

第3章 本研究における「わかる」

第1節 「わかる」とは

國宗 進
静岡大学教育学部

目次

- 1 本研究における「わかる」とは
 - (1) 「わかる」とは
 - (2) わかる対象とその評価
- 2 わかる授業のための授業構成
 - (1) わかる授業のモデル
 - (2) 学校段階の違いによる授業モデルの解釈
 - (3) 授業展開からみた改善の方向性

要約

本稿では、まず本研究における「わかる」の語義を先行研究を踏まえて明らかにした。本研究における「わかる」とは、「外部からの情報を取捨選択し、変形し操作を加え、先行知識を含んで自ら再構成して得られた心的状態である」としている。この規定は、概念や原理・法則だけでなく、思考・判断や表現・処理能力の形成、そして関心・意欲・態度、価値観の形成という情意面も含めている。

また、問題提示とその把握、個人による解決、小集団や全体での検討、まとめ、練習と振り返りという授業展開による「わかる授業のモデル」を示した。また、その展開に従って、授業改善の方向性を小中高の学校段階ごとに指摘した。

キーワード わかる できる 授業モデル 問題解決 授業改善

1 本研究における「わかる」とは

本研究は、わかる授業の構築を目指している。本研究における「わかる」とは、どのような意味で使っているのであろうか。その概念規定には様々な考え方があろうが、ここでは本研究メンバーによって一応の合意が得られたものを示す。

(1) 「わかる」とは

1980年代、認知心理学の発展に伴って、知識の捉え方や、「わかる」と「できる」との関係はどう捉えるべきか等に関する議論が盛んになされている。佐伯胖(1985)によれば、「知識」という言葉が認知心理学関係の文献に現れ始めたのは

1973年頃であるという。

知識について、波多野誼余夫(1996)は、「知識の人間による獲得の過程」の一般的な特徴を5点挙げていて、その内の2点は次のように示されている。

- ・知識は、基本的には、個々人により構成されるものである。
- ・理解活動および問題解決による知識獲得の過程は、個体の持つ先行知識により制約されている。

「わかる」ということに関して、佐伯胖(1982)は、「外部から入ってくる情報を取捨選択し、変形し、操作を加えたあげく、なんらかの形になったところで”わかった”という実感をいただくものである。(中略)何かがすでに”わかって”いない限り、新しい事態が”わかる”ということとはありえない。」と述べている。また、波多野完治(1987)は、「「わかる」というのは、生物の「消化」に似たところ」があって、「人間がいままでに所持している「観念体系」のなかに、外の物が入りこみ、体系の一部として、そのところを得ること」であるという。

いずれにしても、「わかる」には、先行知識の存在、及び、本人自身による再構成がその要素としてあげられている。

以上のような主張を参考に、本研究では「わかる」ということを次のように規定することにする。

「わかる」とは、外部からの情報を取捨選択し、変形し操作を加え、先行知識を含んで自ら再構成して得られた心的状態である。

「わかる」を、「変わる」という表現で特徴づけることも多い。波多野完治(1987)は、「わかることは「変わる」ことである」「わかる」ということは「わかる主体」の変化を含む」と述べ、また、吉田章宏(1987)は、「「わかる」とは「かわる」であるといえる。「わかる」とは「わからなかったこと」が、「わかること」に「かわる」ことであるという意味でもそうである。」と述べている。

なお、波多野誼余夫(1996)は、知識として、方略などの手続き的知識、スキーマや心内モデルといった概念的知識、そしてメタ認知的知識をあげ、さらに加えて「多くの知識がそれを要素として持つ概念ないしカテゴリーを導く(分類・命名の)規則も人間の知識には当然含まれている」としている。手続き的知識とは「ある目標を実現するために事物・事象へといかにはたらきかけるべきかに関する知識」であり、概念的知識とは「それらの事物・事象自体の重要な属性を表象する知識」であり、メタ認知的知識とは「これらの知識に関する知識」である(メタ認知的知識については、本章第2節で重松によって詳しく述べられる)。

(2) わかる対象とその評価

上述の本研究における「わかる」の規定は、数学的概念や原理・法則だけをわかる対象として念頭に置いて行ったのではない。既に述べたように、本研究では、わかる対象(わかってほしいこと・目標)を次の4つの柱でとらえている。

関心・意欲・態度又は価値観

概念・原理・法則

思考・判断

表現・処理

すなわち、いわゆる数学的概念や原理・法則の理解、思考・判断や表現・処理能力の形成、そして関心・意欲・態度、価値観の形成という情意面も、わかる対象として考察しているのである。

このようにわかる対象を(広く)考える立場に立つことは、同時に、授業の評価にもその枠組みが反映されることになる。計測可能性云々を超えて、学習者の思考・判断や態度、価値観の形成も含めた評価を考えることになるのである。したがって、例えば「～の用語の意味を理解しているかどうか」、「帰納的に推論しようとしているかどうか」も、「グラフで表現することができるかどうか」も、「ある授業がわかったかどうか」の検討対象になるということである。

実はこのようなとらえ方は、日々我々が口にする「わかったかな」という何気ない問いかけに一致している。そしてまた、例えば『分数で割る除法がわかった』という表現を、「分数で割ることの意味がわかる」「分数で割る計算の仕方がわかる」「分数で割る計算を行うことができる」「分数で割る計算を問題場面に適用できる」ことがそろっている状態の時に使うことにする、という言い方と同様の言葉遣いなのである。

学力モデルに関して田中耕治(1996)は、広岡亮蔵による三層説、中内敏夫による「段階(習熟)」説や稲葉宏雄による平行説等を検討して、自らの考えを試案的に提案している。それは、縦軸に基本性と発展性を、横軸に認知的要素と情意的要素を置いて、2行2列の4枠で学力をとらえようというものであり、学力の中に態度も取り込み、また、認知的要素・情意的要素のいずれにも基本と発展(技能だけにとどまらない習熟)の段階を想定している。この学力モデルは、わかる授業やその評価を構想する上で、本研究のわかる対象とその評価に関する考え方に近いひとつの枠組みを与えているとみることができる(評価については、第5章で長尾らによって詳しく述べられる)。

なお、ここではいわゆる数学の内容に関わりなく本研究における「わかる」について考察したが、領域固有性という言葉が示すように、個々の具体的内容によってそのわかり方に違いが現れるのは当然のことであろう。それらについては、本章第3節で分野ごとに述べられる。

2. わかる授業のための授業構成

「わかる授業」を目指した実践は、問題解決の過程をとる授業によることが多いであろう。その授業展開について、簡単にまとめておく。

(1) わかる授業のモデル

本研究では、わかる授業を目指した授業モデルとして、表 3-1 に示したような授業展開を考えている。

表 3-1 わかる授業を目指した授業モデル例

展 開	教師の役割	子どもの活動	子どもの つぶやき
1. [問題]提示, その把握	問題提示	問題把握	面白そう
2. 個人による解決	個に応じる	問題の解決	できた, わからない
3. 小集団, ペア 全体での検討	個に応じる 全体検討への構想	説明する, 他者の考え を知る, コミュニケー ション活動, 理解を深 める	そんな考え もあるのだ わかりたい わかった
	多様な考えを取り上 げる, 方向付け		
4. まとめ	わかったことの確認 (別の視点の提示?)	確認・再構成	なるほどね
5. 練習, 振り返り	個に応じる	わかったことの確認 ・定着, 補充	やったね
6. (発展)			とすると…

この授業モデルは、「まず[問題]の解決に向かって学習者個々人による思考行動が保障され、続いて小集団あるいは全体での検討があって、本時の学習のまとめが行われ問題演習で確認する」という一連の流れを基本的な授業展開であると考えて、作られている。

(2) 学校段階の違いによる授業モデルの解釈

表 3-1 に示した授業モデルは、どの学校段階での算数・数学の授業であるかによって、その重点は変わってくる。以下、検討してみよう。

- 1) 小・中学校での授業は、ほぼこのモデルで展開できると考えられる。
高校については、内容の程度が高くなり抽象的になることや、生徒達が入試に

よって輪切りになっているという現実をどう踏まえるかが、授業展開に大きな影響を与えている。日本の学校教育の場合、いわゆる習熟別学級編成や指導内容自体が異なる指導はあまり行われていないとみられているが、実は高校入試がその役目を果たしているという指摘もある。高校の方が中学校より学力差は小さいだけに、それに適う授業展開と指導方法の検討が望まれる。

2) 表 3-1 の展開 3 の段階がないと、「説明する、他者のアイデアを知る、コミュニケーション活動」に関連する能力形成の場が大きく失われることに気付く。すなわち、数学学習での授業者以外の他者の存在が欠如してしまうのである。

コミュニケーション活動とは若干異なるものの、ゼミ形式のテキスト輪読が数学学習のある面での基本である(國宗,2004)ことを想起すると、この点からも展開 3 の段階の重要性が確認されるのである。

3) 高校での数学授業の特徴として言われる「例題解説、そして問題演習」の繰り返しは、展開 3 の部分が授業展開として想定されておらず、生徒の「数学的コミュニケーション能力」の育成にふさわしい場が用意されていないということができる。高校に関して、「問題を解くことで初めて「わかる」ことが多い」という指摘があるが、生徒に与えるべき「(既製品の枠を超えた)的確な問題群」を提案することが重要であろう。これは高校数学の授業改善に向けて、価値ある提案になると考えられる。

それと同時に、授業で「取り上げる例題」をどう用意するかの検討も重要である。(教科書の例題を順に取り上げていくにしても、入試問題と銘打って脅かすにしても)例題群の系統、その問題のねらい、そこで想定される生徒の思考や解決法等を的確に分析し、授業を構想する必要がある。

(3) 授業展開からみた改善の方向性

小・中・高の学校段階によって授業改善の方向性は変わってくる。それらを、授業モデルに示した展開に従ってまとめてみると、表 3-2 を得る。

表 3-2 授業改善の方向性

展 開	小学校	中学校	高校
1. 「問題」提示, その把握	提示された「問題」の意味がわからないことはないか。 意味がわからなかったら質問する状況はできているか。		
2. 個人による解決	これに先だって見 通し、見通しと撫で 回していないか。	授業者がいきなり(最もスマートな) 解答を解説し始めることはないか。	
3. 小集団, ペア	わかっている子だけの一人舞台にな っていないか。		

全体での検討	いろいろ考えが出て、みんなよかったね、で終わっていないか。	「これがよい」と授業者が価値づけて終わりにしていないか。	多様な解答を授業に乗せているか。多様な解答を吟味する場はあるか。
4. まとめ	子どもの言葉にこだわりすぎてまとめていないか。		
5. 練習, 振り返り	学習のプロセスを問う問題を用意しているか。		的確な問題群が用意されているか。
6. (発展)	余韻があるか。		

表 3-2 は、研究メンバーの指摘に基づく大まかな改善点を示しているが、実際の改善には授業研究が行われ、個々の授業ごとの的確な検討がなされることが重要であるのは論をまたない。

<引用・参考文献>

- 國宗進(2004), 「数学教育における授業研究」; 長崎栄三・長尾篤志・吉田明史・一楽重雄・渡辺公夫・國宗進編著『授業研究に学ぶ高校新数学の在り方』明治図書.
- 佐伯胖(1982), 「序章 “わかること”の心理学」, 佐伯胖編『認知心理学講座 3 推論と理解』, 東大出版会.
- 佐伯胖(1985), 『認知心理学選書 4 理解とは何か』, 東大出版会, p.140.
- 田中耕治(1996), 『学力評価論入門』, 京都・法政出版, pp.83-112.
- 波多野完治(1987), 『授業の心理学』, 小学館, pp.47-50.
- 波多野誼余夫(1996), 「概観: 獲得研究の現在」; 波多野誼余夫編『認知心理学 5 学習と発達』, 東大出版会, pp.1-10.
- 吉田章宏(1987), 『学ぶと教える—授業の現象学への道—』, 海鳴社, p.71.

第2節 「わかる」とメタ認知

重松 敬一

奈良教育大学教育学部

目 次

1. はじめに
 - (1) 「わかる」ことの必要性
 - (2) 「わかる」ことのこころの状態
2. 「わかる」こととその段階
 - (1) 「わかる」の字句解釈
 - (2) 理解の段階
3. 「わかる」こととメタ認知
 - (1) 本当にわかるために
 - (2) メタ認知について
 - (3) 理解活動を支配するメタ認知ーメタ理解
4. 実践的示唆
5. おわりに

要 約

本稿では、自分の理解の状態を知っているメタ理解と「わかる」（理解）との関係について、算数数学教育の実践的な視点からまとめたものである。人は、頭の中にネットワークができる「わかる」状態になると、安心、展望、内なる疑問が生じ、積極的な行動や学習が起こると期待がある。そのために、自分の「わかる」状態を判断し、「わかる」ための働きを促すためのメタ理解を活性化することは大切な知的な活動であるといえる。算数・数学の学習や問題解決においても、メタ理解を育成するようにして、自分で「わかる」ことをモニターし、コントロールできるようにさせたいものである。なお、「わかるか？」という教師の何気ない一言は、理解かメタ理解かのいずれに働きかけているのか曖昧さがあることにも注意したい。

キーワード わかる，理解，メタ認知，メタ理解

1. はじめに

「わかる」ことがなぜ必要なのか？

「わかる」ことのこころの状態はどのようなものか？

このような疑問について私見を述べてみたい。

(1) 「わかる」ことの必要性

「わかる」ことがなぜ必要なのかと言えば、「わかる」と、まず当面の行為に安心感を得ることができる。そして、全体が見えるために、その後に積極的な行動を生み出すからであると結論的にいえる。

例えば、ある事業の遂行時に、A君は、その事業の全体的な構造も、自分の役割も十分「わかって」いない状態で参加していたことがある。しばらくは言われたままに作業していたA君であったが、少し慣れ、全体的な作業の位置づけが「わかって」くると、言われたことの作業の遂行がスムーズになるだけでなく、次の作業に対して意見を述べたり、疑問を発したりするなど、自分の分担している作業をよりスムーズに遂行するだけでなく、事業全体での関係での他の作業の遂行も積極的になり、有為な存在となっていった。

(2) 「わかる」ことのこころの状態

では、「わかる」ことのこころの状態はどのようなものであろうか。それを一言で表すと、内的な知的な状態に全体的なネットワークができることと考えられる。

例えば、古いカーナビゲーションに頼って見知らぬ道を運転している場面を想定してほしい。古くともカーナビゲーションに示された道を走っている間は安心して運転してられるし、時には、別の道を選択することに不安もない。しかし、新しい道が出来ていて、カーナビゲーションに示されていない場所を走ることになると途端に不安になる。それは、初めて訪れた家での真っ暗な部屋に入ったときの不安感に似ている。手探りでしか感じることでできない周りの様子に不安一杯といえよう。しばらくじっとしていると徐々に目が慣れ、うっすらと周りの様子が見えてくる。車の運転に戻ると、どこへ行けばよいのか迷う気持ちで不安一杯にしばらく走った後で、ナビゲーションに示された道に出たとき、「ホッ」とした気持ちを誰もが感じた経験がある。これは、ナビゲーション上で道全体のネットワークが見えただけでなく、頭の中にある現在位置と目的地とのネットワークができたことを感じることでただけに、「安心」が生じたものと思える。

このように、「わかる」ことの心の状態は、全体的なネットワークができて「安心」して次の行動への「展望」ができ、「内なる疑問」に答えながら、次の行動が選択できる状態といえよう。

算数・数学の学習指導では、このようなネットワークを知識などの「蜘蛛の巣」と読んでネットワークの大切さを説明してきたように思う。

2. 「わかる」こととその段階

(1) 「わかる」の字句解釈

佐藤 (2009) は、「わかる」には3つのものがあるという。⁽¹⁾

三つの「わかる」

「わかる」とは何か。辞典には、「判る」「分かる」「解る」という三つの漢字が書かれている。これらの違いを筆者なりに解釈してみよう。…中略…

「判る」は「知る」というレベル。…次に「分かる」は、違いが分かる。…

「解る」は関係が把握できること。…覚えた数学の公式に数値を充てて正解できても、その意味が「解ら」なければ十分に理解したとは言えない。

このように、言葉の解釈の上でも、いくつかのわかり方があることが示唆される。

(2) 理解の段階

「理解している」と一口にいても、その理解の実態にはやはりいろいろな段階がある。理解を広める、高める、深めるとか、何となくわかる、だんだんわかる、十分わかる、などの表現は、理解の段階の存在を示したものであろう。ここでは、理解の段階の検討を図りたい。

