空間図形の理解に関する調査研究

― 小・中学生の見取図の理解に関して ―

近　藤　　　裕　奈良教育大学数学教育講座（数学教育学）
熊　倉　啓　之　静岡大学数学教育講座（数学教育学）
國　宗　　　進　静岡大学名誉教授（数学教育学）
藤　田　太　郎　エクセター大学教育学研究科，英国（数学教育学）

Students' understanding of Spatial Geometry:

Case of 2D representations of Cubes

KONDO Yutaka
(Department of Mathematics Education, Nara University of Education)
KUMAKURA Hiroyuki
(Department of Mathematics Education, Shizuoka University)
KUNIMUNE Susumu
(Professor Emeritus, Shizuoka University)
FUJITA Taro
(Graduate School of Education, University of Exeter, UK)

Abstract

It is important for students to have sound understanding about 2D representations of 3D shapes because they are a means of representing various 3D solids as well as being useful in various everyday situations. However, it is reported that many students have difficulties in working with such representations. In order to gain insights to tackle students' difficulties, we conducted a survey among 1357 students in Grades 4-9, focusing on their understanding of 2D representations of cubes. We examined their answers and reasoning both quantitatively and qualitatively, in particular focusing on how they visualize shapes in the given diagrams and make use of 'diagonals' and their relationships with angles and lengths to solve problems. We concluded that students' difficulties might come from their understanding of 'diagonals' and suggest that students should be given more opportunities to consolidate their understanding of diagonals, manipulate and reason 3D shapes.

キーワード：空間図形，操作，推論，見取図，立方体

Key Words: Spatial geometry, Manipulation, Reasoning, 2D representation of 3D shapes, Cube

１．はじめに

1. 1. 問題の所在

子どもの空間図形の理解については，特に個人差が大きく，またその達成の状況はそれほど好ましいものではないことが指摘され続けている（例えば，熊倉他，2000）。その改善を目指して，空間図形の学習指導について多くの研究と実践が積み重ねられてきた（例えば，太田，2014；渡辺，2014；澁谷，2016など）。それにもかかわらず，その理解に関する問題点の改善については，まだ一層の検討が必要な状況である。

見取図の学習指導は，小学校第4学年の算数科に始ま

り，その後の算数・数学学習において立体図形を平面上に示す表現方法の一つとして，大きな位置を占め続けていく。小・中学校では実物や模型等を使ってより具体的なイメージを持って学習が進められていくであろうが，その場合にも2次元平面に立体を表現する手段として見取図が多用される。それほどまでに見取図に表したりそれを読み取ったりすることは，算数・数学科における重要な学習内容であり，また3次元の世界そのものである日常生活との関連も大きい。ところが，それに関する理解はそれほど好ましいものではない。中学生や高校生になっても理解が深まらない実態があるとすれば，各学校段階を見通して，意図的・系統的な見取図の学習指導のあり方を検討することは意義あることである。

筆者らは，空間図形に関して一層深い理解を目指すべきであるとの立場に立ち，特に小学校算数科・中学校数学科における空間図形の理解を深める学習指導のあり方を追究している。これまでの研究では，中学生を中心に研究を進めてきたが，そこでの継続研究の成果を踏まえて，本稿では，小学校4年から中学校3年までの6学年にわたる児童・生徒を対象にして，特に見取図に焦点を当てて，空間図形の理解に関する発達の様相を明らかにすることを目指す。

1.2. 研究の目的と方法

本研究の目的は，小・中学生の空間図形の理解に関する実態をとらえ，その発達の様相を明らかにして，空間図形についての好ましい学習指導のあり方を追究することである。本稿では，特に，立方体の見取図の理解に関する，小学校4年から中学校3年までの児童・生徒の実態の概要を明らかにすることを目指す。

算数・数学科において，見取図に関する学習は，立方体・直方体に関連して小学校4年に位置付けられている。その後，小学校5，6年において角柱・円柱を知り，立方体・直方体の計量を，そして中学校1年で錐体を含む空間図形の基本的な概念を学習する。続いて，中学校2年で図形の論証の学習が始まり，中学校3年では三平方の定理を用いた空間図形の計量を扱う。以上のような学習指導が行われていることを踏まえて，小4から中3までを調査対象とした。

本研究の方法は，次の通りである。

(1) これまで本研究で用いてきた中学生を対象とした調査問題を修正・再構成し，小・中学生を調査対象として空間図形の理解の状況をとらえるための調査問題を作成する。

(2) (1) で作成した調査問題を用いて小4から中3までを対象に調査を実施する。

(3) 調査結果を分析・検討し，空間図形の理解に関する小・中学生の実態を明らかにして，学習指導への示唆を得る。

2. 研究の経過

2.1. 本研究の枠組みと経過

筆者らは，空間図形に関する問題の解決で要求されることの分析や，授業での子どもたちの考え方の特徴等をもとに，「空間図形の理解の様相をとらえるための観点」として，次のア～エの4点を設定し（熊倉他，2000），研究を進めている。

ア．基本的な立体図形に関する理解

イ．空間における直線や平面に関する理解

ウ．空間図形の操作能力

エ．空間図形への活用能力

ウ．の「操作」とは，見取図表現，展開，運動，切断，投影，視点や対象の移動等を指している。これは，単に図形を観察するだけにとどまらず，自ら図形に働きかけて推論を進めていくことに関するものである。

