奈良教育大紀要　第24巻　第1号（人文・社会）　昭和50年
Bull. Nara Univ. Educ., Vol. 24, No. 1, (cult. & soc.) 1975

分散分析における誤差項に関する一考察（4）

瀧　野　千　春
（心理学教室）

（昭和50年4月30日受理）

I

前回の論文（瀧野，1974）では、A，B 2要因の分散分析において、主効果や交互作用の効果に加えて、単純効果の有意性を検定する場合、適切な誤差項として何が用いられるかと言う点に関して、A，B 両要因ともくり返しのない場合と、A，B 2要因のうちの1要因（たとえば、要因B）にくり返しのみられる場合とにわけて考察した。そしてその考察に際して、A，B 2要因がfixed であるか、randomであるかのちがいによって生ずる組合わせから、くり返しのない場合については3つの、一方の要因にくり返しのみられる場合については4つのcase ごとにおこなった。

今回の論文では、A，B，C 3要因の分散分析において、3要因ともくり返しのない場合と、3要因のうちの1要因（たとえば要因C）にくり返しのみられる場合とについて、3要因のそれぞれがfixed であるか、random であるかによって考えられるいくつかのcase ごとに、主効果および交互作用の効果、さらに単純効果の検定に際して、F ratio の分母として用いるのに適当な誤差項とは何かと言う点について考察をおこなうことにする。

II

A，B，C 3要因ともくり返しのみられない場合は、それぞれの要因がfixed であるかran-domであるかによって、その組合わせから、以下の4つのcase が考えられる

Case 1 ：要因A，要因B，要因C がすべてfixed。

Case 2 ：要因A がrandomで、要因B，要因C がともにfixed。

Case 3 ：要因A，要因B がともにrandomで、要因C がfixed。

Case 4 ：要因A，要因B，要因C がすべてrandom。

上記の4つのcase 別に、主効果および交互作用の効果の検定のために用いられる誤差項を、F ratio の分母としてのMS（mean square）の形で示したのが、第1表である。

第1表の根拠は、Cornfield and Tukey（1956），Winer（1971），瀧野（1973）に求めることができる。特に、瀧野（1973）はCornfield ら（1956）の文献において原則的に述べられている考え方を基礎にして、具体的な4つのcase ごとに記述している。

第1表からわかることは、Case 1 における誤差項はすべてMSe であることであり、Case-2, Case 3, Case 4 においては、誤差項として、MSe 以外に1次あるいは2次の交互作用に対応するMSが用いられねばならないと言うことである。さらに、Case 3 および Case 4 では単独のMS ではなく、3つのMS によって合成されたMS が用いられると言うことである。この点に関しては、普通のF ratio でなく、quasi—F ratio が用いられることを示している。

第1表　くり返しのない場合の誤差項

	case			
	1	2	3	4
A	MSe	MSe	MSab	〔2〕
B	MSe	MSab	MSab	〔3〕
C	MSe	MSac	〔1〕	〔1〕
AB	MSe	MSe	MSe	MSabc
AC	MSe	MSe	MSabc	MSabc
BC	MSe	MSabc	MSabc	MSabc
ABC	MSe	MSe	MSe	MSe

但し　〔1〕＝MSac ＋MSbc －MSabc

〔2〕＝MSab ＋MSac －MSabc

〔3〕＝MSab ＋MSbc －MSabc

単純効果の検定については、以下の6つの場合が考えられる。すなわち、（イ）SSa at b_j,（ロ）SSa at c_k,（ハ）SSb at a_i,（ニ）SSb at c_k,（ホ）SSc at a_i,（ヘ）SSc at b_j の6つである。そしてこの6つの場合について、4つの case 別に、単純効果の検定のための誤差項を、MS の形で示したのが、第2表である。

第2表　くり返しのない場合の誤差項（単純効果の検定）

	case			
	1	2	3	4
(イ)	MSe	MSe	〔1〕	〔6〕
(ロ)	MSe	MSe	〔2〕	〔6〕
(ハ)	MSe	〔1〕	〔1〕	〔7〕
(ニ)	MSe	〔2〕	〔2〕	〔7〕
(ホ)	MSe	〔3〕	〔5〕	〔5〕
(ヘ)	MSe	〔4〕	〔5〕	〔5〕

但し　〔1〕＝（SSab ＋SSe）／（dfab ＋df$e$）

〔2〕＝（SSab ＋SSabc）／（dfab ＋dfabc）

〔3〕＝（SSac ＋SSe）／（dfac ＋df$e$）

〔4〕＝（SSac ＋SSabc）／（dfac ＋dfabc）

〔5〕＝（SSac ＋SSbc ＋SSabc）／（dfac ＋dfbc ＋dfabc）

〔6〕＝（SSab ＋SSac ＋SSabc）／（dfab ＋dfac ＋dfabc）

〔7〕＝（SSab ＋SSbc ＋SSabc）／（dfab ＋dfbc ＋dfabc）

第2表から、Case 1 における(イ)から(ヘ)までの6つの場合および Case 2 の(イ)と(ロ)の2つの場合にのみ、MSe が誤差項として用いられることがわかる。その他の場合は2つないし3つの SS-（sum of squares）の和を、それぞれのＳＳに対応する df（degrees of freedom）の和で割って