理解は、当たり前なことではあるが、個人的な知的活動である。しかし、この事実は2つの意味をもっている。一つは、理解活動のプロセスが個人々々違うということ。二つには、この活動の結果としての、いわゆる知識の形（知識のネットワーク）が違うということ。したがって、例えば、45人の生徒が同じ二次方程式の学習をしていますが、その理解活動の内容は違っていると考えられる。このような個人々々の違いを説明する道具としても、段階的に考えられることは有用であると考えられる。現時点において、理解の段階を次のように考えている。⁽²⁾

0) 無理解の段階

1. 一時的技能形成の段階

1) 理解なしで具体的問題ができる

2. 意味技能形成の段階

2) 道具的に具体的問題ができる

3) 観察的に具体的問題ができる

4) 関係的に具体的問題ができる

5) ものごとの根拠が示せる

3. 価値形成の段階

6) 現実の社会・文化と結びつく

7) 関連する世界が広がる

このように、大きくは、一時的技能形成の段階、意味技能形成の段階、そして、最後には価値形成の段階に至ると考えられる。

ここで、上記に述べた理解の段階について、少し解説してみたい。

0) 無理解の段階

この段階は、学習者にとって、理解の対象を自分の認知のネットワークに位置付けるための変換の機能が欠落しているか、認知のネットワーク自身が欠落している場合が考えられる。この段階では、既存のネットワークに関連させることができるまで、見つめているしかない。

1) 理解なしで具体的問題ができる

この段階は、学習者自身に、わかること、できることの意識がない。それほど、即時的な活動であるといえる。そのために、繰り返しができない。

2) 道具的に具体的問題ができる

教師などの鋭明通りに行為実行ができる。できることに喜びはあるが、行為実行をモニターすることはできない。第一段階に比べて、繰り返し行為実行できることが異なる。

3) 観察的に具体的問題ができる

この段階では、概念・表象の世界で、課題解決のパターンが把握できる。行為実行をモニターできるが、他の知識などとの関係意識は乏しい。

4) 関係的に具体的問題ができる

関連する知識が意識でき、多面的に問題を意識できる。「はっきり頭に入ってくる」などの発言が聞かれる。

5) ものごとの板扱が示せる

反省的にものごとを把握でき、自分の表現をもって批評できる。教師などの、「どうして？」という問いに答えることができるのもこの段階である。

6) 現実の社会・文化と結びつく

学習内容を数学の外から眺めることができる。数学のよさを感じ得る段階といえる。「図は便利だ」などの意見が聞ける。

7) 関連する世界が広がる

数学と他の教科学習、生活との関連を意識できる。

次に、この段階の特性に言及してみよう。

(1) この各段階は、リニアーに上昇するものではない。とくに、6、7の段階は、5の段階の上にあるというよりも、「理解が広がる」という表現に相当するものと考えられる。また、1から4にしても、一つの授業の中で生起するとは限らず、時として、もっとスパンの広いものも考えられる。

(2) この段階は、学習内容としての数学の構造では必ずしもない。むしろ、学習者の認識の構造を意図している。

(3) 個人に固有の理解の領域というものが存在することを仮定している。即ち、個人によって理解を図るための、言わば実感できる領域というものが存在すると考える

ものである。教師は、一つの問題を多面的に考えて解決してほしいと考えるが、子どもは当面気がついた、意識のある観点からのみ解決する。このことが、教師からすると十分わかっていないと判断する根拠となる。

生半可な理解にも、子どもに有用な固有の段階があると考えるものである。

(4) 理解の段階を技能形成との関連で判断していいか。

理解と技能は一応分離した、不連続なものと考えられる。理解はネットワーク化のプロセスがより強調されるが、技能は検索し、表現するプロセスがより強調される。

ただ、理解の程度は、構造は同じでも異なった表現をもつ場面での行動をもって判断されることが多い。誤解、誤答を生じてはじめてわかる。もちろん、わかっている、こわくて自信がないといった理由で、言えない（口までは出てきているのに…）、できない状態があり、認知的には理解の存在を確認できても、学習指導としては規定しにくい。そこでむしろ、できるレベルでわかる段階を分離することに意味があると考える。なお、具体的問題ができる段階を言葉、絵、式・記号による表現との関連でより細分化することもできるかも知れない。

このような段階の特性を考えると、その価値は、個人々々理解の段階が違っていることを明確にして、その段階を同定し、より高水準の段階が可能となるためには、飛躍のための教育的配慮が必要であることを明確にできることにある。

具体的な例として、小学校5年生の授業をみてみたい。課題は、「多角形の一つの頂点からの対角線の数を求める」ことである。

0) 無理解の段階：子どもは、ただ沈黙するだけである。

1) 具体例にそって答える：「四角形は一本、五角形は二本、六角形は三本 …」

2) 具体的に表現できるもので答えることができる：

「十二角形は、 $12 - 3 = 9$ で九本」

3) 具体的ではないが、表象的にでも答えることができる：

「千角形は、 $1000 - 3 = 997$ 」

4) 多角形全体に言及できる：「辺の数 $- 3 =$ 対角線の数」

5) 「T：どうして□や△を書くのかな。」

「C：□や△の中には、いろいろな数かはいるからです。」

6) 文字式のよさ、表のよさが味わえる。

7) この事例では、とくにこの段階はなかった。

3. 「わかる」こととメタ認知

(1) 本当にわかるために

理解に関する問題の1つは、「理解した」ということに対して、子どもが実感を持ちにくいということにある。言い換えれば、子ども自身「理解したのか、理解していないのか」ということを理解できないということである。

例えば、比例を理解したかどうかを考えてみたい。小学校で、倍関係を使って表を完成できたり、グラフが書けたとしても、それで比例が理解できたかどうかという、子ども自身甚だ心もとなく思っている。

少なくとも、課題が実現できなかつたとき、「理解していない」ことは理解できる。一方、理解したということは、数学的に課題が実行できるだけでなく、理解したことがモニターでき、メタ認知的知識として自覚されなければ実感できないことになりかねない。学習したことが、後日実感できることがあるのは、自分なりの理解のメタ認知的知識が豊かになつたことによる結果とも言えよう。

とくに、数学を認識の道具と考えたときには、何の役にたち、どのように使い、その結果どのような良さがあるのかという側面の実感がメタ理解として重要である。

指導では、子ども固有の理解に関するメタ認知的知識を自覚させることが必要である。例えば、物語理解において、理解の枠組みに関するメタ認知的知識を自覚させることによつて、理解が促進されることが検証されている。

(2) メタ認知について

ここで、メタ理解やメタ認知的理解といった用語について説明しておきたい。

メタ認知は、環境に対して直接行動する、例えば、「書く」、「解く」といった直接的な行動ではなく、認知を対象として、頭の中で働く、認知についての認知 (cognition about cognition)、知識についての知識 (knowledge about knowledge) といわれる。認知が知識と技能に分けられるようにメタ認知も二つに分けることができる。

内的メカニズムは外からは見えないが、ときどき徴候が表に出てくる。例えば、風を引くと、咳、熱、悪寒、鼻水・・・が気になる。こういったものを兆候という。医者は、兆候を利用して病気の診断をしていく。さらに詳しくは、例えば体温を測ったりする。

教育の世界でも頭の中が見えないので、表に現れているもので学習や問題解決の状況を判断していく。これらの内的メカニズムは、認知、メタ認知や意識、記憶、情動、態度といった活動の側面から捉えられる。例えば、英語が分からないとき、そこには「英語が分からない」という認知的事実がある。ただし、その瞬間にメタ理解として、「分からないという事は分かっている」となる。情動的には「不安」がある。表にどういう兆候がでるかという、英会話ができないと思っているので、「しゃべらない」という兆候がでる。非言語的な側面からは態度に現れて、「億劫」になる。

同じように、数学のできない子どもたちの心理は、「学校に行きたくない。」となるだろう。数学の授業になると「足がすくむ」だろう。おもしろい例で、教室に入ってくる顔と教室から出ていく顔を見くらべてみると子どもの学習の成果が分るとよくいわれる。喜んだ顔で入ってきて、やったという満足感ででていく子供はよいのだが、逆に、いやな顔をして入ってきて、嫌な顔や喜々とした顔ででていくと、その子

どもは、聞かなくてもあまり算数・数学が好きでない事が分かる。

このような現れた兆候を手がかりにして、もう少し学習や問題解決のプロセスを解明してみると、メタ認知の重要さが明らかになってくる。

認知は、狭い意味で知覚と同じように考えられるが、ここでは計算する、測定する、作図する、グラフを書くなどの直接的な数学的活動に働く知識や技能を意味する。これに対して、うまく知識や技能が活用されているかなどその認知を調整する作用がメタ認知であると考えている。このように考えると、メタ認知は外界の環境に直接作用する行動ではなく、頭の中で起こって、認知を対象とする作用、すなわち、認知についての認知であるといえる。筆者は、認知の中での知識と技能に対応させて、次の2つのカテゴリーによってメタ認知を定義している。

教師の発問の観点から認知とメタ認知をみることもできる。

例えば、長さの比較をしているとき、「どちらが長い？」と聞くのは長さの認知について聞いたものであり、「どうしてしたらよい？」と聞くのはメタ認知活動について聞いたものであると言える。また、問題を解くとき、「引き算をしたら？」というのは認知的発問であり、「どうして解けばよい？」というのはメタ認知的発問と言える。

1) メタ認知的知識

認知作用の状態を判断するために蓄えられた環境、課題、自己、方略についての知識をいう。

① 環境に関するメタ知識

環境の状態が、認知に作用し、調整する知識をいう。

例 試験ではないから、間違ってもいい。

② 課題に関するメタ知識

課題の本性が、認知に作用し、調整する知識をいう。

例 前にやった問題は、易しい。

③ 自己に関するメタ知識

自己の技能、能力が、認知に作用し、調整する知識をいう。

例 式さえわかれば、計算には自信がある。

④ 方略に関するメタ知識

認知作用をよくするための方略に関する知識をいう。

例 わかったことを図に書いたほうがわかりやすい。

2) メタ認知的技能

メタ知識に照らして認知作用を直接的に調整するモニター、自己評価、コントロールの技能をいう。

④ モニターに関するメタ技能

認知作用の進行状態を直接的にチェックする技能をいう。

例 前にやった問題か。

⑤ 自己評価に関するメタ技能

認知作用の結果をメタ知識と照合して直接的に評価する技能をいう。

例 おもしろい。

⑥ コントロールに関するメタ技能

自己評価にもとづいて認知作用を直接的に制御する技能をいう。

例 やった通りにしろ。

これらの3つのメタ技能は、それぞれが独立して機能しているのではなく、一連の作用であると考えられる。

これ以外に、計画、選択、構成、チェック、調整、修正、改善、放棄などの表現も用いられる。

認知とメタ認知の区別は、必ずしも明確なものではない。それだけに、心理学的に両者を明確に区分するというよりも、授業実践に有効な範囲で区分している。

認知とメタ認知との関係は次のような図で解釈している。

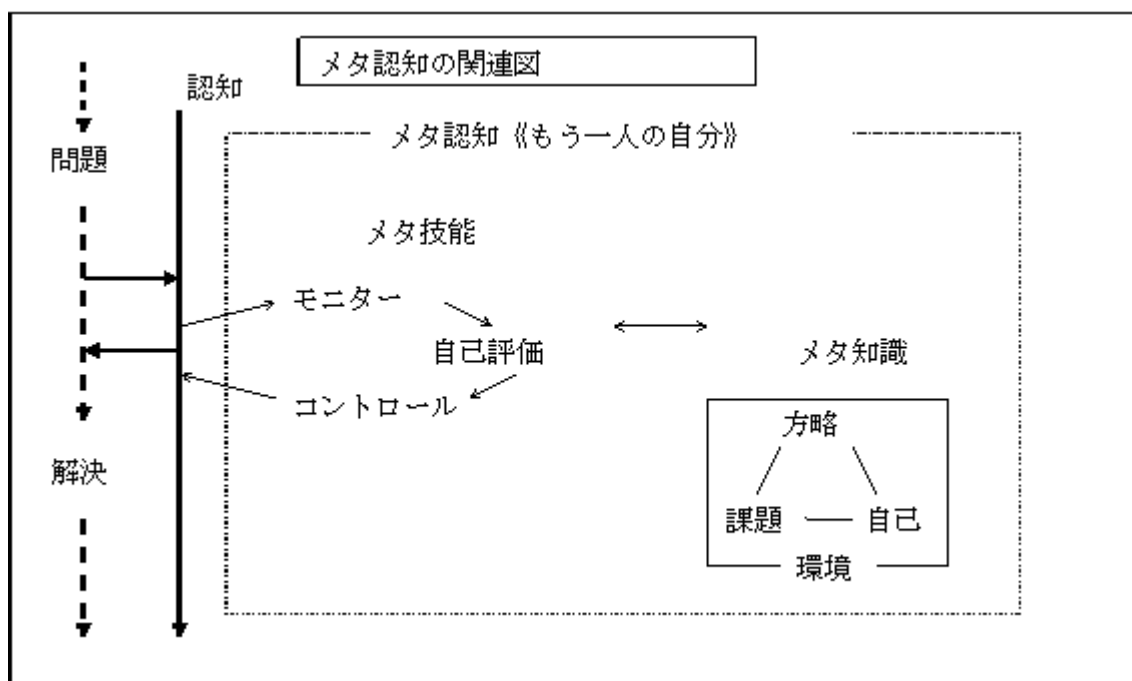


図1 認知とメタ認知との関係

(3) 理解活動を支配するメタ認知 — メタ理解⁽³⁾

子どもに理解を促そうとして教師は多様な表現を用いる。例えば、図、表、絵。しかし、同じ図がすべての子どもに理解しやすいものとは必ずしもいえない。比例が、ブラックボックスよりも対応表による方が理解しやすい子どもがいるのもその一例で

ある。

このように、子どもには理解のしやすさに対して固有の方略があるといえるかも知れない。子ども自身がこの方略を意識的に用いることによって、より理解が深化されるといえる。

例えば、「自分のわかりやすい方法は、…である。…を使ってわかろうとすれば、わかる筈だ。」といったことは理解を容易にするための自己の方略に対するメタ認知的知識であるといえる。

また、あらゆる場合を調べてわかる必要があるとか、数学の時間であるから式を使ったらわかるなどもメタ認知的知識によって照合され、モニターされた理解と考えることができよう。

理解を図るには、内容そのものの指導も大切であるが、子どものメタ認知的知識を豊かにするような説明、発問、議論などが大切になってこよう。

その結果として、自分の理解が、不十分なものかなど、どの段階の理解のレベルなのかをモニターし、より深く理解するためのメタ認知的方略を働かせて、書き出したり、質問したりするなどのコントロールを図ることができることが望ましい。

4. 実践的示唆

以上のことから、実践的に示唆されることをまとめてみよう。

(1) 理解だけでなくメタ理解を促す学習指導をしよう

質問されたことへの答え方の態度や内容であったり、試験の答案の出来具合で理解の程度を判断されるだけでなく、自らモニターを働かせ、自己評価することによって、自己の理解の程度を判断し、学習にフィードバックするようにしたい。

そのためには、「メタ理解」にかかわる指導も大切である。例えば、教師の理解とメタ理解が伴って働く関係を子どもに示すなど。

(2) 理解を図るには、メタ理解、とくに、自分の理解のパターンに関するメタ認知的知識や技能が大切である

例えば、自分は具体的なものを操作することによって理解が促進されるのか、半具体的な図や絵や表などの補助があった方が理解しやすいのか。むしろ、抽象的な式などの処理の方が理解しやすいのかといった認知的括弧の特性を把握することである。