これまでに，調査研究や授業研究を通して，これらに関する小・中学生の理解の状況を明らかにしてきた（熊倉他，2002；近藤他，2011）。特に，「空間図形の活用能力」については，見取図上での見えが問題の解決に大きな影響を与えていること，空間図形の内部を通る1つの平面を想定して思考を進めることの困難性など，子どもの理解の特徴を明らかにした。また，調査や授業を通して得た子どもの理解の状況や考え方を分析・考察して，その発達の水準を設定し分析の枠組みを明確にするとともに，その立場から子どもの思考の様相を明らかにしてきた。（八田他，2001；Fujita, et al., 2017）。さらに，小学校において，見取図の理解を促進させるための実験授業（下村・近藤，2015）を試みてきた。

2.2. 空間図形についての活用能力に関する水準

筆者らは，これまでの研究の中で，立方体の見取図において一つの平面を想定し，その平面上で思考を進めることが要求される問題解決の場面においては，「操作」と「推論」の2つが重要な視点であると考えて，「空間図形についての活用能力に関する水準」を以下のように設定している（熊倉他，2002；Fujita, et al., 2017）。

〔水準Ⅰ〕直観的にだけ判断してしまう。

〔水準Ⅱ〕直観的に判断してしまうことなく，

〔Ⅱa〕論理的に考察しようとするが，正しい結論が得られない。

〔Ⅱb〕不適切な操作を加えて考察し，正しい結論が得られない。

〔Ⅱc〕適切な操作を加えて考察するが，正しい結論が得られない。

〔水準Ⅲ〕適切な操作を加えて論理的に考察し，正しい

結論を得ることができる。

この水準は，今回の調査においても，空間図形についての子どもの理解の水準を分析するにあたって重要な役割を果たす。

3．立方体の見取図の理解に関する調査

3. 1. 調査の概要

立方体の見取図の理解に関して，小・中学生の実態を明らかにすることをねらいとして，次の調査を実施した。

3. 1. 1. 調査対象・調査方法

調査対象は，公立小学校4，5，6年生（静岡，東京および近畿地区），そして公立中学校1，2，3年生（静岡，東京）である。

調査人数は，小4が261名，小5が213名，小6が209名，そして中1が225名，中2が224名，中3が225名，総計1357名である。

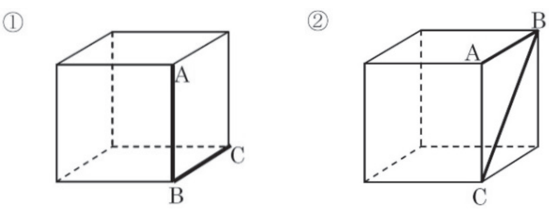
調査時期は2017年度および2018年度の2～3月（近畿地区の5，6年は2017年11月実施）であり，小・中学校それぞれにおいて，同一問題を用いて実施した。

3. 1. 2. 調査問題

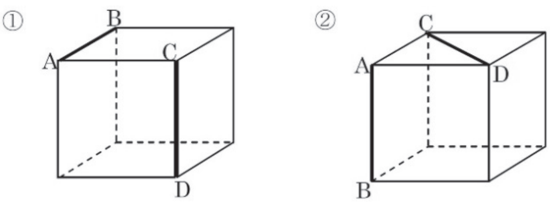
対中学生用問題は，以下の問題1～問題5の8つの小問からなっている。

<調査問題・対中学生用>

1　次の図①，②は，いずれも立方体の見取図です。∠ABCは何度ですか。



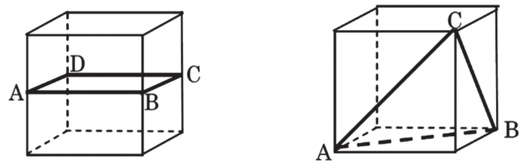
2　次の図①，②は，いずれも立方体の見取図です。①，②の図で，線分ABとCDの長さを比べたとき，どちらが長いですか。図の下のア～エから正しいものを1つ選んで，○をつけなさい。



ア　ABの方が長い　　（①②共に選択肢は共通）
イ　CDの方が長い
ウ　ABとCDの長さは等しい
エ　どちらともいえない

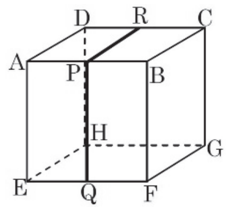
3　次の図①，②は，いずれも立方体の見取図です。①，②の図で，太線で囲まれた図形はどんな図形ですか。図の下のア～オから最も適切なものを1つ選んで，○をつけなさい。ただし，図①のA，B，C，Dは立方体の辺の中点です。

①　四角形 ABCD　　　②　三角形 ABC

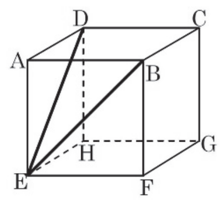


①	②
ア　平行四辺形	ア　直角三角形
イ　ひし形	イ　二等辺三角形
ウ　長方形	ウ　直角二等辺三角形
エ　正方形	エ　正三角形
オ　ふつうの四角形	オ　ふつうの三角形

4　右の図は，立方体ABCD-EFGHの見取図です。辺AB，EF，DCの中点をP，Q，Rとするとき，∠RPQは何度ですか。



5　右の図は，立方体ABCD-EFGHの見取図です。点Eから，点B, Dにそれぞれ線分EB，EDをひきます。このとき，∠BEDは何度ですか。また，その理由を書きなさい。



