や測定器、測定環境では、落下物体にはたらく空気抵抗はその物体の速度の二乗におおよそ比例すると言えるだろう。

本論文では、正確な理論的評価を行い、風船を用いた具体的な実験で空気抵抗が速度の二乗に比例することが確かめられることを示した。実験を通して、教科書の記述からでは分からなかったことに気づき、空気抵抗に対する理解を深められるのではないかと考えられる。

今回は測定の精度を上げるために高速度カメラを使用した。現場で高速度カメラを用意できない場合は通常のビデオカメラやスマートフォンのカメラで録画したものをスローで再生することで、おおよその値を計測することができると思われる。

また、落下途中の物体の速度を理論的に算出するために、運動方程式を解いた。この際、双曲線関数が出てくるため高校の範囲を逸脱してしまった。しかしながら、終端速度にのみ注目すると、すべては単純な計算に帰着させられ、高校の範囲に十分に収まる。すなわち、高校

の範囲で、落下する物体にはたらく空気抵抗は、その物体の速度の二乗に比例することを、理論的にも実験的にも示せる。

今後も、本論文で行ったような理論的にも実験的にも丁寧なフォローアップにより、高校生に自然現象のより正確な理解を伝えていければと考える。

#### 参考文献

- (1) 大型低速風洞の動力付模型試験システム：中谷輝臣、野中修、室田勝一、近藤洋史、林良生 航空宇宙技術研究所報告 (2000)
- (2) 新湊大橋の鋼桁耐風対策について：由井陸粹、山本修司、森川陽介、中垣毅、森越健二 沿岸技術研究センター論文集 No.13 (2013)
- (3) 自動車の空気力学：石原裕二（日産自動車（株））ながれ 21 (2002) P.62-P.67
- (4) 物理学序論としての力学：藤原邦男 東京大学出版会 (1984)