(3) 理解に関するメタ認知的知識を指導したり自覚させるためには、日々の授業の中で、説明、発問、指示、評価などの教師の言語行動を注意して行いたい

例 図を書いてみたほうがわかりやすいですか？

今まで分かったこととどう違いますか？

何がわかりましたか？

分かったことでどんなことをしたいですか？

ここで、メタ認知を育成する教師の役割について補足してみたい。

メタ認知を算数・数学教育において育成するためには、授業における教師の支障が必要になってくる。このようなメタ認知に関する支援は、前述した認知とメタ認知の関係を示すサイクルがうまく機能するように、教師がその一部、またはすべてを、子どもに代わって行う「代行」と考えることができる。

① 全体の代行（モデルとしての役割）

算数・数学の授業では、教師が問題の解き方を示すことがある。その際には、頭の中のメタ認知の働きも一緒に意識できるように口に出して説明をしながら、問題解決の方法を示すことを時としてすることが大切である。そのことによって、メタ認知の機能全体を代行することができる。これを、モデルとしての役割とよんでいる。このとき、問題の解き方の説明に加えて、次のような教師の発言が考えられる。

- ・わからないことは何かを考えることが大切だね。
- ・わかるところまでやってみよう。
- ・すぐできるとは限らないよ。
- ・簡単な数字で考えてみよう。
- ・これは学校の外でも使えるな。
- ・算数・数学って便利に出来ているね。

② 部分的な代行（モニターとしての役割）

子ども達が自力で問題解決をしているとき、机間観察や個別指導をするが、間違いに気づかずにいる子どもに対して、自分でモニターできるように、子どもの問題解決を吟味し、一時的に教師が代行して、下記のような助言をすることがある。

- ・前にやったことがないかな。
- ・今までのパターンに当てはめられないかな。
- ・少し整理ができないかな。
- ・何を求めたらいいのかな。
- ・図や記号をうまく使えないかな。
- ・他の考え方はないかな。
- ・いつでもこうなるかな。
- ・わけを説明できるかな。

このような支援をすることで、子ども達の頭の中でぼんやりと意識されていたり、十分なものでなかったメタ認知的活動が、教師の介入で意識化し、はっきりとしたものになってくる。自力では行えないモニターの一部を、教師が代行しているのである。時には、子どもの発言が、お互いの「モニターとしての役割」を果たしている場合もある。

③ 部分的な代行（評価者として）

机間観察や個別指導で問題解決の状態を評価する際の支援もメタ認知を意識して行うことができる。子どもの自己評価を教師が代行するわけである。

- ・これでいいね。
- ・前のパターンに当てはめられたね。
- ・半分までできているね。
- ・この方法でできるね。
- ・前の方法を忘れているね。

残りはコントロールであるが、これのみを部分的に代行すると、見かけ上は単なる指示になってしまう。子ども自身のメタ認知を育成することを目的とする場合、そのコントロールに関わるメタ認知的知識も含めて子どもに許さなければならない。例えば、「前に学習したことを思い出そう」ではなく、「算数・数学では前に学習したことを思い出そうと多くいくことが多いから、やってみよう」というように指示することができる。

(4) 算数・数学日記（作文）による指導

算数・数学作文は、授業の終末五分間程度の時間に子ども達を書く数学的ライティングで、「今日の学習で習ったことや今度してみたいことなど、自分の頭の中を自由に書いてごらん」と指示することから始める。そこには、子どもが授業で学んだ知識、その変化、さらには変化を引き起こした要因となるものが記述され子どもの理解の程度や成長なども読み取れる。教師は、算数・数学作文を活用して授業後にその時間で理解不十分だったことを個別に支援したり、次時の指導に生かしたりすることもできる。算数・数学日記（作文）、学習感想などと呼んで取り組まれている実践もあり、最近では算数の教科書にも取り上げられるようになってきた。

そのプロセスを具体的に示してみると、次のように図示することができる。

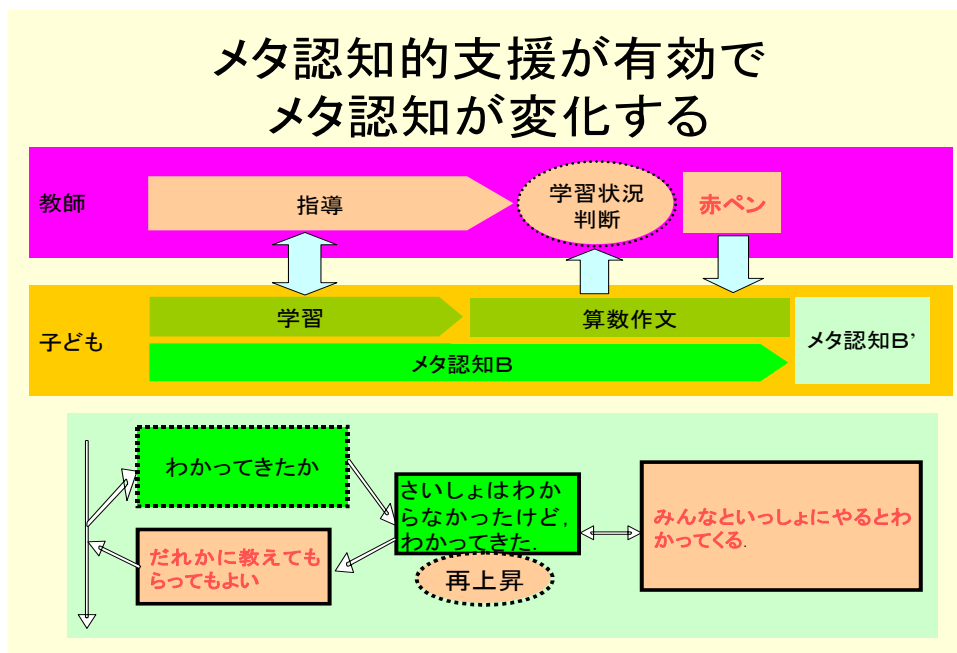


図2 算数作文によるメタ認知支援のプロセス

このような算数・数学作文を通して、子どもたちの「分かり方」の認知として得られたものを少し示してみたい。

- (操作) 動かしてみてもわかった
やってみたら意外と分かりやすかった
- (計算処理) 簡単にまとめて計算するとわかりやすい
- (一般化) きまりを見つけるとわかりやすい
どのきまりをつかっても答えが同じであることがわかった
- (関連づけ) 体積は長方形の面積の考えを使ってわかった
- (交流) ○○君達の鋭明を開いてよく分かった
グループで話し合ってもよく分かった

5. おわりに

教師は、気楽に、指導展開の確認のつもりの「次に行くよ」というところを、「わかりましたか？」と言うことがよくある。もちろん理解の段階での最終段階を期待して「わかりましたか？」とは発問していないであろうが、聞かれている子どもの立場からすると深読みして傷つく場合もあるし、時として、「わかっていない」という感覚をもっている子どもが直接的に言われた場合は、否定的な情意が強く生じることにもなりかねない。もし、特定の子どもや学級での理解の状態（段階）を推し量りたいのなら、理解の段階に応じた発問や小テストとともに、具体的に「わかる」状態を判断する必要があるだろう。

少なくとも、理解の程度を確認するつもりで、メタ理解（わかっていることが自分でも知っている・わかっている）を問うていることを認識して、「わかりましたか？」と発言してほしい。

参考文献

- (1) 佐藤晴雄（2009）、三つの「わかる」、内外教育、平成21年11月27日
- (2) 重松敬一（1985）、「理解」の数学教育学的研究(1)－理解の段階－、
日本数学教育学会第18回数学教育論文発表会
- (3) 重松敬一（1986）、「理解」の数学教育学的研究(2)－メタ認知と理解－、
日本数学教育学会第19回数学教育論文発表会

第3節 分野ごとの「わかる」

3-1 数式（代数）分野

数式（代数）分野における「わかる」

今岡 光範

広島大学大学院教育学研究科

目次

1. 数式領域の固有性に関わる「わかる」について
 - (1) 数式領域の固有性
 - (2) 数式領域の固有性と「わかる」について
2. 数式領域の小・中・高接続に関わる「わかる」について
 - (1) 小・中の接続に関して
 - (2) 小・中の接続に関係した「わかる」ことの指針
 - (3) 中・高の接続における「わかる」について
3. 数式領域の「つまずき」に関わる「わかる」について
 - (1) 「つまずき」について
 - (2) 「つまずき」の事例
 - (3) 高校での「つまずき」の理由について
4. おわりに

要約

本稿では、科研費研究における数式（代数）分野（以後、「数式領域」ということにする）のWGグループ（飯高，今岡，勝美，川内，近藤，佐々木，四方，正田，永田）で行った論点をふまえ、数式領域における「わかる」とは、に関する考察を報告する。本研究全体の主眼は「わかる授業」であり、そこには、カリキュラム、授業の構成、生徒の状況など、さまざまな要素が関与するが、ここでは、数式領域での内容に重点を置いて論ずる。

一つに、数式領域は、すべての分野の基盤を形成するものであるが、その学習において、いくつかの重要な固有性がある。それは、この領域の「わかる」ということに密接に関係していることから、第1章でそのことをまとめる。

本研究の主題の一つに、小・中・高校の接続ということが挙げられているが、第2章で、数式領域における接続の観点から、「わかる」ことについて論ずる。

「つまずき」は、数学の学習全体に関わる問題であるが、特に、数式領域では「わかる」ことに大きく係る。数式領域における「つまずき」を、第3章で具体事例を交えて考察する。

キーワード 代数, 数式, わかる, 接続, つまづき

1. 数式領域の固有性に関わる「わかる」について

数式領域は、小学校の算数での「数と計算」および「量と測定」の内容、中学校での「数と式」の内容、高校での代数的な側面をもつ内容（方程式と不等式、場合の数、式と証明、高次方程式、数列、数値計算、行列など）が相当する。関係する概念としては、

数, 量, 四則演算, 筆算, 近似値, 文章題, 文字式, 多項式, 代数演算, (不)等式, 方程式, 恒等式, 個数の処理, 組合せ, 数列, アルゴリズム

などが考えられる。

(1) 数式領域の固有性

数式領域の固有性と考えられることを、いくつか列挙してみよう。

① 数式領域の身近さと重要性.

昔から、「読み・書き・そろばん」というように、日本人は日常的に必要な数の計算を大事にする伝統がある。また、九九や筆算の修練のように、整数計算の基礎訓練は好んで行い、ほとんどの人々が日常の身の回りの計算には不自由していない。

算数で「数と計算」の内容は60%以上を占める(佐々木, 2006)。中学校でも、「数と式」の内容の占める割合は高い。それは、数式領域が、他のすべての分野の基盤を形成する役割をもつからである。その役割は、高校でも同じである。

② 数式領域の指導法に関する研究の蓄積.

①と関係して、数式領域のカリキュラムは、長年の研究成果を生かして組織され、学校間や学年間での多少の移行はあるものの、全体として、次のような安定した内容構成になっている。算数では、量的なものを基礎として、整数、分数、小数の演算ができるようにし、中学校数学では、算数での数の演算を基礎として、文字式による代数演算が導入され、数式の四則演算に関する初期の構造化が図られる。高校数学では、中学校の文字式の扱いを基礎として、代数は図形や関数などと統合して扱われ、数式はすべての内容で言語の役割をするようになる。

数学教師の数式領域の重要性に対する意識は高いと考えられる。この分野の授業では、計算の習得などのための練習や演習も必要であるが、本研究のアンケート項目[10]14「練習や演習を授業の中心に据える」では、中学校と高校で、80%以上が肯定的に回答している。

(アンケートに関しては資料参照)

しかし、次の③にも関係するが、数式領域の最も効果的な指導方法や指導内容が確立されているわけではない。そのことは、例えば「どこまで生徒の計算力を求めるか」、「水道方式はどうか」、「分数の演算はどう指導するか」、「百マス計算はどうか」、「どこまで計算機器を利用するか」、「行列は高校で必要か」などの、種々の指導方針に対する教育現場の受け止め方の違いなどにも表れている。

③ 数式領域の学習における積み重ね

数式領域では、②とも関係して、数や式に関する概念の拡張が大事な意味をもち、前段階の学習の習熟が後段階の学習の基礎になる。そこでは、スモールステップによる技能の積み重ねや、計算練習の繰り返しも必要であり、生徒にとって面白みに欠ける面がある。そして、学んだことがある程度の内容のまとまりと技能の習熟を経た後に「わかる」という、「わかる」ことが「できる」ことの後で追いつく傾向もある。その中で、どのように、子ども自らの発想を引出し、学習内容に見通しをもたすようにできるかは、依然として、数学教育の研究課題である。

また、分数・小数の計算、文章題、立式、式の読取りなどは、近年の種々の教育調査結果に見られるように、常に、学習指導要領の目標に対して不十分である。型どおりの計算はできるが、計算の意味をくみ取ったり、状況に応じて式を用いたりすることは、いつの時代も多くの子どもが苦手としてきた。本研究のアンケート項目[12]1)「計算できることよりも、計算の意味がわかることを大切にする」に対して、小学校では85%以上の肯定的な回答があるのに対して、中学校では約70%、高校では約75%の肯定的な回答に留まる。ある程度は「わかる」ことよりも「できる」ことを優先させ、そのうちに「わかる」ことを期待せざるをえない教育現場の声がこの割合に反映されているとも考えられる。

④ 数式領域でのつまずき

数学において、理解不能、思い違い、誤った思い込み（ミスコンセプション）など、学習での「つまずき」はある程度は避けられない面もあるが、③と関係して、数式領域でのつまずきは後の学習に与える影響が大きい。例えば、分数の計算のように、頻繁に使う計算などでのつまずきは、子どもを戸惑わせ、自信ややる気を無くさせてしまう可能性もある。つまずきは早い段階で解消することが望まれるが、それぞれの子どもが遭遇する時点や内容もさまざまに異なる。つまずきに関することは、第3章で考察する。

(2) 数式領域の固有性と「わかる」について

前節の数式領域の固有性に関わる「わかる」ということについて考察しよう。

- ① 前節の①、②は、ある意味で、数式領域の内容の豊富さを示すと同時に、この分野の学びの難しさも示している。学校数学での数の構成は、0と自然数の世界から分数、小数、負の整数、実数の世界への拡張と、文字を導入して代数の世界へと広がっていく拡張からなる。実際には、数の拡張は代数的な方程式の解の存在性の拡充と関係していたり、離散的な整数の世界と連続性にもつながる小数や無理数の世界では扱いに大きな隔たりがあったりする。それを、数式領域では、後世に整備された数の体系に沿って、身近な量や既知の考えとの類比や一般化を例示しながら、一様な指導によって、子どもに新しい概念を賦与していく。

この系統的な指導原理は、多くの子どもに適していると考えられてはいるが、それに馴染めない子どもがいても不思議ではない。例えば、「分数による割り算は分母と分子を逆にしてかける」ということはわかっても、教科書などの具体物を用いた分数の割り算の例示がよ

くわからない子どもは想像以上に多いのではないだろうか。

中田氏は、数学理論の統一性や正しい数学的な表現などを、数学の「理念的客観性」と呼び、数学の学びでは、子どもは感情的・具体的な世界と理念的客観性の世界を行き来する必要がある、それが子どもにとっては非常に困難なことであると説いている（中田，1997）。このことは、数式領域では、特に重要である。

例えば、「オハジキ 5 つと 6 つをたす」という具体から「 $5+6=11$ 」という式が結びつけられ、後の学習では後者が基礎になり前者は忘れ去られる。そのため、子どもの中に後者の普遍性が何らかの仕方で担保され、オハジキが別の対象に変わっても、オハジキと同じような結びつきが生じなければならない。中田氏は、その理念的客観性は、一斉授業によって、それぞれの事柄を全員の子どもと同じようにすることで普遍性が自覚され、自分のだす答えが他の子どもと同じであることを是認することで成立するのではないかと述べている。それは、ある種の「数学の作法」を学ぶことであり、その場としての一斉授業の有意さを示している。さらに、中田氏は、フッサールの「数式や言葉は、それを読む人間に、かつての思考過程を思い起こすことを可能にする」という言葉を引用し、数式や言葉が理念的客観性に重要な働きをすることも説いている。