対小学生用調査は，上記の問題1～問題3の6つの小問からなっていて，問題2の①②については，選択の理由を書かせるようにしてある。

3. 2. 問題作成の意図

本研究ではこれまで，中学校生徒を対象にして調査を行ってきた。そこでの調査問題は，上記問題のうち，問題1，2，5の3つの大問からなっていた。ただし，問題2においては，2つの線分の長さを比較し選択肢で解答するという同種の小問がもう2問あり，計4つの小問で構成されていた。これらに対する生徒の解答の分析，特に問題5の理由の記述の分析によって，生徒の理解の様相を明らかにすることができた（例えば八田他，2001；熊倉他，2002；Fujita, et al.，2017）。

しかしながら，問題1，2の正答率と問題5の正答率

の差が大きく，それらの中間段階の理解度も把握したいと考えて，今回の調査では問題3，4を新たに追加して，生徒の理解の様相をより一層明らかにしようと考えた。問題3，4はいずれも切断面の形を問うものであり，与えられた見取図からそれをイメージし，その上で推論を働かせることができるかどうかをとらえることがねらいである。特に問題3②は，問題5を考える上でのヒントになっているとみることもできる。

なお，現行の教育課程では見取図は小4で学習するので，問題を基本的なものに制限して小学校4，5，6年生も対象に加えて調査を行うことにした。

4．調査結果とその分析・考察

4.1. 全体的な傾向

4.1.1. 小中共通問題の結果

小・中学生に共通する問題1～3の，学年ごとの正答率は表1の通りである。なお，本稿におけるすべての表の数値は，小数第2位を四捨五入したものである。

表1　小中共通問題の正答率（数値は%）

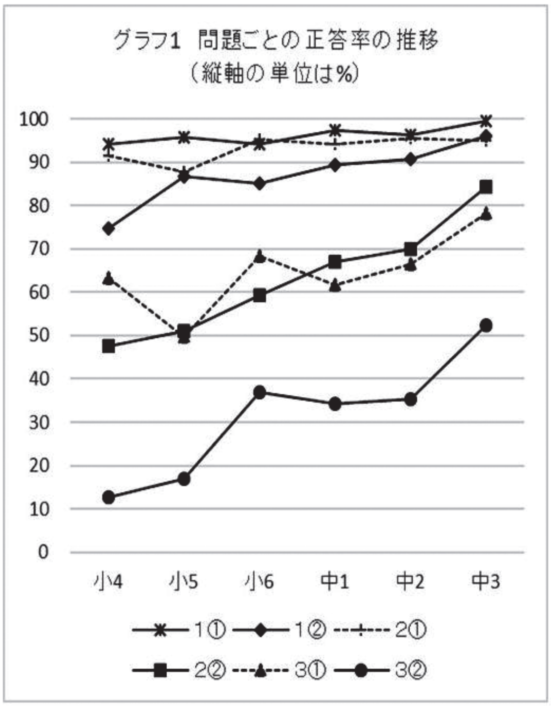
問題	1①	1②	2①	2②	3①	3②
小 4	94.3	74.7	91.6	47.5	63.2	12.6
小 5	95.8	86.9	87.8	51.2	49.8	16.9
小 6	94.3	85.2	95.2	59.3	68.4	36.8
中 1	97.3	89.3	94.2	67.1	61.8	34.2
中 2	96.4	90.6	95.5	70.1	66.5	35.3
中 3	99.6	96.0	95.1	84.4	78.2	52.4

また，問題ごとの学年別の正答率の推移を折れ線グラフに表すと，グラフ1を得る。なお，3.1.1.に示した通り，本調査は，地区によって実施時期が若干異なること，また，小6から中1へ進むにあたり私立学校に進学する子どもが多い傾向がある地区を含むことの背景をもつ。本稿では，それらを区別することなくデータをまとめていて，以下の分析と考察は，そのもとに行うものである。

表1，グラフ1から，小・中共通問題1～3に関する全体的な傾向として，以下の特徴を指摘することができる。

まず，問題1①，問題2①については，どの学年においても90%程度の高い正答率が得られている。次に高いのが問題1②である。それら3問の群から少し離れて問題3①と問題2②がある。この2問は比較的似た正答率の傾向を示している。問題3②は，どの学年においても正答率が大きく下がり，中3でも50%程度である。

問題1②，2②，3②については，学年進行に伴い正答率が上昇する傾向が読み取れる。一方で，前の学年が後の学年の正答率を上回る問題が一部にみられる（例えば，問題2①と問題3①は，小4が小5を上回っている）。



4.1.2. 対中学生問題の結果

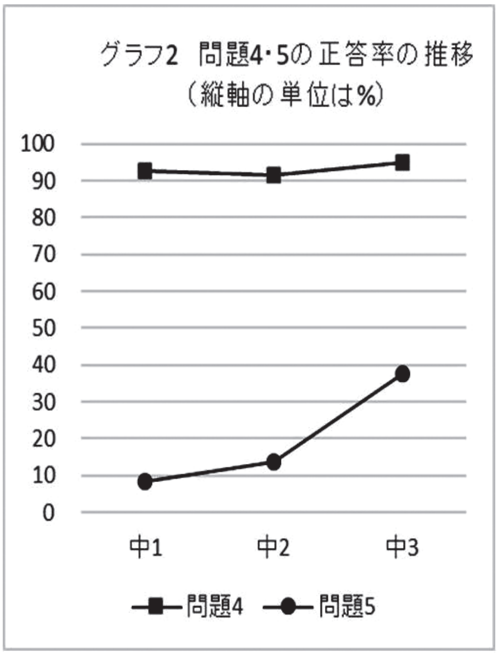
中学生のみが対象である問題4，5の正答率，および学年ごとのその推移は，表2，グラフ2の通りである。なお，問題5の正答とは，「60°と解答しその理由も正しい解答」であるものを指す（「理由が正しい」ことの判断に関しては4.2.5.で詳述する）。