得られる MS を用いなければならないことがわかる。この SS の和から導かれる MS に関しては従来から、くり返しのみられる場合の単純効果の検定の際に用いることがあるとされてきたが、(Winer, 1971, 瀧野、1965)，くり返しのみられない場合でも用いねばならぬ場合のあることが考えられる。これは、(イ)の場合を例にとると、$\sum_{j}$ SSa at b_j = S Sa ＋SSab となり、Case 3 について考えると、SSa の誤差項は第1表から MSab となり、SSab の誤差項は MSe で、2つの誤差項が異なっているため、(SSab ＋SS e)／(df ab ＋df e) で計算される MS を用いることを示している。

同じ(イ)の場合でも、Case 4 について考えると、SSa の誤差項は MSab＋MSac－MSabc となり、SSab の誤差項は MSabc となるため、その共通のものとして、MSab, MSac, MSabc の3つが考えられ、(SSab＋SSac＋SSabc)／(dfab＋dfac＋dfabc) で計算される MS を用いることが提案される。

Ⅲ

A，B，C 3要因のうち、1つの要因（たとえば要因C）にのみ、くり返しのみられる、場合については、それぞれの要因が fixed であるか、random であるかによって、その組合わせから、以下の6つの case が考えられる。

Case 1 ：要因A，要因B，要因C がすべて fixed 。
Case 2 ：要因A，要因B がともに fixed で，要因C が random。
Case 3 ：要因A が random で、要因B，要因C がともに fixed 。
Case 4 ：要因A，要因C がともに random で、要因B が fixed 。
Case 5 ：要因A，要因B がともに radom で、要因C が fixed 。
Case 6 ：要因A，要因B，要因C がすべて random。

上記の6つの case 別に、主効果および交互作用の効果の検定のための誤差項を、MS の形で示したのが第3表である。

第3表　くり返しのある場合の誤差項

	case					
	1	2	3	4	5	6
A	MSe(b)	〔1〕	MSe(b)	〔1〕	MSab	〔6〕
B	MSe(b)	〔2〕	MSab	〔4〕	MSab	〔4〕
AB	MSe(b)	〔3〕	MSe(b)	〔3〕	MSe(b)	〔3〕
C	MSe(w)	MSe(w)	MSac	MSac	〔5〕	〔5〕
AC	MSe(w)	MSe(w)	MSe(w)	MSe(w)	MSabc	MSabc
BC	MSe(w)	MSe(w)	MSabc	MSabc	MSabc	MSabc
ABC	MSe(w)	MSe(w)	MSe(w)	MSe(w)	MSe(w)	MSe(w)

但し　〔1〕＝MSac＋MSe(b)－MSe(w)
〔2〕＝MSbc＋ MSe(b)－MSe(w)
〔3〕＝MSabc ＋ MSe(b)－MSe(w)
〔4〕＝MSab ＋MSbc －MSabc
〔5〕＝MSac ＋MSbc － MSabc
〔6〕＝MSab ＋MSac －MSabc

第3表の根拠は、Ⅱの項で示した文献にみられるが、6つの case について具体的に記述してあるのは、瀧野（1973）である。

第3表から、Case 1 と Case 3 以外の4つの case においては、普通の F ratio の代りに、quasi-F ratio を用いなければならない場合がでてくることがわかる。すなわち、'between' の要因である，A，B，AB の検定に際し、Case 2, Case 4, Case 6 においてと、'within' の要因である C の検定の際の、Case 5 と Case 6 とがそうである。そして、それらの quasi-F ratio の分母となる誤差項は11個あるが、同じものもあるので、6種類にまとめることができる。

単純効果の検定については、Ⅱの項で述べた、(イ)から(ヘ)までの6つの場合が、ここでも考えられ、それを示したのが、第4表である。

第4表　くり返しのある場合の誤差項（単純効果の検定）

	case					
	1	2	3	4	5	6
(イ)	MS e(b)	[2]	MS e(b)	[2]	[6]	[13]
(ロ)	[1]	[3]	[1]	[3]	[7]	[14]
(ハ)	[1]	[4]	[6]	[10]	[6]	[10]
(ニ)	[1]	[5]	[7]	[11]	[7]	[11]
(ホ)	MS e(w)	MS e(w)	[8]	[8]	[12]	[12]
(ヘ)	MS e(w)	MS e(w)	[9]	[9]	[12]	[12]