これらのことから、数式領域での「わかる」ことに関して、次のことが指摘できよう。

- ・ 具体的な題材を教材として積極的に活用することは有意義であるが、具体と結びつけられ「わかる」というものではないことに注意する必要があること。
- ・ 一斉授業で、皆が同じ作業をし、自分の結果が他の子どもと同じように成立していることを意識できるようにすること。
- ・ 具体と数式や言葉の表現を適切に結びつけることを重視すること。

② 前項の③は、数式領域の抱える課題である。スモールステップで確実に知識・技能を獲得していく学習過程は、必ずしも、生徒が嫌がるものではない。ただ、与えられるだけで生徒自身の意志が入り込まなければ、学んだことは定着せず、後の段階の学習に支障をきたす。それを避けるために、くりかえしの練習を厳しく課せば、生徒は数学が嫌になってしまう可能性がある。たとえ計算の習得においても、何がしかの、生徒の意志が入り込む要素が必要であろう。その可能性を与えるのが、算数的・数学的活動であろう。したがって、数式領域において、どのような算数的・数学的活動が「わかる」ということに大きく係わるか、という課題としても捉えることもできる。

そのような課題に関係して、本研究において代数分野で行った授業研究は参考になるだろう。（「わかる授業の実践」を参照）

前節の④の「つまずき」に関しては、第3章でとりあげよう。

2. 数式領域の小・中・高接続に関わる「わかる」について

(1) 小・中の接続に関して

平林氏は、数世界の構成ということで、小学校から中学校に到るまでの学習水準に近い「層」

というものを考え、子どもの中で、数がどのように構成されていくかを分析している（平林，2000）。氏の分析を基にして、数式領域における小・中接続を考えてみよう。

平林氏のいう層は、次のようになっている。

第0層： 実際生活における量の世界， 第1層： 整数の世界， 第2層： 分数の世界，
第3層： 正負の数の世界， 第4層： 文字数の世界

第0層は、日常でのさまざまな量の経験を基にするものであり、すでに小学校以前から始まるものである。算数は、そのような量の経験を生かすことによって出発する。したがって、この層でのポイントは次のようであろう。

- ・ 子どもの量に対する経験を把握し、不慣れな量の扱いなどを適切に補いながら、事物の個数や順番、量を合わせることなどを模型の操作などを通して実感させ、数の世界に興味をもたせるようにする。

第1層は、第0層の実際の量の世界から、個数などを抽象した数としての自然数と0の存在を知り、記数法やその演算の仕組みを理解することによって実現する。この層は、九九や筆算の習熟などを中心に、小学校低学年の「数と計算」の内容を通して獲得され、その後の、算数・数学の基礎を築くことになる。したがって、この層でのポイントは次のようであろう。

- ・ 実際の量と結びつけて、整数を身近なものとして捉え、その記数や演算が自由にできるようにする。

第2層は、分数の世界という一つの関門である。分数の概念は、やはり第0層の量を通して身近なものになる。しかし、分数の演算は、量を通した捉え方と、第1層の整数の演算からの移行が混在することになり、そう単純ではない。平林氏は、分数の乗法に関して、次のような教科書の扱いを例示し、その指導方法が一様でないことや、その指導の難しさを指摘している。（教科書A）問題「 $2/5$ dlで板を $3/8$ m²ぬれるペンキがあります。このペンキで1dlでは、板を何 m²ぬれますか。」を用いて、次のような指導の概略を示している。ただし、分数×分数や分数÷整数は既習である。

- 1) 答えは $3/8 \div 2/5$ で塗れるはず
- 2) $2/5$ dlの5倍では、 $3/8$ m²の5倍ぬれるから、2dlで $3/8 \times 5 = (3 \times 5)/8$ m²ぬれる
- 3) それなら、1dlではその半分ぬれるから、 $\{(3 \times 5)/8\} \div 2 = (3 \times 5)/(8 \times 2)$ m²ぬれる
- 4) したがって、 $3/8 \div 2/5 = 3/8 \times 5/2$ で計算できる

（教科書B）実際面に訴えず、整数の代数的な手続きによって、次のように示唆している。

$$3/8 \div 2/5 = (3/8 \times 5) \div (2/5 \times 5) = \{(3 \times 5)/8\} \div 2 = (3 \times 5)/(8 \times 2) = 3/8 \times 5/2$$

教科書Aでは、後で学ぶ比例の考え方をういており、教科書Bでは、 $a \div b = (a \times m) \div (b \times m)$ という、それまでの整数の学習ではあまり意識しなかった計算規則を含んでいる。

教科書Aの問題は、ほとんど実際面では現れない設定であるが、平林氏は「子どもの馴染んできた実際的知識を、新しい数世界の構成に利用させるためであろう」と分析している。特に、「1)で整数の世界の知識が拡大されて使用されている」としている。このような例から、この層のポイントは、次のようであろう。

- ・ 分数を量などと結びつけて身近なものにするのと同時に、整数の演算の知識を拡張するものとして分数の演算を導入する。1章2節①の理念的客観性の成立を分数に対しても腐心することが必要である。

第3層の正負の数の世界への移行から、中学校の数学に属する。この第3層の正負の数への移行は、第2層の分数への移行に較べはるかに容易である。しかし伝統的に、分数は算数で、負の数は中学校で扱う。この点について、平林氏は「伝統的算数教育では、あくまで量の理解が優先されていたから」であり、「普通の量は0または正の数で表されるから」であると分析している。この層に関して、次のことがあげられる。

- ・ 正負の数の演算の解釈、特に(負の数) \times (負の数)などは、生徒自身に考えさせるなど、生徒の数学的活動を通して行うことが考えられる。

第4層の文字数の世界は、中学校の代数である。平林氏は、文字数の世界は、「これまでの数世界の構成に潜在的に与っていた構造的諸性質の顕在化である」として、それまでの数世界の学習の層と「際立って異なった意義をもっている」としている。この文字数については、中・高の接続に関する後の項で改めて考える。

(2) 小・中の接続に関係した「わかる」ことの指針

前節から、小学校の算数では、第0層の量と第1層の負でない整数が基軸であり、すべてそれらを基にして構成することが原理になっていることがわかる。特に、量の世界は支配的であり、そのことが小学校の算数と中学校の数学の違いを大きく特徴づけることを物語っている。中学校の数学では、量そのものではなく抽象化された文字数を代数的に扱えるようになることが求められる。しかし、算数での量を基盤に置いた数とその計算法則が重要な基礎になっていて、その点が小・中の接続の鍵である。

例えば、小学校と中学校の接続を図ることとして、小学校高学年で、それまでの数の性質の法則性に目を向けさせる機会を作り、中学校では、算数で習熟した計算で無意識に使っていた性質を捉え直すなど、文字の世界がそれまでの数の世界の考えと遊離しないように配慮することが考えられる(本研究での勝美氏の研究レポートから)。

さらに平林氏は、小学校と中学校を通して数の世界を広げていくことに関して、次の三点を指摘している。

- 1) 新しい数世界が構成されるには、まずもとの世界の構造に充分に通暁することが必要である。
- 2) 新しい世界は、既知の世界の構造をモデルにして構成される。そのためには、現住し、よく馴染んでいる世界を潜在的に支配していた原理や法則が、ある程度顕在化されなければならない。
- 3) 新しい世界の個々の概念は、そこでの構造が作られるにつれて、よりよく理解される。

このような、新しい数の構成の精神が伝わるようにすることが、小・中接続での「わかる」ことにつながる要素であると考えられる。上記の1)~3)に即して例示してみよう。

1)は1節③で述べたことと関係する。例えば、負でない整数の演算に習熟することが分数や正負の数の演算の理解の基本になり、中学校の代数が円滑に「わかる」ためには、小学校での数の演算に関する習熟が基本になる。

2)に関して、例えば、中学校での文字式の意味や演算の法則を理解するために、小学校での数の四則演算の法則がある程度顕在化されなければならない。逆に、文字式の交換法則や分配法則などを知ること、小学校で無意識に使ってきた筆算の法則を再認識することができる。

3)に関しては、例えば、小学校で文字を用いないで解いていた文章題などが、中学校では未知数を含む方程式を用いて解かれる。この方程式による方法は、最初の段階で、生徒に戸惑いを与えるが、文字式に親しむにつれ、次第に、方程式による方法がより考えやすく、操作のしやすい方法であることが分かってくる。この構造化は、「解析」の優位さを示すモデルとして、後の学習で重要になる。

この3)は、数式領域においては、1節③でもふれたような、ある程度「できる」ことを優先させ、次第に「わかる」ことを期待することも必要であることを示唆している。

以上より、数式領域では、既習の知識と今学んでいることとの関係を確立することが特に大切であることが分かる。この面の興味ある題材が、飯高氏の、高校生を対象にしたパスカルの三角形の拡張に関する、本研究での研究授業で示された。（「わかる授業の実践」を参照）

(3) 中・高の接続における「わかる」について

数式領域における中・高の接続の問題の中心は、なんといっても文字式に関わることであろう。文字や文字式の理解の様相に関して、國宗・熊倉氏らの包括的な研究があり、重要な指摘が含まれていることから、それを参照して進めることにする。他にも、太田氏による文字式の認識に関する研究（太田，1992）や、過外氏らによる文字式の証明の表現に関する研究もある（過外ほか，1999）。

國宗・熊倉氏は、文字や文字式の理解の状態を、A)「計算できる」、B)「表現できる」、C)「読式できる」、D)「変数を理解している」の4観点をういた次の水準を定め、調査結果を分析している（國宗・熊倉，1996）。

[水準0] A)～C)すべてできず、D)を理解していない

[水準1] A)はできるが、B)とC)はできず、D)を理解していない

[水準2] A)～C)はできるが、D)は理解していない

[水準3] A)～C)ができ、D)を理解している

ここで、D)の「変数を理解している」というのは、ア) 1つの文字や文字式がいろいろな値をとること、イ) いろいろな値を1つの文字や文字式で表現できること、ウ) 文字や文字式の変域、エ) 「変数」としての文字や文字式の表わす意味、が理解できることをさしている。

結果として、水準2以上に達する割合は、中学校1年生では40%くらいであり、中学校2年生で60%くらい、中学校3年生で80%近くなることを示している。しかし、水準3に達するのは、中学校3年生でも23%であったとしている。

この「変数」としての文字や文字式の理解は、方程式や関数などと深く関係していて、中高の接続を考える上で欠かせないものである。高校では、多くの生徒が[水準 3]まで達していると想定して授業内容が設定されている。そこに、数式領域に関係した、中・高接続の問題点がある可能性がある。

例えば、高校数学の 2002 年度および 2005 年度の教育課程実施状況調査において、三角比の定着は非常に低かった。それは、単に生徒の三角比に対する関心が低いという理由だけではなく、変数を含んだ文字式の理解が弱いために、例えば、正弦定理 $a/\sin A = b/\sin B$ など、図形と変数を含む式との結びつきが捉えにくく、その使い方だけ覚えていたため、すぐに忘れ去った生徒が多数いるという理由も考えられる。

スケンプの数学的手続きの分類からは、中学校での「変数」の理解は、用具的理解に留まって、関係的理解までには達していない生徒が多数いるにも関わらず、高校では、最初から関係的理解を前提にして授業を進めようとするというように表現することもできる。

したがって、次のことが示唆されよう。

- ・中学校では、関数とそのグラフの学習などを援用して、「変数」としての文字のイメージをつくる工夫が必要である。
- ・高校では、中学校での文字や文字式のわかり方や理解の程度を認識し、「変数」としての文字の扱いを、再度、丁寧に繰り返しながら進める必要がある。

例えば、中学校では、ある関数の式が与えられているときに、そのグラフ上の点の座標を特定することと、関数の式に対応する数値を代入して式が満たされることと同じことであることを強調することなどが考えられる。また高校では、例えば、 $a/\sin A$ などの文字式の使い方は中学校段階では行っておらず、十分に気を配る必要がある。

3. 数式領域における「つまずき」に関わる「わかる」について

数学での「つまずき」は、すべての分野に渡って起こり得ることであるが、ここでは数式領域でのつまずきについて考えてみよう。

(1) 「つまずき」について

つまずきにも、授業についていけなくなる理解不能によるものと、思い違いや誤った思い込みなどの誤認識によるものがある。前者にも、数学的な考えに対応できない場合や、関心のなさからくるものがある。生徒が何とか理解したいと思いつつ努力しているにも関わらず理解不能な場合は、数学教育の責任であり、さらなる研究が必要である。しかし、数学に対する向き不向きもあり、すべてを解消することはかなり難しい面も含んでいる。それに比べ、後者の誤認識は、その原因さえわかれば解消することは可能である。

例えば、佐伯氏は、計算の技能などに大きく関わる手続き的知識と概念の意味を知る宣言的知識との行き来が重要であると説き、それができていないときに、「できる」と「わかる」ことの分離が生じ、間違いが起こるという（佐伯，1997）。そして、新しく必要となる手続き

的知識を宣言的知識に対応づけず、あくまで既存の手続き的知識で解消しようとするとき、「間に合わせ」による間違いが起きると指摘している。その例として、ブラウンによる次の間違いをあげている。

$$5\frac{2}{8} - 3\frac{7}{8} = 4\frac{12}{8} - 3\frac{7}{8} = 1\frac{5}{8}$$

これは10進法の繰り下がりや分数の場合に誤って用いた例であり、数学が苦手な子どもだけに起こる間違いではなく、数学が得意で積極的に考えていこうとする子どもにも起こる間違いである。このような場合、計算の意味を問う宣言的知識の必要性を指導することで、誤認識は解消できるだろう。

藤井氏は、ミスコンセプションを積極的に授業で生かすことで、生徒の「わかり」が促進されるとしている。具体的には、生徒の予想する解答にならない具体的な問題を提示し、なぜだろうという「認知的コンフリクト」を生起させ、それを解消することで理解の深まりがもたらされるとしている（藤井，1989）。それは、「ゆさぶり」が、「わかる」ことに対して効果的に作用することを示している。他にも、杜氏によるミスコンセプションの研究が知られている（杜，1991）。

また、芳沢氏は、算数・数学での「つまずき」を分類している（芳沢，2006）。他にも、「つまずき」の研究は数多く著されている（例えば（赤藤ほか，1978）など）。

(2) 「つまずき」の事例

ここでは、本研究の期間中に、本研究グループの今岡，勝美，佐々木，四方が行った「つまずき」の考察から、高校数学での具体的事例をいくつか紹介し、その分析を試みよう。

[事例1] 文字を正の数と思い込む：

$-a$ を負の数と認識する。 $a < 0$ のとき、 $\sqrt{a^2} = -a$ であることが理解できない。

(分析) 文字 a を数としてイメージするとき、負の数も考慮することは、初期の段階ではなかなかできない。具体的な数値を用いて確かめることや、文字がどんな値を取りうるかを意識できるようにすることが必要である。それは、条件や仮定を考える一歩であり、注意をすれば十分に改善できるのではないだろうか。

[事例2] 絶対値の理解は低い：

$|x|=5$ は解くことができるが、 $|x-1|=5$ はなかなか解くことができない。

$|x-3|=x-3$ ($x \geq 3$)、 $-(x-3)$ ($x < 3$) の場合分けが理解できない。

(分析) 高校生が絶対値を苦手とすることは、衆目の認めるところであろう。最初の事例では、 $|x-1|$ を $x-1$ と0との距離としてイメージすると、解を得るのに戸惑う面もある。むしろ、 x と1との距離と捉えた方が解を求めやすい。後者の事例について、中学校では、場合分けをする場面がほとんどないことに注意する必要がある。

[事例3] 関数の形が混じった変数の見方の弱さ：

$\frac{1}{x}=2$ は解くことができるが、 $\frac{1}{\sin A}=2$ はなかなか解くことができない。

$1+(\tan A)^2 = \frac{1}{(\cos A)^2}$ から $(\cos A)^2 = \dots$ の変形ができない。

(分析) 前者では、(1) $\sin A$ を x と同じように変数と捉えて、 $\sin A = 1/2$ とする：(2) 三角比の定義から $A = \pi/3$ などと求める、という二段階の操作になる。(1)の $\sin A$ を一つの変数として捉えることは、一度、 $\sin A$ のイメージを捨てなければいけない。後者についても同様。文字の置き換えにより、式を単純化してみる見方が必要である。