表2　問題4・5の正答率（数値は%）

	問題 4	問題 5
中 1	92.9	8.4
中 2	91.5	13.8
中 3	95.1	37.8

表2およびグラフ2から，全体的な傾向として，問題4は学年に関わらず90%程の高い正答率を得ていること，問題5の正答率は，中1と中2で10%程であり，中3で顕著な伸びを見せるものの40%程度である，といった特徴があげられる。

以下では，これらの傾向を，問題ごとにより精緻に分析・考察する。



4.2. 問題ごとの分析・考察

4.2.1. 問題1の解答

問題1の2問は，見取図で表された立方体の面上にある角の大きさを求めるものである。対中学生用では「∠」の記号を使い，対小学生用では「角ア」などの表現にしている。解答率は，表3の通りである。

表3　問題1の解答率（数値は%）

問題1	①			②		
	90° 正答	他	無答	45° 正答	他	無答
小4	94.3	5.0	0.8	74.7	23.0	2.3
小5	95.8	4.2	0.0	86.9	12.7	0.5
小6	94.3	5.3	0.5	85.2	14.8	0.0
中1	97.3	2.7	0.0	89.3	9.3	1.3
中2	96.4	2.2	1.3	90.6	7.6	1.8
中3	99.6	0.4	0.0	96.0	4.0	0.0

表3から，次のことが指摘できる。

1）①の正答率は，小4の段階から90数%と高い。立方体については，小2で「さいころの形」と呼んで学習し始めるが，そこでの学習が生き，見取図から立方体を想起し，その各面が正方形であって4つの角は直角であると判断することができている。

2）②の正答率は，小4 ～ 6でも75 ～ 85%程である。中1からはほぼ90%となり，中学校で導入されるA，Bや∠の記号等に関する学習が定着していることもうかがえる。その一方で，小4 ～中1では，問題①に比べると10 ～ 20%程正答率が低下していて，誤答の中では，小4 ～ 6では「60°」や「30°」が目に付く。

4.2.2. 問題2の解答

問題2の2問は，見取図で表された立方体の辺や面上にある線分の長さを比較するものである。①は，実際は同じ長さだが，見取図上では異なるように見える2辺，②は，実際には長い方が，見取図上では短いように見える線分の比較の問題である。問題は小中共通であるが，対小学生用には選択の理由を記述させている。解答率は，表4，表5の通りである。

表4　問題2①の解答率（数値は%）

問題2①	ア	イ	ウ 正答	エ	無答
小4	0.0	5.7	91.6	1.9	0.8
小5	0.9	8.9	87.8	1.9	0.5
小6	0.5	3.3	95.2	1.0	0.0
中1	0.9	4.0	94.2	0.9	0.0
中2	0.4	1.3	95.5	1.8	0.9
中3	0.4	1.8	95.1	2.7	0.0

表5　問題2②の解答率（数値は%）

問題2②	ア	イ 正答	ウ	エ	無答
小4	11.1	47.5	33.3	2.7	5.4
小5	12.2	51.2	31.0	4.7	0.9
小6	7.7	59.3	30.6	1.9	0.5
中1	9.8	67.1	21.3	1.8	0.0
中2	9.4	70.1	17.9	2.2	0.4
中3	9.3	84.4	4.4	1.8	0.0

表4，表5から，次のことが指摘できる。

1）①の正答率は，小6 ～中3でおよそ95%であり，小学校段階においても立方体の辺の長さが等しいことはよくとらえられている。小4と小5では「イCDの方が長い」を選択した解答がそれぞれ，5.7%，8.9%あった。そう判断した根拠としては，「みて，イの方が長いから」，「CDの方が何ミリか長い」や「縦だから」等と書かれている。こうした記述をした子どもは，見取図上での長さの関係は見た目では判断できないことが，とらえられていないと考えられる。

2）②の正答率は，小4は50%弱，小5，6では50%台にとどまっていて，①の正答率に比べてかなり低い。小

4～6の誤答では「ウ両方の長さは等しい」を選択した解答が30%を超えていて，見た目で判断したと考えられる解答アより多い。そう判断した根拠としては，「立方体はすべての面の面積も辺の長さも等しいから」，「立方体はすべての辺の長さが等しいから」と書いたものがほとんどであり，中には「ななめでもたてでも横でも同じだから」，「CDをCAにしてみると同じ長さになるから」という記述もみられた。このようにABは辺でありCDは対角線であることが読み取れない者がいるものの，正答率は学年進行とともに着実に高くなっていて，正方形の対角線の長さの方が1辺の長さよりも長いことは直観的にとらえられるようになっていると推察する。

一方，この問題の正答率は，中3で84.4%に達している。三平方の定理に関する学習によって，見取図を読みとることがより確かにできるようになった結果であろう。

4. 2. 3. 問題3の解答

問題3は，問題1，2と問題5との中間段階をみる問題として設定し，立方体を一平面で切断してできる面の形を判断するものである。なお，問題3②の選択肢「ウ」の表現については，調査時点における既習の用語を考慮して，対中学生用では「直角二等辺三角形」，対小学生用では「直角がある二等辺三角形」としている。解答率は，表6，表7の通りであり，これらの表から，次のことが指摘できる。