但し　[1] ＝(SS e(b) + SS e(w)) ／ (df e(b) + df e(w))

[2] ＝ (SS ac + SS abc + SS e(b) + SS e(w)) ／ (df ac + df abc + df e(b) + df e(w))

[3] ＝ (SS ac + SS e(b) + SS e(w)) ／ (df ac + df e(b) + df e(w))

[4] ＝ (SS bc + SS abc + SS e(b) + SS e(w)) ／ (df bc + df abc + df e(b) + df e(w))

[5] ＝ (SS bc + SS e(b) + SS e(w)) ／ (df bc + df e(b) + df e(w))

[6] ＝ (SS ab + SS e(b)) ／ (df ab + df e(b))

[7] ＝ (SS ab + SS abc) ／ (df ab + df abc)

[8] ＝ (SS ac + SS e(w)) ／ (df ac + df e(w))

[9] ＝ (SS ac + SS abc) ／ (df ac + df abc)

[10] ＝ (SS ab + SS bc + SS abc + SS e(b) + SS e(w)) ／ (df ab + df bc + df abc + df e(b) + df e(w))

[11] ＝ (SS ab + SS bc + SS abc) ／ (df ab + df bc + df abc)

[12] ＝ (SS ac + SS bc + SS abc) ／ (df ac + df bc + df abc)

[13] ＝ (SS ab + SS ac + SS abc + SS e(b) + SS e(w)) ／ (df ab + df ac + df abc + df e(b) + df e(w))

[14] ＝ (SS ab + SS ac + SS abc) ／ (df ab + df ac + df abc)

第4表から、Case 1 および Case 3 の(イ)の場合、Case 1 および Case 2 の(ホ)および(ヘ)の場合においては、前者では MS e(b) が、後者では MS e(w) が単独で誤差項として用いられることがわかる。また Case 1 の(ロ), (ハ), (ニ)の場合および Case 3 の(ロ)の場合には、SS e(b) と 、

SSe(w) の和を df$e$(b) と df$e$(w) の和で割って得られるMS を誤差項として用いることが示されている。この誤差項は、単純効果の検定の際によく用いられることが知られている（Winer, 1971; 瀧野，1965)。しかし、上述した場合の「複合」誤差項以外の誤差項を用いる場合が多く、共通のものをまとめて整理すると、14種類のものが存在する。MSを計算する式の分子について考察すると、2種類のSS の和を用いるもの5種類、3つのSS の和を用いるもの5種類、4つのSS の和を用いるもの2種類、5つのSS の和を用いのもの2種類、計14種類である。

引　用　文　献

Cornfield, J., and Tukey, J.W. 1956 Average values of mean squares in factorials, *Ann. math. Statist.*, 27, 907—949.

瀧野千春　1965　分散分析における単純効果の検定について、奈良学芸大学紀要，人文・社会科学、第13巻、163 — 170.

瀧野千春　1973　分散分析における誤差項に関する一考察（2），奈良教育大学紀要、第22巻、第1号、155 —161 .

瀧野千春　1974　分散分析における誤差項に関する一考察（3），奈良教育大学紀要、第23巻、第1号、189 —193 .

Winer, B.J. 1971 *Statistical principles in experimental design.* 2nd ed., NewYork : McGraw-Hill.

AN APPROPRIATE USE OF ERROR TERM IN THE ANALYSIS OF VARIANCE (4)

Chiharu Takino

Department of Psychology, Nara University of Education, Nara, Japan

(Recieved April 30, 1975)

In the previous article, the author has considered the appropriate use of error term to test the statistical significance of the main effects, the interaction effects, and the simple effects, after the two kinds of analysis of variance situations about 'two-factor' experimental design were applied.

The purpose of the present article is to consider the appropriate use of error term to test the statistical significance of the main effects, the interaction effects, and the simple effects in two different 'three-factor' experimental design situations.

The first situation is the usual three-factor experimental design situation that contains no repeated measure at all, and there are four cases which are described as follows :

Case 1 : Factor A, Factor B, and Factor C are all fixed.
Case 2 : Factor A is random, but Factor B and Factor C are both fixed.
Case 3 : Factor A and Factor B are both random, but Factor C is fixed.
Case 4 : Factor A, Factor B, and Factor C are all random.

The second situation is the three-factor experimental design situation with repeated measure on one factor, for example, that is Factor C, and there are six cases which are described as follows :

Case 1 : Factor A, Factor B, and Factor C are all fixed.
Case 2 : Factor A and Factor B are both fixed, but Factor C is random.
Case 3 : Factor A is random, but Factor B and Factor C are both fixed.
Case 4 : Factor A and Factor C are both random, but Factor B is fixed.
Case 5 : Factor A and Factor B are both random, but Factor C is fixed.
Case 6 : Factor A, Factor B, and Factor C are all random.