[事例4] 整式の表現に関する未理解：

数の商において、 $12=5 \times 2 + 2$ の意味は明らかに理解できるが、「整式Aを整式Bで割ると、商が整式Qで余りがRである。このことから $A=BQ+R$ とかける」ということはなかなか理解できない。

(分析) 整式の四則演算が実感を伴って捉えられていない可能性がある。また、数の場合であれば、直接、大小関係で余りがきまるが、整式の場合はその次数できまることに対する理解も不足している可能性がある。また、整式の理解を実際の計算を通して行っているところへ、この公式のようなA、B、Q、Rのような整式を記号によって表した関係式が捉えられない可能性もある。

[事例5] 分数式の扱いの弱さ：

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ の通分はできるが、 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}$ の通分はなかなかできない。

(分析) 整式の四則演算を用いながら分数式を計算することに慣れていなくて、分数式が分数と同じように扱えない可能性がある。この事例でも、 x^2 と $x(x+1)$ が、 2^2 と $2 \cdot 3$ と同じようなものとは捉えられていないのであろう。 x^2 と $x(x+1)$ には共通因数 x があり、どう通分してよいのか分からなかったり、通分したときに分子にくる整式の処理がうまくできないことが考えられる。

(3) 高校での「つまずき」の理由について

限られた事例から一般的な傾向を読み取ることはできないが、いくつかの事例から、つまずきの理由として推測されることをいくつかふれてみよう。

① 数の四則演算や個数の処理に関して：

数の扱いについて、小学校や中学校であまり現れなかった形や、そこで苦手としてきた考え方などで、つまずく場合がありうる。特に、比に関することに関しては、たとえ数値の場合であっても苦手としている生徒が多いことに注意すべきである。

② 文字式に関して：

中学校数学での文字式の基礎は、中学校の内容に即して養われるものであり、高校の発展した内容の中で用いられるとき、十分に対応できないことが考えられる。

特に、文字を変数としてみる見方において、具体的なイメージが伴わなかったり、逆に、ある数値のイメージが強くて、一般性を失ったり、前提条件を見失ったりする場合がある。

整式の四則演算を活用することは、高校数学の基礎・基本的な内容であるが、高校生が最初の段階では、数を扱うほどには馴染んでいないことを考慮しなければいけない。

③ 方程式に関して：

高校では、多くの場合、関数との関係で方程式の処理を確実にすることが必要になる。方程式の解を求める過程で、まず関数を単位として求めたり、先に関数の性質を用いたりすることがあり、それらに対応できない場合がある。また、不等式の理解が不十分であることを示す事例も多い。

4. おわりに

本稿では、数式領域の固有性を中心に、「わかる」ことの要素を考察してきた。その大きな論点は、次の点にあった。

- 1) 数式領域は、すべての分野の基盤を支えるものであり、数の拡張、代数への拡張など、系統的な積み重ねの学習が必要である。そのような学習において、「わかる」ための大事な要素は何か。
- 2) 数式領域の校種間の接続で、「わかる」授業にしていくには、どういう注意が必要か。
- 3) 数式領域の「つまずき」から「わかる」ことにどう接近できるか。

本稿は、研究グループでの討議や文献を参照し、できるだけ具体例を記述するようにはしたが、論点は決して実証的ではない。筆者の見解に対する批判をまちたい。

最後に、本科研費研究において、数式（代数）領域の活動を簡単に報告して閉じる。

○ 数式領域会議（2007/7/28）

H15 教育課程調査（永田）… 課題として客観的に見えてくること
小中の接続（勝美）… 小・中学校の先生の相互乗り入れ，式表現，
中高の接続（四方）… 不等式，絶対値，二次方程式の解の公式，学力差，指導の方法
数学教育理論（佐々木）… 筆算指導，先行研究，数から文字へ，パターン科学

○ 全体会議，分野会議（2007/10/28）… 報告(今岡)

○ 研究授業（2007/10/19）奈良教育大学附属中学校

吉岡睦美教諭「2次方程式がわかる授業」… コンセプトマップを用いたグループ学習

○ つまずきの事例の分析（2007/12）…（今岡，勝美，佐々木，四方）

○ 全体会議，分野会議(2008/06/21) …報告(今岡)

○ 全体会議（2008/08/29）… 数式領域報告(今岡)

- 研究授業（2008/9/18）愛知教育大学附属高等学校
佐々木徹郎教授「掛け算から平方完成へ」… マス計算による式の変形
飯高 茂教授「お笑いで数学を」… パスカルの三角形の「負」への拡張
- 全体会議（2009/06/13）
実践授業の報告（飯高，佐々木），数式領域報告(今岡)
- 研究授業（2009/6/23）奈良県立奈良高校
四方敏幸教諭「数（整数）の性質について」… 式を利用した整数の考察
- 研究授業（2009/12/08）葛城市立新庄中学校
川内充延教諭「1次関数」… 1次関数のグラフと連立方程式の応用

引用・参考文献

- 藤井齊亮（1989），「認知的コンフリクトによる理解の分析と評価—方程式・不等式を具体的題材として—」，日本数学教育学会 数学教育論究，Vol. 53，3～31.
- 平林一榮（2000），「数学教育における「構成」をめぐる事情—数の世界の構成を例に—」，全国数学教育学会 数学教育学研究，第6巻，1～8.
- 過外正律ほか（1999），「文字概念を育てる授業のあり方—文字式による証明での論証認知—」，日本数学教育学会誌，第81巻，第3号，60～68.
- 国宗進，熊倉啓之（1996），「文字式についての理解の水準に関する研究」，日本数学教育学会，数学教育論究，Vol. 65，66，35～54.
- 中田基昭（1997），「授業の現象学」，日本の算数・数学1997，『学校数学の授業構成を問い直す』，日本数学教育学会編，産業図書，65～78.
- 太田伸也（1992），「中学生の文字式に対する認識について」，日本数学教育学会誌，第74巻，第9号，275～283.
- 佐伯胖（1997），「認知科学から見た学校数学」，日本の算数・数学，『学校数学の授業構成を問い直す』，日本数学教育学会編，産業図書，81～93.
- 佐々木徹郎（2006），「筆算から文字式の学習へ」，日本数学教育学会，『第39回数学教育論文発表会論文集』，271～276.
- 赤藤勝美ほか（1978），「数学科における本校生徒の実態を知るための一考察—小中学校段階つまずき発見テストおよびつまずき生徒の指導—」，日本数学教育学会誌，第60巻，第5号，98～106.
- 杜 威（1989），「数学教育における文字式の学習に関する研究」，日本数学教育学会 数学教育論究，Vol. 53，35～39.
- 芳沢光雄（2006），「算数・数学つまずきの分類」，日本数学教育学会誌，第88巻，第3号，24～28.

3-2 図形（幾何）分野

図形（幾何）分野における「わかる」

國宗 進
静岡大学教育学部

目 次

1. 図形(幾何)分野における「わかる対象」
2. 図形(幾何)分野に特徴的な「わかる」
 - (1) わかることの把握
 - (2) 証明がわかることに関して学習者に要求されること
 - (3) わかる授業の評価
3. わかる授業の実現に向けて—授業研究に基づいて—
 - (1) わかる授業を行うために検討したいこと
 - (2) 事前・事後の検討会での議論
 - (2)-1 事前の検討
 - (2)-2 事後の検討

要 約

本稿は、図形(幾何)分野に特徴的な「わかる」について考察するとともに、授業研究を行って確認された「わかる授業を行うために検討したいこと」を示すことがねらいである。

まず、図形(幾何)分野における「わかる対象」を検討する柱として、「概念の理解、能力の形成、意義・必要性がわかる」という3つを設け、それに基づく分析の事例として、中3での三平方の定理と数Iでの三角比について具体的に示した。

続いて、数学のテキストを読み進めるには、読み手（学習者）一人ひとりに固有な思考行動が要求されることを示し、特に証明指導では何をねらいとしてどの程度までの思考を要求するかについて事前の検討が重要であることを指摘した。

また、授業研究に基づき「わかる授業を行うために検討したいこと」として、①授業のねらいの明示、②課題選択とその提示の仕方の検討、具体化、③生徒の解決法に関する検討、④的確なコミュニケーションの場の設定、⑤的確なワークシートの工夫、⑥わかったかどうかの確認の方法、の6点をあらためて確認した。

キーワード 図形 幾何 わかる 三平方の定理 三角比

1. 図形（幾何）分野における「わかる対象」

ここでは、「図形(幾何)分野におけるわかる対象」を具体的に述べる。

本研究では、既に述べたように、わかる対象(わかってほしいこと・目標)を次の4つの柱でとらえている。

「関心・意欲・態度又は価値観，概念・原理・法則，思考・判断，表現・処理」

この全体の枠組みを踏まえて、「図形(幾何)分野におけるわかる対象」を検討する柱として、次の3つ考える。

ア．概念の理解

イ．能力の形成

ウ．意義・必要性がわかる

この3つの柱で検討することにしたのは、次のような理由による。中学校数学科における図形指導の目標，内容について考えると，それは次の2点にまとめられ，概念の理解と能力形成の両者から示されているとみることができる。

ア) 平面図形や空間図形についての基礎的な概念や性質についての理解を深め，それらを活用する能力を伸ばす。

イ) 論理的思考力や直観力を伸ばす。

ア)，イ)は，上の3つの柱のア，イにそれぞれ対応している。これら「概念の理解」，「能力の形成」に加えて，「ウ．意義・必要性がわかる」を第3の項目として起こして，「わかる対象」の柱としたということができる。

この3つの柱は，高校の幾何に関する内容の分析も含めて考えている。例えばベクトルに関する指導目標は，「平面及び空間のベクトルの意味や演算，成分，内積等の基本的な概念の理解と，ベクトルを使って図形の性質の考察，そしてそれらを通して，ベクトルの考えが有用なことを認識し，図形の性質など具体的な事象の考察にベクトルを活用できること」であり，二次曲線に関しては，「二次曲線の基本的な性質の理解，解析幾何的な考察方法の理解，さらに，軌跡など具体的な事象の考察に活用できること」であって，これらはほぼ3つの柱で述べることができる。

以上述べた「わかる対象」に関する図形(幾何)分野の3つの柱と，本研究全体の4つの柱との関係を図式的に示すと，図1のようになる。

図形(幾何)分野の3つの柱		本研究全体の4つの柱
ア．概念の理解	←→	概念・原理・法則
イ．能力の形成	←→	思考・判断 表現・処理
ウ．意義・必要性がわかる	←→	関心・意欲・態度又は価値観

図1 図形(幾何)分野の柱と全体の柱との関係

この枠組みに従って、例えば中2での図形学習全体についての「わかる対象」を具体的に示すと、表1のようになる。

また、中学校と高校での扱いの関連が大きい、中3での三平方の定理に関する内容と数Iの三角比に関する内容を具体的に示すと、表2のようになる。表2においては、数Iの三角比について、特に中学校・高校の接続に留意して、中3での三平方の定理との関係について細かく記述してある。

本研究において、「わかる」とは、「外部からの情報を取捨選択し、変形し操作を加え、先行知識を含んで自ら再構成して得られた心的状態」のことであるとしている。この立場からすると、数Iの三角比に関する学習を、生徒達が中学校での学習によって既知の三平方の定理と関連付けて行うことの重要性を示しているということができる。

表1 中2での図形学習全体の内容

対 象	中2での図形学習全体に関する具体的内容
概 念 の 理 解	<ul style="list-style-type: none"> ・ 平行線と角に関する一連の性質 ・ 図形の合同， 三角形の合同条件 ・ 二等辺三角形・平行四辺形の性質と条件 ・ 仮定・結論， 証明， 定義 ・ 性質・条件とその関係， 命題の逆， 反例 ・ いろいろな四角形の性質と条件， 四角形の包摂関係
能 力 の 形 成	<ul style="list-style-type: none"> ・ 性質や証明を見出す， 補助線を引く， 証明を口述し記述する ・ 既に得た性質や条件を使う， ・ いろいろな四角形を関係付けてみる ・ 三角形・四角形に関する数学的推論能力の伸長 ・ 三角形・四角形に関する問題を解決する
意 義 ・ 必 要 性 が わ かる	<ul style="list-style-type: none"> ・ 定義・定理の役割（定義や真の命題を根拠に演繹的推論を重ねる） ・ 実験実測による方法と証明による方法の違い ・ いわゆる「公理」や定理等の「体系」的な理解 ・ 図形と日常とのかかわり

表2 中3での三平方の定理の単元，及び数Iの三角比

内容 対象	中3での三平方の 定理	数Iでの三角比
概 念 の 理 解	<ul style="list-style-type: none"> ・ 三平方の定理と その逆 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 鋭角の三角比 ・ 三角比の間の関係

	<ul style="list-style-type: none"> ・三平方の定理の平面図形への利用 ・三平方の定理の立体への利用 	$\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = 1 / \cos^2\theta$ $90^\circ - \theta$ の正弦・余弦 <ul style="list-style-type: none"> ・鋭角の三角比(180°までの角への拡張) $180^\circ - \theta$の三角比 ・正弦定理, 余弦定理, 三角形を解く, 三角形の面積公式 ($S = 1/2 \cdot bc \sin A$)
能力の形成	<ul style="list-style-type: none"> ・数学的推論能力の伸長 ・三平方の定理を利用して問題を解決する 	<ul style="list-style-type: none"> ・数学的推論能力の伸長 ・既に得た性質や公式を使う ・三角比の間の関係や, 性質の間の関係を見出し証明する ・補助線を引く
意義・必要性がわかる	<ul style="list-style-type: none"> ・三平方の定理とその逆が使われている日常の場面がある ・2点間の距離を求めるのに三平方の定理が使われる 	<ul style="list-style-type: none"> ・三角比では図形の相似がもとになっている ・三角比の間には関係がある ・$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ や $1 + \tan^2\theta = 1 / \cos^2\theta$は, 三平方の定理の形を変えたものである ・余弦定理の証明で三平方の定理が使われる ・余弦定理は三平方の定理の一般三角形への拡張になっている ・正弦定理や余弦定理の証明で場合分けすることの必要性 ・三角比と日常とのかかわり

2. 図形（幾何）分野に特徴的な「わかる」

(1) わかることの把握

ここでは、図形(幾何)分野に関する特徴的なわかり方について、内容的にも時間的にも大きな比重を占める「図形の証明」の学習指導に関して検討する。

例えば平行四辺形に関する性質が成り立つことを示すには、ふつう、表3に示したような学習過程がとられ、また、わかったかどうか判断されるであろう(小関,1987)。

表3 ある性質を証明する過程と「わかる」ことの把握

学習の過程	わかる対象	「わかる」ことの把握
「平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる」 <方針>対角線AC, BDをひき三角形の合同を示そう。	命題がわかる	<ul style="list-style-type: none"> ・命題がいえるか ・特述命題で表現できるか (・証明までも理解しているか) (・命題を利用できるか)
<証明> △ABOと△CDOで, AB=CD ...	証明がわかる かかれた図は代表であることがわかる	<ul style="list-style-type: none"> ・証明することができるか ・証明を読んでわかるか ・証明を示され図との対応等を順次説明されてわかるか ・穴埋めができるか
そうすることの意義がわかる	この証明がもつ一般性がわかる	<ul style="list-style-type: none"> ・個々の命題や証明について、実験実測による方法と証明の方法との違いがわかるか ・一つのシステムとして「体系」をなしていることがわかるか

表3の最右列に示したように、「わかっている」かどうかの把握は、書いたものや発言等、外に表出された内容を手がかりにして、「できている」かどうかによって判断されるのがふつうである(佐伯, 1982)。そして、「単に証明の穴埋めができるか」と「証明しそれを記述することができるか」の難易度の差が示すように、その判断基準の程度にも幅がある。

この例のように、図形の証明に関する学習においては、その証明ができるという側面とそうすることの意義がわかるという側面から、生徒の学習状況をとらえることが重要であり、それを踏まえて「わかる授業」を構想することが肝要である(小関・家田・國宗, 1984; 國宗, 1987)。