表6　問題3①の解答率（数値は％）

問 3①	ア	イ	ウ	エ 正答	オ	無答
小 4	10.7	3.1	18.8	63.2	2.3	1.9
小 5	13.1	1.9	30.5	49.8	4.2	0.5
小 6	7.7	1.4	20.1	68.4	2.4	0.0
中 1	9.8	0.4	23.1	61.8	4.9	0.0
中 2	9.8	0.9	18.8	66.5	3.1	0.9
中 3	5.3	0.0	13.3	78.2	3.1	0.0

表7　問題3②の解答率（数値は％）

問 3②	ア	イ	ウ	エ 正答	オ	無答
小 4	11.9	46.7	10.0	12.6	16.5	2.3
小 5	16.4	42.3	9.9	16.9	14.1	0.5
小 6	7.7	31.6	12.0	36.8	11.5	0.5
中 1	8.9	33.3	11.6	34.2	12.0	0.0
中 2	5.4	33.0	21.4	35.3	4.0	0.9
中 3	4.9	26.7	12.0	52.4	4.0	0.0

1）①の正答率は，小4で63.2%，小5で49.8%，小6～中2では60%を超えていて，中3で78.2%である。誤答の中では，「ウ長方形」を選択した解答が最も多く，小4で20%程，小5で30%，小6～中2のそれぞれで20%程度ある。切り口の図形の1辺の長さが，立方体の1辺の長さに等しいことから，切り口の形を直観的に判断したのであろうが，解答「ウ長方形」と「エ正方形」の合計がいずれの学年でも80%を超えているので，角の大きさが90°であることは全体として正しくとらえているということができる。なお，小4の正答率が小5より高くなっているが，本調査の実施時期が小4の「直方体と立方体」の単元の学習時期と重なり，授業での学習内容のイメージを鮮明に持ちながら調査問題に取り組んだ可能性があることが原因として考えられる（教科書（6社）におけるこの単元は，3学期後半に位置付けられている）。

2）②の正答率は，小4で12.6%，小5で16.9%と低く，小6～中2で30数%と上昇し，中3では52.4%となっている。このように，問題3②の正答率は，問題1から問題3①までの正答率に比べて，大きく落ち込んでいる。ただし問題5の正答率よりは全体的に高く，問題1，2と問題5との中間段階にある理解の様相を示すものと考えられる。

誤答の中では，「イ二等辺三角形」を選択した解答が最も多く，小4で46.7%，小5で42.3%，小6～中3のそれぞれで25～30%程ある。切り口の△ABCが，見取図上ではAB=ACと見えるのでイを選択したか，あるいは，立方体の面である正方形が見取図上ではつぶれて見えるので，2つの面の対角線同士であるBAとBCが等しいと考えたのかもしれない。なお，小4～6では，イ以外の誤答も10%前後あって解答が散らばっている。「いずれも合同な正方形の対角線だから3つの線分が等しい」として，分析的に考えを進めることの難しさが現れている。

4. 2. 4. 問題4の解答

問題4は，問題1，2と問題5との中間段階をみるもう一つの問題として設定した。立方体を一平面で切断してできる面を想定し，それが正方形であることを判断して角の大きさを解答する問題であり，中1～中3を対象に出題された。解答率は，表8の通りである。

正答率はいずれも90%を超えている。3点P，Q，R を含む切断面が正方形だから90°と判断したのか，求める角が，例えば∠CBFと等しいと直観的に判断して90°としたのか，今回の調査からは分析できない。

なお，問題3①での見取図の存在が，この結果に好影響を与えているとも考えられる。

表8　問題4の解答率（数値は％）

問題４	正答	他	無答
中１	92.9	4.4	2.7
中２	91.5	6.3	2.2
中３	95.1	4.9	0.0

4. 2. 5. 問題5の解答

4. 2. 5. 1. 選択肢の解答とその理由の記述のタイプ

問題5は，立方体の面上にある2つの直線がつくる角の大きさを解答するものであり，中1～中3を対象に出題された。これに正しく解答するには，2つの直線がつくる平面で立方体を切断するという操作をイメージし，切断面にできる図形の形を推論によって確定する必要がある。問題5では，角の大きさだけでなく，その理由も問うている。そこで，その理由の内容も評価し，「60°と解答しその理由も正しい解答」であるものを正答としてまとめると，表9を得る。ここで，「理由が正しい」とは，後述するタイプ3の理由のことである。また，「無答」は，角度の解答及び理由の記述共に無記入であるものを指す。

表9　理由を含めた問題5の解答率（数値は％）

問題5	60°と解答		他	無答
	正答	理由×		
中１	8.4	3.1	75.6	12.9
中２	13.8	0.4	70.5	15.2
中３	37.8	1.8	51.1	9.3

結果は，中1は10%未満，中2で10%強，中3でも40%に満たない。

ここで，問題5のすべての解答を，その理由までも含めて分析したところ，筆者らの2001，2002年の時点での調査と同様に，大きく5つのタイプ，「1, 2A, 2B, 2C, 3」に分類できた。このタイプ分けの基本は，2. 2. で示した水準の表現と整合している。なお，ここでのタイプの名称「1，2A，2B，2C，3」は，2001，2002年調査ではそれぞれ「A，B①，B②，C，D」タイプと呼んでいたものに一致する。