(2) 証明がわかることに関して学習者に要求されること

数学のテキストを読み進める場合、ふつう、多くの時間が必要とされる。その際に読み手(学習者)に期待されている思考行動を分析してみると、表4のようになる。

表4 数学のテキストを読む際に学習者に要求されること

記述の流れ	書き手(執筆者)の姿勢	読み手(学習者)に要求されること
導入・挨拶文	目標を示す。 全体像の把握・意欲の喚起	「こんな内容をやるのか」とぼんやり把握する。
定理1, 証明 定理2, 証明	命題とその証明を示す。 数学の系統に従った記述 ←「読んでわかってほしい」	書かれた命題とその証明をたどる。 場合によっては自ら証明をつける (よりよくわかるために、あるいは記述が粗い場合に)。
演習問題	定理の適用問題,あるいは近接する問題を示す。 ←「演習によって力がつくし,わかっているかが確かめられる」	読み手の力量に応じ問題に向かう。 ・定理の証明をなぞればできる ・定理を適用して証明する 定理の証明を適用して証明する ・定理やその証明から飛躍したアイデアや総合力が必要とされる
まとめ (全体的な振り返り)	こんな系統になっている。 この定理や証明が示されて (この数学者のおかげで)数学は大きく発展した。	学習内容の全体像を振り返って,なるほどと納得する。 数学や数学者への憧憬,文化的価値を感得することもある。

表4を見ると、書き手（執筆者）が書き付けた表現や意図を越えて、読み手一人ひとりに固有な自らの思考行動が要求されていることに気付く。この特徴は、定理とその証明が多くページを占める中学校・高校の図形の学習についても、かなりの程度あてはまっている。

特に、演習問題が学習者に対して要求する程度については、

- ・定理の証明をなぞれば解答できる問題
 - ・定理やその証明を適用して証明する問題
 - ・定理やその証明から飛躍したアイデアや総合力が必要とする問題
- というように、難易度には幅がある。このことは、図形(幾何)分野でのわかる授業を構築する上で、何をねらいとしてどの程度までの思考行動を要求するかについて、事前の検討が重要であることを示している。それはまた、わかったかどうかをどのように評価するかの検討に関しても重要な視点を与えている。

(3) わかる授業の評価

「わかる授業」の評価は、その授業が何をねらいとして行われたかに依っている。授業のねらいが達成されたかどうかを検討するには、それを含む一連の学習

指導がねらう目標を明らかにしその評価を行うことになる。

ここでは、中3での「三平方の定理とその利用」の単元を例に、「わかる授業」の評価について検討してみよう。「三平方の定理とその利用」に関して、「わかる対象」の枠組み「概念の理解，能力の形成，意義・必要性がわかる」を踏まえて評価規準表を作ると表5のようになる。

表5 三平方の定理とその利用 評価規準

対 象	具体的内容
概念の理解	<ul style="list-style-type: none"> ・ 直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さを a, b, 斜辺の長さを c とすると, $a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。(三平方の定理) ・ 三平方の定理の逆も成り立つ。(直角三角形であるための条件) ・ 1 つの鋭角が 45° の直角三角形の 3 辺の比は, $1:1:\sqrt{2}$ である。 ・ 鋭角が $30^\circ, 60^\circ$ の直角三角形の 3 辺の比は, $1:2:\sqrt{3}$ である。 ・ 三平方の定理を使って, 直角三角形の辺の長さを計算で求める。 ・ 三平方の定理を使って, 線分の長さ, 面積, 体積などに関する問題を解決する。 平面図形の線分の長さや面積, 立体の部分の長さや体積, 座標平面上の 2 点間の距離
能力の形成	<ul style="list-style-type: none"> ・ (いろいろな直角三角形で, 3 つの正方形の面積の間の)関係を帰納的に見いだす。 ・ (面積の関係から辺の長さへ)観点を変更する。 ・ 文字を使って, 数量の関係を一般的に表す。 ・ (三平方の)定理を証明する。背理法や転換法の考え ・ (三平方の)定理を使って問題解決する。
意義・必要性がわかる	<ul style="list-style-type: none"> ・ 三平方の定理の逆を使うと, 3 辺の長さが与えられている三角形が直角三角形であるかどうか判定できる。 ・ 図形の中に直角三角形を見いだして, 三平方の定理を使うと, 線分の長さ, 面積, 体積などを計算で求めることができる。 ・ 日常生活の場面で三平方の定理が使われていることを知る。 ・ 三平方の定理の証明には多くの先人が取り組んでいて, いくつかの証明法がある。

ここで例えば、「三平方の定理(そのもの)がわかった」かどうかを学習後に判断するための評価問題を例示すると、以下の ①, ② のようになる。

なお、「三平方の定理とその利用」を評価するためには、表 5 で示したように、

三平方の定理を使って図形の辺の長さを求めることや、平面図形への利用、立体への利用についての理解の状況も評価することは当然であるが、それらについてはここでは省略する。

- ① 右の図のように、 $\angle C=90^\circ$ の $\triangle ABC$ と合同な三角形を組み合わせて、辺 AB を 1 辺とする正方形を作る。この図を使って、三平方の定理が成り立つことを証明したい。 $BC=a$ 、 $CA=b$ 、 $AB=c$ とし、次の口にあてはまる式を求めて、証明を完成させなさい。(図、略)

【証明】

正方形 $ABDF$ の面積を二通りの考え方で求める。

$\triangle ABC$ と合同な三角形 4 つと正方形 $CEGH$ の和と考えると、その面積は、

$$\square \times 4 + (a-b)^2 \\ = a^2 + b^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

1 辺 AB の正方形と考えると、その面積は、 $\square \dots \textcircled{2}$

①、②から、 $a^2 + b^2 = c^2$

したがって、三平方の定理が成り立つ。

- ② 3 辺の長さが 2cm、3cm、4 cm である三角形は直角三角形ですか。理由も示して答えなさい。

この 2 問のねらいを表 5 の具体的内容に関連付けて述べると、次のようになる。

① は、「三平方の定理の証明を知っている」かどうかを、授業で扱った証明法を振り返ることができるかどうかによって判定しようとするものである。

② は、「三平方の定理の逆を使うと、3 辺の長さが与えられている三角形が直角三角形であるかどうか判定できる」かどうかを、三平方の定理の逆を使って問題解決ができるかどうかによって判定しようとするものである。

3. わかる授業の実現に向けて－授業研究に基づいて－

ここでは、「図形(幾何)分野」に関して、奈良女子大附属中等教育学校 2 年生を対象に横弥直浩教諭によって行われた「等積変形」の授業、及び、奈良県生駒市立生駒中学校 3 年生を対象に丸井理恵教諭によって行われた「線分の三等分」の授業に関する検討に基づいて、わかる授業を行うために要求されること等をまとめる。なお、この 2 つの授業のねらい、展開の実際等については、第 4 章の実践編に詳細に述べてある。

(1) わかる授業を行うために検討したいこと

2つの授業研究に関するメンバーによる検討を通して、わかる授業を行うために、以下の点を検討することの重要性を確認した。これらは授業前に検討する内容であるとともに、授業後の検討においても協議の柱になるものである。

－わかる授業を行うために検討したいこと－

- ①授業のねらいの明示
- ②課題選択とその提示の仕方の検討，具体化
- ③生徒の解決法に関する検討
- ④的確なコミュニケーションの場の設定(生徒同士の，教師と生徒の)
- ⑤的確なワークシートの工夫(これは特に上記②，③を実現する上で重要)
- ⑥わかったかどうかの確認の方法(授業中，事後)

(2) 事前・事後の検討会での議論

以下、実際に行われた2つの授業研究に関する事前・事後の検討会において、上記①～⑥に関してなされた議論を簡単にまとめておく。

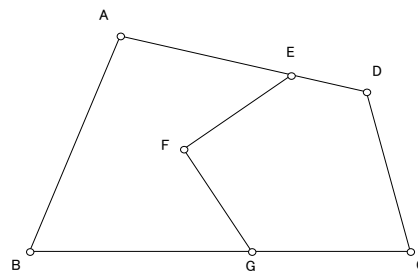
(2)－1 事前の検討

ここでは主として横教諭による「等積変形」の授業について紹介する。

①授業のねらいと課題

授業のねらいは三角形の等積変形を理解することであり、それを次の2つの課題の解決を通して目指したいと授業者から提案された。

【課題1】図のように、四角形ABCDの土地が折れ線EFGを境界として、2つに分けられている。点Eを通る直線を新しい境界線に改め、2つの土地の面積を変えないで変形したい。どのような境界線を引きよいか。



【課題2】点Eは通らなくてよいとしたら、どんな直線でこの四角形を分けることができるか。ただし、面積は同じである。

以下、検討会での主な意見を示す。

②課題に関して

- ・境界線を「点Eを通る直線」と限定し、その後で一般化して「Eを通らなくてもよいとしたら」とするのは不自然ではないか。
- ・「面積を変えずに境界を直線にするには…」と問題提示し、動かなかった場合に「点Eを通る直線を考えたかどうか」と特殊化するのはいかがか。
- ・点Eを通ることを前提とするかしないかによって、そこに現れる数学的な考

え方は変わってくる。

- ・コンピュータを使うのかどうか。それによって展開が変わってくる。

③生徒の解決法に関して

- ・点 E と G を結べるかどうかが、求める直線の発見にはまず重要である。
- ・前時までは線分の比なので、急に面積の話題になる。台形の対角線を引いたときにできる、等しい面積の図形を事前に扱っておくのか。

④コミュニケーションの場の設定

- ・生徒同士、あるいは教師と生徒とのやりとりをどのように想定しているか。

⑤ワークシートに関して

- ・多様な解法を要求したいというねらいに合うワークシートを工夫したい。
- ・プリントに複数個の図を用意して、多様な解答を促すようにしたい。

⑥わかったかどうかの確認に関して

・授業中においては、作図の様子を観察、また等積変形になっている理由の説明(言葉で、また、書いて)を、事後には授業アンケートの実施を考えている。上述のような意見が事前検討会の参会者から述べられた。授業者も参観者も、これらの検討課題を共有して、当日の授業に臨んだということが出来る。事前の意見を踏まえてどのように実際の授業展開を図るかについては、当然のことながら授業者にゆだねられ、第 5 章で詳しく述べたような形で授業が行われた。

(2)－2 事後の検討

ここでは主として丸井教諭による「線分の三等分」の授業について紹介する。

①授業のねらい

授業のねらいは、線分を三等分する方法を知り、その方法で線分が三等分できることを平行線と線分の比の定理を根拠にして説明すること、そして日常生活の中に数学が利用されていることに気付くことである。

②課題の提示、具体化

ねらいに向けて、次の i)～v)のステップを踏んだ展開が計画された。

○授業の展開案

- i) プリントに印刷された線分を、平行線が等間隔にかかれたプリントを使って、3等分する方法を考える。
- ii) 三等分する方法を発表する。
- iii) その方法で三等分できることは、平行線と線分の比の定理を根拠にして説明できることを確認する。
- iv) A4 版の紙の縦の部分で三等分する方法を、4つ折りにした他の紙を使って(等間隔の平行線とみて)考える。
- v) プリントに印刷された線分を 5等分する作図の方法を考え、作図する。

○授業展開の実際(概略) 1:20～2:05

i) (線分が印刷されたプリントを配布して)線分を 3 等分する方法を考える。

T (平行線が等間隔にかかれたプリントを配布し)折らないでがんばって 3 等分してください。(1:30)

(S わかった, わかった, という声) (1:31)

T この線は等間隔の平行線を引いています。

(S 等間隔の平行線を横におき, その上に等分する線分の紙を重ねて透かしてみている生徒が多い。)

ii), iii) 三等分する方法とその理由の発表(1:34～)

(「T できた人」に 12 人が挙手)

T どうしてですか S (女子)「比が移る」という言い方で説明する。

T 教科書を開いてごらん。平行線と線分の比の定理を確認する。(1:40)

iv)紙を三等分する

(ピンク色の紙を 2 枚配布) 1 枚を 4 つ折りにし, それを(等間隔の平行線とみて)使って 3 等分する方法を考えさせる。

黒板の前で子どもに黒板で確認させる。(1:50)

T 普段の生活の中でも使えますね。

v) (紙の上にかかれた線分を 5 等分するプリントを配布)

T コンパスや必要な道具を使って, この線分を 5 等分しましょう。

S 作図の方法を考え, 作図する。(1:53～2:05)

③生徒の解決法に関して

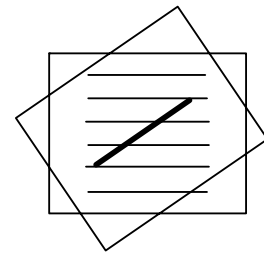
- ・ ii)の線分を三等分する方法や, iv)の A4 版の紙の縦を三等分する方法についてはよくわかったようだ。しかしながら, その方法で三等分できることを平行線と線分の比の定理を根拠にして説明することについては弱かったのではないかと。また, 紙を折ることと, かかれた線分を三等分することのギャップは大きいようにみえた。
- ・ 平行線の幅が等しい, つまり等間隔ということが何を意味するのかの確認を明確にしておく必要があった。

④コミュニケーションの場の設定に関して

- ・ 近隣の生徒同士でのコミュニケーションが随所にみられてよかった。普段の授業の雰囲気そのまま現れていた。
- ・ 黒板の前で「説明する」活動についてはなかなか難しい面がある。

⑤ワークシートに関して

- ・ この授業では, 紙を折ったり作図したりという具体的な活動を段階的に用意



することで、個に対応しようとしていた。

- ・三等分した線分の紙をノートに貼ることによって、活動の跡を残したい。

⑥わかったかどうかの確認に関して

- ・授業中においては、紙を折る様子や作図の様子の観察、近隣の生徒同士でのコミュニケーションの内容から把握した。
- ・授業終盤での「線分の 5 等分」の問題は、発展という意味と授業評価という意味があった。一気に、かかれた線分の 5 等分は生徒にとってきついか。

以上、図形(幾何)分野におけるわかる授業について検討した。その実現には、3の(1)で示した「わかる授業を行うために検討したいこと」を十分に議論すること、特に「わかる対象」を明確にし、その評価規準を分析し明確にすることの重要性があらためて確認された。

〈引用・参考文献〉

國宗進(1987), 「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」『日本数学教育学会誌 数学教育学論究』 Vo1.47・48, pp.3-23.

小関熙純・家田晴行・國宗進(1984), 「図形認知の発達的研究-「平行四辺形」概念の形成過程について」『日本数学教育学会誌 数学教育学論究』 Vo1.41・42, pp.3-23.

小関熙純編著(1987), 『図形の論証指導』, 明治図書.

佐伯俳(1982), 「序章“わかること”の心理学」, 佐伯胖編『認知心理学講座 3 推論と理解』, 東大出版会.