各タイプの特徴は以下の通りである。文頭にある「・」は，具体的な解答例であることを示している。

＜タイプ 1＞

直観的に判断してしまう。例えば；

・見た目で90゜　・なんとなく　・意味不明
・（理由が白紙のもの）　など

＜タイプ2A＞

論理的に考察しようとするが，図の見えに影響をうけたり論理が飛躍したりして，正しい結論を得ることができない。例えば；

・面ABFEと面ADHEが垂直で，その面上に線分BEと線分EDがあるので90°
・∠BEA+∠DEA＝45゜+45゜＝90゜
・∠AEF＝90゜の半分だから45゜
・∠AEB＝45°の半分だから22.5°　など

＜タイプ2B＞

投影や展開など切断以外の操作を加え，論理的に考察しようとするが，図の見えに影響をうけたり論理が飛躍したりして，正しい結論を得ることができない。例えば；

・上から見て∠EBG＝90°だから〔投影〕
・（斜め上方向からの図をかいて）90°〔視点の移動〕
・（展開図をかいて）45゜+45゜＝90°〔展開〕
・90°である∠DABを少し下にずらしただけなので，角度は変わらず90°〔運動〕　など

＜タイプ2C＞

切断の操作を加え，論理的に考察しようとするが，図の見えに影響をうけたり論理が飛躍したりして，正しい結論を得ることができない。例えば；

・△BDEで，∠D＝∠E＝45°だから90゜
・△BDEで，∠B＝90゜,∠D＝60°だから30゜
・△BDEで，∠D＝90゜,∠B＝45°だから45゜　など

＜タイプ3＞

切断の操作を加えて論理的に考察し，正しい結論を得ることができる。例えば；

・（線分BDをひいて）△EBDで，EB＝BD＝DEだから，正三角形なので60°　など

これらの生徒の解答の学年別・タイプ別の結果をまとめると，表10を得る。

表10　問題5の学年別・タイプ別分布　（数値は％）

タイプ	1	2A	2B	2C	3	無答
中１	20.0	41.3	12.0	5.3	8.4	12.9
中２	21.4	35.3	11.6	2.7	13.8	15.2
中３	18.7	17.8	13.3	3.1	37.8	9.3

表10から，次のことが指摘できる。

1）タイプ1とタイプ2Aを合せた割合は，中1～中3で，それぞれ61.3%，56.7%，36.5%である。問題の解決にあたって，操作を加えることなく，直観的に判断したり，部分的には論理的に考察すものの誤った結論を得たりする生徒が多い。

2）タイプ2Bとタイプ2Cを合せた割合は，中1～中3で，それぞれ17.3%，14.3%，16.4%である。このタイプの生徒は問題解決にあたって図形に対して何らかの働きかけをしている点を評価したい。しかし，特に2Bタイプの多くの生徒は，空間の2直線が作る角を求めるのに展開図を描いて考え，誤った結論を導いてしまっている。どこかの学習段階で，展開図で表現することによって保存される性質と保存されない性質とがあることを意識化する学習指導が必要であろう。

3）タイプ3の割合は，中1が8.4%，中2が13.8%であり，中3になって37.8%と増加している。中3では，三平方の定理を空間図形に利用する学習が良い意味で影響していると考えられる。とはいえ，この正答率の低さは空間図形の学習指導改善の必要性を示している。

これまでに述べてきたように，問題5は，線分DBを結んでできる△DEBが正三角形であることを見抜かなければ正答できない。ここには，線分DBを自らひくこと（図に操作を加えること）と，できた三角形の形を適切に判断すること（推論すること）とが求められる。表7に示したように，先の問題3②の正答率は，小6から中2までほとんど変化なく35%程度にとどまっていることをあわせて考えると，問題5の正答率の低さが納得できる。切断面が関連する問題の解決に関して，どの学年でどの程度の理解を目指すのか，検討する必要があろう。

4.2.5.2. 問題3②の解答と問題5の解答との関係

問題3②は，問題5を考える上でのヒントになっているとみることもできる。そこで，問題3②の正誤と，問題5でタイプ3（切断の操作を加えて論理的に考察し，正しい結論を得ることができる）か否かとの関連を，学年ごとにデータを分析しまとめると以下の表を得る。

表11　問題3②と問題5との関係（中1）：単位は%

中1（225名）		問題5		
		タイプ3	タイプ3以外	合計
問題3②	正答	6.2	28.0	34.2
	誤答	2.2	63.6	65.8
	合計	8.4	91.6	100.0

表12　問題3②と問題5との関係（中2）：単位は%

中2（224名）		問題5		
		タイプ3	タイプ3以外	合計
問題3②	正答	12.1	23.2	35.3
	誤答	1.8	62.9	64.7
	合計	13.9	86.1	100.0

表13　問題3②と問題5との関係（中3）：単位は%

中3（225名）		問題5		
		タイプ3	タイプ3以外	合計
問題3②	正答	29.8	22.7	52.4
	誤答	8.0	39.6	47.6
	合計	37.8	62.2	100.0

中1（表11）と中2（表12）は比較的類似した傾向を示していて，問題3②と問題5の両方で正答が得られない生徒の割合がどちらも6割を超えている。そして，この状況は，中3（表13）で大きく変化する。中3では，問題3②と問題5の両方で正答が得られない生徒の割合は4割程度までに減少し，逆に両方で正答が得られる生徒の割合が，中2では1割程度であったものが，3割近くまで増えることがわかる。中2の学習で空間図形がほとんど扱われないこと，一方で，中3では計量を中心に空間図形の考察が扱われることが，生徒の見取図の認識に影響を与えているものと想像できる。また，問題3②は正答するが，問題5でタイプ3に到達しない生徒が，中1から中3までを通して2～3割程度いる。これらの生徒は，「図に操作を加えること（線分DBを自らひくこと）」に関する課題が，中学校数学の学習で改善されないままになっていることを示している。