3-3 関数(解析)分野

関数(解析)分野における「わかる」

熊倉 啓之

静岡大学教育学部

山口 武志

広島大学大学院教育学研究科

目次

1. 関数(解析)分野における「わかる対象」
 - (1) 3つのわかるの具体例
 - (2) 3つのわかるの関係
 - (3) 関数(全体)がわかること
2. 「関数がわかる」ための指導
 - (1) 関数についての生徒のつまずきの視点から
 - (2) 小・中・高等学校の接続の視点から
3. 「関数がわかる」ことの評価
 - (1) 「関数の概念がわかる」ことの評価
 - (2) 「関数の意義がわかる」ことの評価
4. 「関数がわかる」授業のあり方
 - (1) 「数学的活動」を重視すること
 - (2) 具体例との対応を図りながら、概念の意味理解を促すこと
 - (3) 表、グラフ、式の相互関係の理解を重視すること
 - (4) 授業におけるコミュニケーションを重視すること

要約

本稿は、関数(解析)分野に「わかる」ことについて検討し、関数(解析)がわかるための指導を考察し、授業のあり方を追究することを目的とする。

まず、「関数がわかる」ことの対象を「概念」、「方法」、「意義・必要性」の3つの「わかる」でとらえて検討する。次に、「関数がわかる」ための指導について、生徒のつまずきや小・中・高校の接続の視点から考察する。また、「関数がわかる」ことの評価についても検討を加える。最後に、後述する「関数がわかる」授業実践結果を踏まえて、「関数がわかる」授業のあり方を追究し、「数学的活動」を重視すること(ICTの利用も含む)、具体例との対応を図りながら、概念の意味理解を促すこと、表・グラフ・式の相互関係の理解を重視すること、授業におけるコミュニケーションを重視することの4点が重要であることを指摘した。

キーワード 概念・方法・意義，数学的活動，表・式・グラフの相互関係

1. 関数（解析）分野における「わかる対象」

本研究における「わかる対象」の枠組みを踏まえて，関数における「わかる対象」を，次の A, B, C の 3 つでとらえる。

- A. 関数の概念（定義，性質等）
- B. 関数の性質等を調べる方法
- C. 関数の意義・必要性

すなわち，「関数ができること」を，「関数の概念ができる」，「関数を調べる方法ができる」，「関数の意義ができる」の 3 つの「わかる」でとらえることとする。

狭い意味で，「関数ができる」ことを「関数の概念ができる」ことのみでとらえることも考えられるが，ここでは，「わかる」の意味をより広くとらえるものとする。このことは，「関数ができる」ようになるためには，「概念」のみならず「方法」や「意義・必要性」も重要であると考えられるからである。

(1) 3 つの「わかる」の具体例

① 関数

関数についての 3 つの「わかる」の具体的な内容を，例えば，1 次関数と 2 次関数を例に，次の表 1 に示す。

表 1 関数ができる

	1 次関数（中 2）	2 次関数（数学 I）
A. 概念	<ul style="list-style-type: none">・ 1 次関数の定義・ 変化の割合が一定であること・ 1 次関数は，一定の割合で増加あるいは減少すること・ 1 次関数のグラフが直線になること・ 1 次関数のグラフの傾きが変化の割合に等しいことなど	<ul style="list-style-type: none">・ 2 次関数の定義・ 変化の割合が一定でないこと・ 2 次関数は，増加→減少あるいは減少→増加すること・ 2 次関数のグラフが放物線になること・ y の値が最大または最小になる場合が必ずあることなど

B. 方法	<ul style="list-style-type: none"> ・表，式から関数のグラフをかく方法 ・表，グラフから関数の式を求める方法 ・変化の割合を求める方法 ・表，グラフから変化のようすを読み取る方法 ・表から対応のようすを読み取る方法 ・2つの数量の間に，関数の関係を見つける方法 など 	
C. 意義・必要性	<ul style="list-style-type: none"> ・1次関数の関係があるとき，ある特定の場合作を調べる上で有用であること ・1次関数に近似して，未来や過去を予測できること など 	<ul style="list-style-type: none"> ・2次関数の関係があるとき，最大あるいは最小となる場合を調べる上で有用であること など

表1では，1次関数と2次関数を例に示したが，他の関数の場合についても基本的に同様である。それぞれの「わかる」の内容について，より一般的に述べれば次の通りである。

A：概念

関数の定義，増加・減少の特徴，グラフの特徴，変化の割合の特徴，グラフと式・表との相互関係 など

B：方法

グラフをかく，式を求める，変化を読み取る，対応を読み取る，関数関係を見つける など

C：意義・必要性

最大，最小等の特定の場合作を調べる上で有用であること，過去や未来を予測する上で有用であること など

② 微分

次に，高等学校の学習内容である「微分」について，3つの「わかる」の具体的な内容を考える。「微分」は，関数を解析するための1つの手段であるが，高等学校における主要な学習内容として長期間にわたり認知されてきたものであり，解析分野において微分を抜きに語ることはできないと考え，取り上げることとした。「微分の考え（数学Ⅱ）」と「微分法（数学Ⅲ）」を例に，次の表2に示す。

表2 微分がわかる

	微分の考え（数学Ⅱ）	微分法（数学Ⅲ）
--	------------	----------

A. 概念	<ul style="list-style-type: none"> ・微分係数，導関数の定義 ・微分の演算の線形性 ・微分係数が，ある瞬間の変化率，グラフ上のある点での接線の傾きを表していること ・導関数が，瞬間変化率（接線の傾き）の関数であること ・導関数の符号と関数の増減の関係 など 	<ul style="list-style-type: none"> ・第 2 次導関数の符号と関数のグラフの凹凸の関係 ・微分可能であること など
B. 方法	<ul style="list-style-type: none"> ・整関数を微分する方法 ・導関数をもとに極値を求める方法 ・導関数をもとに増減表をつくり，関数のグラフの概形をかく方法 ・導関数をもとに接線の方程式を求める方法 など 	<ul style="list-style-type: none"> ・いろいろな関数（三角関数，指数関数，対数関数，分数関数，無理関数）を微分する方法 ・積，商，逆関数，合成関数，媒介変数表示の関数，陰関数の各導関数を求める方法 ・対数微分法により導関数を求める方法 ・高次導関数を求める方法 ・第 2 次導関数をもとに，グラフの変曲点を求める方法 など
C. 意義・必要性	<ul style="list-style-type: none"> ・関数のグラフの概形をかく上で有用であること ・関数の最大値・最小値を調べる上で有用であること ・道のりの関数から瞬間速度を，速度の関数から瞬間の加速度を求める上で有用であること など 	

表 2 では，数学 II で扱う「微分の考え」と数学 III で扱う「微分法」を比較した。対象とする関数の範囲が，多項式関数から有理関数，超越関数へ広がると同時に，「微分可能の意味」や「第 2 次導関数とグラフの凹凸の関係」など，微分の意味が広がっていることがわかる。

(2) 3つの「わかる」の関係

たとえば、2次関数のグラフを例にして、次の3つの「わかる」を比較する。

- A. 概念「2次関数のグラフの特徴がわかる」
- B. 方法「2次関数のグラフをかく方法がわかる」
- C. 意義「2次関数のグラフをかく意義・必要性がわかる」

それぞれについて、さらに詳しく述べれば次の通りである。

「概念」は、2次関数のグラフが「増加→減少」あるいは「減少→増加」になるなめらかな曲線であり、左右対称で頂点が存在すること等がわかることである。

「方法」は、2次式を平方完成する方法がわかり、さらに平方完成した式から、頂点の座標や軸の方程式等がわかることである。

「意義」は、グラフをかくことにより、変化の様子のがりがわり、どこで最大・最小になるか等がわかることである。

これら3つの「わかる」は、相互に関連しているといえる。それぞれについて「わかる」ことを通して、互いの「わかる」ことが深まっていくと考えられる。

しかし、必ずしも3つをすべてわかっているとは限らないであろう。たとえば、2次関数のグラフをかく方法はわかるが、グラフの特徴がわからない生徒がいると考えられる。グラフの特徴がわかっても、グラフをかく意義がわからない生徒もいるであろう。一方で、グラフの特徴がわかり、グラフをかく意義がわかっても、グラフをかく方法がわからない生徒もいるはずである。

また、「方法がわかる」ことは、「できる」と関連が強い。たとえば、「2次関数のグラフをかく方法がわかる」ことは、「2次関数のグラフをかくことができる」とかなり近いと考えられる。計算ミスやその他のケアレスミス等を除くと、両者はほぼ一致するといえよう。したがって、たとえば「2次関数のグラフをかくことはできるが、グラフの特徴がわからない・グラフをかく意義がわからない」という、いわゆる「できるけれどわからない」という生徒は、「方法はわかるが、概念や意義がわからない」という生徒であるといえる。

(3) 関数（全体）がわかること

(1)では、個別の関数ができることについて考察したが、ここでは「関数（全体）がわかる」ことについて考察する。

関数の定義は、平成20年告示学習指導要領では、中1で扱うことになる。しかし、この段階で「関数（全体）がわかる」ことにはならないであろう。その後の関数に関わる様々な学習経験を通して、関数について徐々に理解が深まっていくと考えられる。

「関数（全体）がわかる」ことを考えるに際しては、次の4つの視点が重要であると考えられる。

- ① いろいろな関数が、順次わかる。＜構成要素がわかる＞
- ② いろいろな関数相互の関係がわかる。＜構成要素間の関係がわかる＞
- ③ 関数と方程式や図形との関係がわかる。
- ＜他の対象との関係がわかる＞
- ④ いろいろな関数を活用する。＜活用の方法と意義がわかる＞

それぞれについて、詳しく述べると次の通りである。

① いろいろな関数が、順次わかる。

小学校→中学校→高等学校（数学Ⅲまで）で、次の関数について順次学習していく。

比例，反比例，1次関数，関数 $y=ax^2$ ，階段関数，2次関数，指数関数，対数関数，三角関数， n 次関数($n \geq 3$)，分数関数，無理関数

これらの各関数が順次わかることを通して、「関数（全体）がわかる」ことが深まっていくと考えられる。

② いろいろな関数相互の関係がわかる。

いろいろな関数相互の共通点，相違点や包含関係について学習する。

たとえば，比例と1次関数の場合，次の点を挙げることができる。

ア．共通点：変化の割合が一定である。

イ．相違点： x が2倍，3倍，…になると， y は2倍，3倍，…になる／ならない。

ウ．包含関係：比例は，1次関数の特別な場合である。 など

上記のような関数相互の関係がわかることを通して、「関数（全体）がわかる」ことが深まっていくと考えられる。

③ 関数と方程式や図形との関係がわかる。

関数と関数以外の内容の関係について学習する。

たとえば，関数と方程式の関係の場合，次の点を挙げることができる。

ア．関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標は，方程式 $f(x)=0$ の解に一致する。

イ．2つの関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフの交点の x 座標は，連立方程式 $y=f(x)$, $y=g(x)$ の解と一致する。

ウ．関数 $y=f(x)$ において，ある特別な y の値 c に対応する x の値を求めるためには，方程式 $f(x)=c$ を解けばよい。 など

また，関数と図形の関係の場合，次の点を挙げることができる。

エ．関数 $y=f(x)$ のグラフは，方程式 $f(x)-y=0$ の表す図形と一致する。

上記のような関数以外の内容との関係がわかることを通して、「関数（全体）

がわかる」ことが深まっていくと考えられる。

④ いろいろな関数を活用する。

いろいろな関数を，様々な問題解決に活用することを学習する。このような学習経験を通して，「関数（全体）がわかる」ことが深まっていくと考えられる。

以上の①～④の関係を図に示すと，次の通りである。

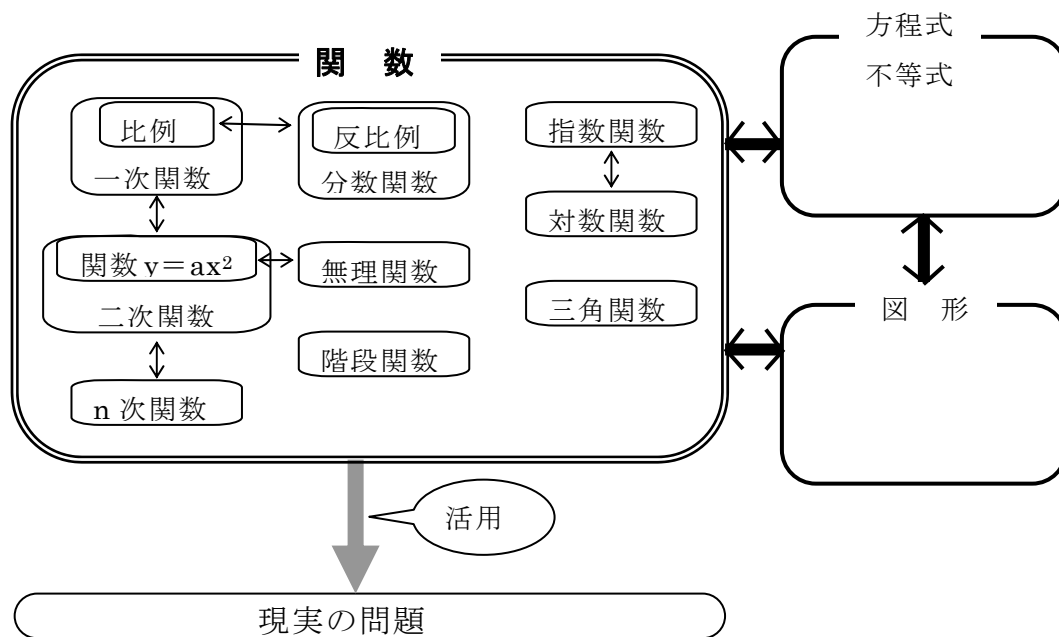


図1 「関数(全体)がわかる」ことを考える視点

2. 「関数がわかる」のための指導

ここでは，「関数がわかる」ための指導について，「生徒のつまずき」と「小・中・高の接続」という視点から考察する。

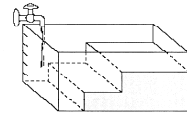
(1) 関数についての生徒のつまずきの視点から

関数についての生徒のつまずきを，教育課程実施状況調査，特定の課題に関する調査，全国学力学習状況調査をもとに分析した。その結果，次の点が指摘できる。

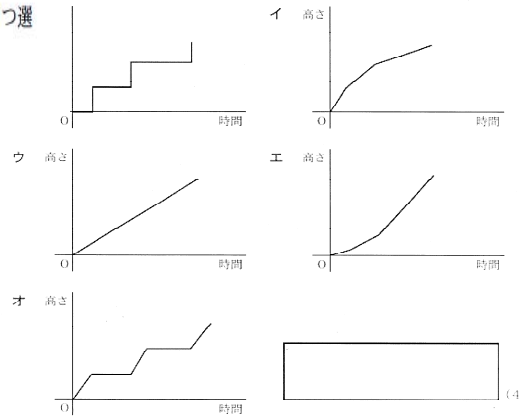
① 日常事象の変化の概要をとらえることに課題がある。

次は、特定の課題に関する調査問題（1年I[2]，2年I[6]，3年I[3]）である。

2 下の図のように、底が階段状の直方体の水槽があります。階段の各段は水平です。この水槽に毎分同じ量ずつ水を入れていきます。



水を入れ始めてから満水になるまでの時間と水面の高さとの関係を表すグラフに最も近いものはどれですか。下のア～オの中から当てはまるものを1つ選び、その記号を の中に書きなさい。



この問題の通過率は、中1 22.7%，中2 32.7%，中3 47.5%であった（国立教育政策研究所，2006）。学年進行とともに上昇しているものの、中3の段階でも50%に達していない。

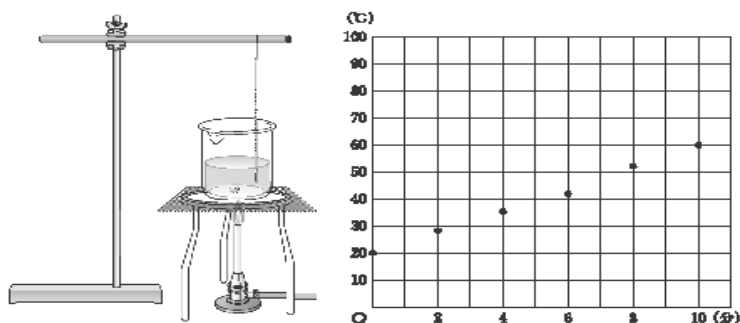
この関数は、変域によって変化の割合が異なる1次関数である。式を求めたり計算したりするのではなく、変化の概要をとらえてグラフを選択する問題であるが、「事象の変化の概要をとらえる」ことへの理解が十分でないといえる。

誤答の中では、中1がア、中2、中3はウが多い。アは、水槽の形と混同したものと考えられる。ウは、学習済みの見慣れた比例のグラフを選択したものと考えられる。いずれにせよ、事象の変化を正しくとらえることができなかつたことによる。この種の問題に取り組む経験がないことも、通過率が低い要因の1つであろう。

② グラフの特徴をもとに、ある関数に近似して考えることに課題がある。

次は、全国学力学習状況調査（平成19年度）問題B[5]である。

- 5 理科の授業で、水を熱したときの水温の変化を調べる実験をしました。右下の図は、水を熱し始めてからの時間と水温の関係を、2分ごとに10分後までかき入れたものです。