4.3. 立方体の見取図の理解に関する実態の概要

本稿の目的は，立方体の見取図の理解に関する，小学校4年から中学校3年までの児童・生徒の実態の概要を明らかにすることであった。今回の調査結果の分析・考察によって，次の実態が明らかになった。

(1) 見取図から，立方体の辺の長さの関係および辺と辺とがなす角の大きさ（直角）を読み取ることについては，学年を問わずよくできて，理解している。

(2) 見取図から，立方体の対角線が関わる線分の長さの関係や対角線が関わる角の大きさを読み取ることについては，小4は困難を示す割合が高いが，小5から中学へと理解は確実に深まり，中3ではおおむねよくできて，理解できるようになる。

(3) 見取図から，立方体の内部に一平面を想定し，そこにできる形を読み取って問題を解決することについては，次の実態がある。

1）立方体の面に平行な一平面を想定してできる形については，角の大きさの関係（4つの角が直角であること）を読み取ることは，学年を問わずによくでき，理解している。さらに辺の長さも的確にとらえて形を的確に読み取ることができる割合は小6～中2で半数を超え，中3になると80%近くが正しく理解できるようになる。

2）立方体の3つの頂点を通る一平面を想定してできる形（三角形）を的確に読み取ることは，小4，5は10%台とほとんどができず，小6～中2では30%台で，できる割合に上昇がみられるものの，中3でも半数程度にとどまっている。その中でもさらに，その読み取りを的確に行い，空間図形の問題解決に正しく用いることができる程度にまでに達している割合は，3割程度にとどまる。

5．学習指導への示唆

5.1.「対角線」に関する指導の充実

立方体の見取図の理解に関わり，「対角線」に関わる情報の読み取りに課題があることが明らかになった。

算数科において，用語「対角線」は，小4で，「となりあっていない頂点を結んだ直線を，対角線といいます。」(大日本図書（平成22年検定)，「いろいろな四角形」)のように導入され，いろいろな四角形の対角線の長さや交わり方の特徴を調べている。

今回の対小学生調査では，問題2について，選択の理由を記述させた。正答は，問題2①が「ウAB=CD」，問題2②が「イCD>AB」であるが，2①と2②のどちらも「ウ」を選択し，その両方に次のような全く同じ理由を記述する子どもが複数いた。

- ・「立方体だからどの辺の長さも等しい。」（小6）
- ・「正方形は一辺の長さが同じだから。どこを線引いても等しい。」（小6）
- ・「立方体は同じ長さの辺だからABもCDも同じだと思う。」（小6）

また，問題2①の理由を受けて，あらためて，問題2②の理由を次のように記述する子どもも複数いた。

- ・（問題2①：正答）「立方体の面は，すべて正方形なので，正方形は全ての辺の長さが等しいから。」，（問題2②：誤答）「立方体の面は全て正方形なので，正方形は対角線も辺も長さが等しいから。」（小6）
- ・（問題2①：正答）「立方体は，すべて辺の長さが等しいから。」，（問題2②：誤答）「さっきと同じで，立方体は全ての辺の長さも等しいので，対角線も辺と同じ長さだから。」（小6）

これらの記述から，用語「対角線」は知っていても，立方体（正方形）の対角線の長さの特徴を理解していない子どもがいることがうかがえる。

小2において，正方形の定義「かどがみんな直角で，へんのながさがみんな同じ四角形を正方形といいます」(大日本図書（平成22年検定)，「長方形と正方形」）を学習して以来，この知識が定着し，これを用いて問題2①を解決しているものと考えられる。一方，「対角線」については十分な知識となっておらず，子どもの中には「立方体（正方形）は，1辺の長さも対角線の長さもみんな同じ」というような，誤った認識をもっている子どもがいることがうかがえる。このような実態を踏まえて，あらためて現行の「対角線」に関する学習指導を振り返ると，その長さの関係を正しく認識させる学習活動は必ずしも充実していないということができる。立方体の見取図の理解を図る上でも，「対角線」の長さのもつ特徴を正しく認識させることを意図した学習指導の充実が求められる。

5.2. 空間図形を「操作」し「推論」する機会の充実

立方体の見取図の理解に関わり，見取図から立方体の内部に一平面を想定し，その形を的確に読み取ることが不十分であることが明らかになった。

対中学生調査の問題5の正答率（理由も含めて）は，中3においても37.8%と低い。これに正答するには，大きく次の2つのハードルを越える必要がある。第一は，問題の見取図の2点DとBを結び三角形をつくりだす「操作」を施すこと，第二は，その三角形が正三角形であることを「推論」によって導くことである。

現在の学習指導において，平面図形に対して補助線をひくなどの操作を施して，新たな図形を見いだす活動は多々行われているが，空間図形に対してそれを行う機会は大変少ない。第一のハードルを越えるには，空間図形の問題解決において，一平面を想定して空間図形を「操作」し，既知の平面図形を見つけ出したりつくり出したりして考える力が必要である。その力の育成には，子ども自らが空間図形に「操作」を施す機会をより充実させることが必要である。

第二のハードルを越えるには，見取図に表された図形を「見かけ」で判断するのではなく，「推論」によってとらえる力が必要である。現在，小学校でまずは直観的に，そして，徐々に論理的に図形がとらえられるように展開し，中2から始まる論証において，論理的に推論する度合いを高めていく学習指導が行われている。グラフ1に示した問題3②の折れ線は，その展開の特徴を如実に表すカーブを描いている。直観から論理へのなだらかな移行を原則とする学習展開のあり方そのものへの疑いはないが，一方で，カーブは，小4，5で10%台の低い水準から始まり，小6，中1，中2で30%台での横ばいを描いている。問題3②が，「見かけ」で判断することが難しい問題であることの表われであろう。一方，この問題に必要な推論は，「立方体を囲む正方形は互いに合同である」，「合同な正方形の対角線の長さは互いに等しい」といった，合同を学習した小5，少なくとも小6以降の子どもにとって，基本的な事柄を用いる推論であって複雑なものではない。過度に複雑な推論を小学生に求めることは適切でないが，この問題において，小6，中

1，中2で横ばいを描く原因は，空間図形におけるある図形を「見かけ」で判断するのではなく「推論」を働かせて判断することの経験の乏しさにあると，筆者らは推察する。見取図ではわからないことを，実物を手にして理解することは，空間図形の理解を深めることに貢献することは間違いないが，それだけでは，「推論」を働かせる力を育成することにはつながらない。小学校高学年から中学校にかけて，見取図をもとに，空間図形について「推論」する機会を充実させる必要がある。

6．今後の課題

本稿では，調査結果を量的な側面から分析・考察することが中心であった。一方で，調査では，子どもたちの多くの記述によるデータも得ている。一部は本稿でも扱ったが，これを質的に精緻に分析・考察して子どもの理解の様相を明らかにすることが今後の課題の一つである。

また，学習指導への示唆として述べた「対角線」に関する指導および空間図形を「操作」し「推論」する機会の充実を具現化するにあたっては，それぞれに関する子どもの理解や能力の発達の状況を，子ども個別にとらえ，高める手立てを考えることが必要になる。その発達の状況をとらえるための枠組みの構築にも，今後取り組みたい。

引用・参考文献

赤井利行・東尾是世・井上正人．(1999)．小学生の空間思考に関する調査研究. 第32回数学教育論文発表会論文集. pp.245-250.

Fujita,T., Kondo,Y., Kumakura,H., Kunimune,S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence, Journal of Mathematical Behavior 46, pp.96-111.

狭間節子研究代表．(2000)．数学教育における空間思考の育成に関する研究．科研費成果報告書.

狭間節子編著．(2002)．こうすれば空間図形の学習は変わる．明治図書.

八田弘恵・熊倉啓之・久保良宏・國宗進．(2001)．空間図形の活用能力に関する研究．第34回数学教育論文発表会論文集．pp.445-450.

Hoffer,A. (1981). Geometry is more than Proof. Mathematics Teacher.

Jones,K.,& Tzekaki,M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. The second handbook of research on the psychology of mathematics education. pp.109-149. Sense Publishers.

影山和也．(2002)．数学教育における空間的思考の水準に関する研究．全国数学教育学会誌数学教育学研究第8巻. pp.83-94.

川名基・池田敏和．(1994)．「空間の想像力」を育成するための指導に関する事例的研究．日数教学会誌数学教育第76巻第3号．pp.9-17.

熊倉啓之・久保良宏・八田弘恵・國宗進．(2000)．空間図形の理解に関する研究．第33回数学教育論文発表会論文集. pp.319-324.

熊倉啓之・中西知真紀・八田弘恵・國宗進．(2002)．空間図形についての理解に関する研究．第35回数学教育論文発表会論文集．pp.289-294.

久米庸子・村上一三．(1997)．立体図形指導における見取図指導のあり方についての一考察．第30回数学教育論文発表会論文集．pp.331-336.

国本景亀．(1995)．空間直観力育成のための一提案．第28回数学教育論文発表会論文集．pp.413-418.

近藤裕・國宗進・熊倉啓之・八田弘恵・望月美樹．(2011)．空間図形についての理解に関する研究―立体の切り口の授業を通して―．第44回数学教育論文発表会論文集．pp.489-494.

松原敏治．(2018)．空間図形の問題解決における視線の顕在化の役割－立方体の模型を観察する授業での生徒と教師のやりとりから－．日本数学教育学会第51回秋期研究大会発表集録．pp.405-408.

小野田啓子．(2018)．空間観念の育成における投影図の活用についての考察．日本数学教育学会第51回秋期研究大会発表集録．pp.385-388.

太田伸也．(2014)．空間図形の教材研究における「対象/視点」の役割－空間分解の問題を事例として－．日本数学教育学会誌数学教育学論究臨時増刊，第96巻．pp.17-24.

Pittalis,M., & Christou,C. (2013). Coding and decoding representations of 3D shapes. The Journal of Mathematical Behavior, 32 (3), pp.673-689.

澁谷久．(2016)．空間を認識する力を育むための学習具開発に関する研究－展開図と立体の要素対応を読み取る力を伸ばすアレンジによる開発－．日本数学教育学会誌数学教育，第98巻第9号．pp.15-23.

下村岳人・近藤裕．(2015)．見取図を読む力の育成に関する実証的研究－立方体の見取図から辺や角の大きさの関係を読み取る授業－．奈良教育大学次世代教員養成センター研究紀要，第1号．pp.173-182.

立花正男．(2017)．見取図の読み取りの児童生徒の実態と指導の改善．日本数学教育学会第50回秋期研究大会発表集録. pp.265-268.

渡辺敏．(2015)．幼児の空間認知に関する研究－空間的視覚化に焦点を当てて－．日本数学教育学会誌算数教育，第97巻第10号．pp.2-12.

令和元年5月7日受付，令和元年8月6日受理