- (2) 洋子さんは、このグラフを見て、「水を熱し始めてから x 分後の水温を $y^{\circ}\text{C}$ とすると、 y は x の 1 次関数であるとみることができる。」と考えました。「 y は x の 1 次関数であるとみることができる」のは、グラフのどのような特徴からですか。その特徴を説明しなさい。

これは、実験結果をグラフに表したものを観察し、これを 1 次関数のグラフとみなして、そのことをもとに 80°C になる時間を予測する、という関数を活用する典型的な問題である。しかし、(2)の正答率は 32.1%と低かった（国立教育政策研究所，2007）。このことから、1 次関数のグラフの特徴に対する理解が十分でないことがわかる。また、「1 次関数のグラフに近似する」ということの意味がわからない生徒もいたと考えられる。さらには、誤答の中に「比例」という用語を用いた解答も少なくなかった。1 次関数と比例の違いを理解していない生徒もいたと考えられる。

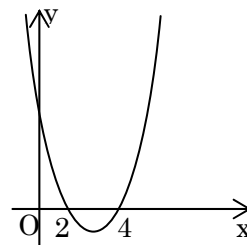
③ 関数と方程式・不等式との関係の理解が十分でない。

次は、高等学校教育課程実施状況調査（平成 17 年度）問題 B 5 である。

B 5 2 次関数 $y = x^2 - 6x + 8$ は、右辺を因数分解すると $y = (x - 2)(x - 4)$

となり、そのグラフは右の図のようになります。

このグラフを利用して、2 次不等式 $x^2 - 6x + 8 > 0$ の解を求め、答えを□の中に書きなさい。



この問題の通過率は、39.2%（無解答率 29.0%）であった国立教育政策研究所（2005）。このことから、2 次不等式の解の意味や 2 次不等式の解と、2 次関数のグラフとの関

係が十分に理解できていないことが読み取れる。

以上，生徒の関数に対するつまずきの視点から，関数の指導に際して次の点を指摘することができる。

- ア. 2つの数量の関係について，まず変化の概要をとらえて，グラフに表したり，ことばで説明したり等の活動を取り入れる（たとえば久保，2009）。このような活動を通して「変化のようすを読み取る方法がわかる」ことにつながるであろう。
- イ. 日常事象と関連づけて，2つの数量関係のある関数に近似して予測するなど，関数を活用する活動を取り入れる（たとえば清水，2007）。このような活動を通して「関数の意義がわかる」ことにつながるであろう。
- ウ. 関数と方程式・不等式・図形との関連をていねいに指導する。この指導を通して「関数と方程式等との関係がわかる」ことにつながるであろう。

(2) 小・中・高等学校の接続の視点から

学習指導要領をもとに，小学校，中学校，高等学校で学習する関数に関する内容をまとめると，表3の通りである。

表3 小学校・中学校・高等学校で学習する関数の内容

	対象とする関数	関数の変化の表現	変化の分析
小4		表，折れ線グラフ	
小5	簡単な比例	表	
小6	比例，反比例 (x の変域 >0)	表，式， グラフ（比例のみ）	
中1	比例，反比例	式，表，グラフ	
中2	1次関数	式，表，グラフ	変化の割合
中3	関数 $y = ax^2$	式，表，グラフ	変化の割合
数学Ⅰ	2次関数	式，表，グラフ	
数学Ⅱ	三角関数，指数関数，対数関数，3次関数	式，表，グラフ	平均変化率 微分（3次関数のみ）
数学Ⅲ	無理関数，分数関数	式，グラフ	微分

表3から，小4から高等学校（数学Ⅲ）まで，関数について多くの内容を学習していることがわかる。指導内容やそれらの扱い方について，小学校，中学校，

高等学校を比較して、次の点を指摘できる。

① 表の扱い方について、学校段階で違いがある。小学校では、表の扱いを重視しており、表から変化や対応を読み取る活動を多く行っている。一方、中学校では、グラフをかくための手段として表を扱うことが多く、表から変化や対応を読み取る活動は少ない。高等学校になると、さらに表の扱いは軽くなるといえる。たとえば、2次関数や分数関数は、平行移動の考えでグラフをかくことができ、このような場合は、表を扱わないことが多い。

② 中学校では「変化の割合」という用語を用いているが、高等学校では「平均変化率」という用語を用いている。しかし、高校の教科書には、変化の割合と平均変化率が同じ意味である旨の説明はほとんどなされていない。

③ 小学校、中学校では、現実事象から関数を導入し、また関数の利用の問題も多く扱っているが、高等学校では、式の形から関数を導入している教科書が多く、日常事象と関連づけた問題も少ない。

以上、小学校・中学校・高等学校の接続の視点から、関数の指導に際して次の点を指摘することができる。

- エ. 中学校、高等学校でも、小学校との接続を意識して、事象をもとに表を作り、表から変化や対応のようすを読み取る活動を多く取り入れる（たとえば國宗，2009）。このような活動を通して「表から変化や対応のようすを読み取る方法がわかる」ことにつながるであろう。
- オ. 変化の割合と平均変化率の用語について、中学校と高等学校との接続を意識して、どちらかに統一するか、少なくとも同じ意味であることを高等学校でていねいに指導する。この指導を通して「平均変化率（変化の割合）の意味がよくわかる」ことにつながるであろう。
- カ. 小学校・中学校との接続を意識して、高等学校でも、具体的な事象と関連づけて、関数を活用する問題を多く扱う（たとえば熊倉，2003）。このような活動を通して「関数の意義がわかる」ことにつながるであろう。

3 「関数がわかる」ことの評価

ここでは、「関数がわかる」ことの評価について考察する。

1で挙げた3つの「わかる」のうち、「方法」の評価は「できる」か「できない」かによって容易に行うことができ、実際に多く実施されている。一方で、「概念」や「意義」の評価はあまり実施されていないのが実情である。そこで、以下では「概念」や「意義」の評価について検討を加えることとする。

(1) 「関数の概念がわかる」ことの評価

たとえば、2(1)で挙げた全国学力学習状況調査（平成19年度）問題B⁵，あ

るいは高等学校教育課程実施状況調査（平成 17 年度）問題 B⁵のような問題を、評価問題として活用する方法が考えられる。

他には、授業時に、関数の概念がわかっているかどうかを問うような発問を、多く取り入れていくことが重要である。たとえば、次のような発問が考えられる。

- ・ 1 次関数の変化の特徴を挙げてみよう。
- ・ 2 次関数のグラフの特徴を挙げてみよう。
- ・ 比例と 1 次関数の共通点や相違点を挙げてみよう。 など

(2) 「関数の意義がわかる」ことの評価

たとえば、評価問題の中に、次のような設問を設けて、これを評価していくようにすることが考えられる。

- ・ 1 次関数を学習して、よかった点をあげなさい。
- ・ 関数が、日常の場面でどのように活用されているかを説明しなさい。
- ・ 微分を学習して、よかった点を挙げなさい。 など

このような設問に答えることができるようにするには、日頃から、授業のなかで同様な発問を行ったり、指導者が意義について説明をしたりすることが重要であろう。

4. 「関数がわかる」授業のあり方

以下では、「関数（解析）班」の研究の一環として実施された研究授業の特徴を整理しながら、関数（解析）の内容領域における「わかる」授業の在り方を考察してみたい。なお、本小節において考察の対象とする研究授業は、以下の 3 つの授業である。

- ア. 梅田英之先生「関数の最大・最小」（2007 年 11 月 15 日実施，数学Ⅱ，高校 3 年生対象）〔以下，梅田（2007）と略記〕
- イ. 逸見幸弘先生「箱の容積」（2008 年 2 月 15 日，中学 3 年生対象）〔以下，逸見（2008）と略記〕
- ウ. 八田弘恵先生「微分の導入」（2008 年 9 月 5 日実施，数学Ⅱ，高校 1 年生対象）〔以下，八田（2008）と略記〕

本小節において、上記の 3 つの授業を考察の対象とする理由は、これら 3 つの授業が次のような視座から企画された点にある。つまり、これら 3 つの授業は、「容積が最大になる箱」という同一の教材を扱った授業であるが、その題材の位置づけや取り扱いを工夫することによって、「わかる」授業の在り方について検討したものである。共通の教材である「容積が最大になる箱」は、正方形の用紙の四隅から合同な小さな正方形を切り取ることによってできる箱の容積について、箱の容積を最大にするような小さな正方形の一辺の長さを求めるものである。この教材は、一般には、「微分の利用」の教材として取り上げられることが多く、教科書にも掲載されている。

上記 3 つの授業における具体的な工夫の視点は次の 2 点である。第一は、中学校〔逸

見（2008）]と高等学校[梅田（2007），八田（2008）]で同一教材を取り上げ，「わかる」授業づくりに関する工夫の有効性を検証したことである。第二は，高等学校において，同一教材を「応用・活用」に位置づけた授業[梅田（2007）]と，単元の「導入」に位置づけた授業[八田（2008）]とを企画し，授業展開の相違が与える「わかる」ことへの影響を検討したことである。このような異校種間での縦断的な研究授業の試みは，「中学校と高等学校の接続」を研究の射程に置いた本科学研究の1つの特徴であると考えている。

3つの研究授業の記録とその詳細な考察は後章における各報告に譲るが，上記3つの研究授業から導出される「わかる授業」構築のための具体的方途を筆者なりの視点によってまとめるならば，次の4点に整理される。以下では，W1～W4を視点としながら，3つの授業の特徴を考察してみたい。

(W1) 「数学的活動」を重視すること（ICTの利用も含む）

(W2) 具体例との対応を図りながら，概念の意味理解を促すこと

(W3) 表，グラフ，式の相互関係の理解を重視すること

(W4) 授業におけるコミュニケーションを重視すること

(1) 「数学的活動」を重視すること（ICTの利用も含む）

電卓やパソコンを利用した「数学的活動」の充実は，3つの授業に共通する「わかる」授業のための工夫である。「容積が最大になるときの小さな正方形の一辺の長さ」（以下，「最大のときの長さ」と略記）を求めるために，どの授業においても，生徒たちは，電卓を利用しながら，試行錯誤によって「最大のときの長さ」を求める活動を行っている。

例えば，梅田（2007）では，もとの正方形の一辺の長さが20cmの場合について，生徒たちが電卓を利用しながら，「最大のときの長さ」を予想している。この場合，

「最大のときの長さ」は $\frac{10}{3}$ cmになるが，ある二人の生徒たちは，お互いに協力しな

がら，まず整数値の場合を考えることによって，「最大のときの長さ」が3cmと4cmの間の値であることを導いている。その後，小数第一位の値を検討しながら，3.3cmに徐々に絞りこんでいくことになる。さらに，小数第二位の値を同様に検討することによって，「最大のときの長さ」が約3.33cmであることを導いている。

このような「絞り込みの方法」によって，この二人の生徒は「最大のときの長さ」

をほぼ求めているが，既に述べたように，「最大のときの長さ」は $\frac{10}{3}$ cmであるため，

電卓を利用した「絞り込みの方法」の限界も同時に強く認識している。その結果，授業の後半で話題となる「微分を利用した解法」との対比の中で，微分の考えの有効性を強く感得することができている。その意味で，この教材を単なる微分の適用問題として取り扱うのではなく，電卓を利用した探求的な数学的活動と関連させながら取

り扱ったことは、「微分を利用した解法」の理解やその有用性の認識に大きく貢献したと考える。

こうした電卓を用いた探求的な数学的活動の有効性は、逸見（2008）においても示されている。逸見（2008）における対象生徒は中学3年生であり、当然ながら、対象生徒にとって「微分」や「3次関数」は未習内容である。しかし、梅田（2007）の場合と同様に、電卓の利用によって、「絞り込みの方法」を中心とする探求的な数学的活動に取り組むことは十分に可能であり、グラフの概形を描きながら、近似値ではあるものの、「最大のときの長さ」をほぼ同定することができている。

なお、逸見（2008）では、グラフィックソフトを利用しながら、3次関数の概形を示すことによって、生徒の理解を支援するという工夫もなされている。梅田（2007）と同様に、逸見（2008）でも、電卓を含めたICTの利用が数学的活動の促進や理解の深化にとって有効であったことも確認されている。

(2) 具体例との対応を図りながら、概念の意味理解を促すこと

八田（2008）は、微分を概念的に理解させることをねらいとして、「容積が最大になる箱」の教材を微分の導入に位置づけた実践である。本実践は2時間扱いの授業であり、第1時では、「容積が最大になる箱」の教材が提示され、梅田（2007）や逸見（2008）と同様に、電卓を利用しながら、「最大のときの長さ」を生徒に予想させている。第1時では、上述の「絞り込みの方法」によって、グラフの概形を描くにまで至っている。その後、グラフ上の最大値となっている点の図形的な意味を考えると生徒の関心が移行し、その点において、接線の傾きが0になっているという気づきを導くことに成功している。続く第2時では、その気づきをもとにしながら、微分係数の概念を導入するとともに、「容積が最大になる」ような x の値では、接線の傾きが0になっていることに加え、微分係数が0になっていることも概括的に導いている。

一般に、教科書では、微分係数の概念の導入は、やや抽象的かつ形式的な扱いになっているのが現状であろう。それに対し、八田（2008）では、「容積が最大になる箱」という具体例との対応を図りながら、微分係数の概念の意味を概括的に導入し、生徒の興味・関心を喚起しながら、理解を促そうとした点に特徴がある。特に、第1時では、グラフ上の最大値となっている点の図形的な意味を考える場面において、グラフィックソフト **Grapes** を利用しながら、「最大値の点の付近を顕微鏡で拡大する」という比喩を用いる工夫もなされており、生徒たちの理解の深化にとって効果的であった。

以上のように、八田（2008）では、抽象的かつ形式的な概念の導入にとどまるのではなく、ICTを利用した数学的活動を促しつつ、具体的な事例との対応を図ることによって概念の導入を図ることの有効性が示唆されているといえる。

(3) 表, グラフ, 式の相互関係の理解を重視すること

表, グラフ, 式は, 様々な関数関係を探究するための「思考の道具」といってよく, これら3つの相互の関係を図ることは, 関数の理解にとって重要であるとともに, 関数学習に固有の特徴といえてよい。実際, 比例や反比例にはじまって, 1次関数や2次関数, 三角関数など, 学習の対象となる関数は変わっても, 表, グラフ, 式を利用しながら, 各々の関数の特徴を探究するという学習の方法は変わらない。そのため, 学習の対象となっている個々の関数を理解させるだけではなく, 表やグラフや式を用いながら事象に含まれる関数関係を探究するという「探求の方法」を理解させることは, 関数学習の要であり, 関数学習における数学的活動の重要な側面であると考えられる。

こうした視座から3つの授業を検討したとき, 3つの授業では, 表, グラフ, 式の3つの相互関係について十分な配慮が施されているとともに, 生徒の探求的な「数学的活動」にとっても「思考の道具」として十分に機能していたと考えられる。

(4) 授業におけるコミュニケーションを重視すること

例えば, 八田(2008)では, 「わかる授業の工夫」の1つとして, 「課題追求の際, 生徒の予想や誤答を活かし, 生徒同士のコミュニケーションの場面を設定する」ことがあげられており, 生徒同士のコミュニケーションを重視することの重要性が指摘されている。八田(2008)に限らず, 上記3つの授業では, 授業の冒頭で生徒の様々な予想を取り上げる場を設け, 問題意識や興味・関心を高める工夫を行っている。また, 既に述べたように, 「最大のときの長さ」を考察するにあたり, 「絞り込みの方法」というアイデアがコミュニケーションを通じて創発し, 生徒間で共有されている。

今日, 構成主義的認識論の台頭とともに, コミュニケーションが数学的意味の構成にとって必要不可欠であることが理論的にも指摘されている。上記3つの研究授業を通じて, 数学的意味の構成や理解に果たすコミュニケーションの重要性が実証的にも示されている。コミュニケーションを重視した授業づくりは, 決して関数領域に固有のものではなく, 各領域における「わかる」授業づくりに共通する視点になると考える。

(文責 1～3: 熊倉啓之, 4: 山口武志)

引用・参考文献

- ・ 国立教育政策研究所 (2005) 「平成 17 年度教育課程実施状況調査 (高等学校) 結果概要・集計表 数学 (数学 I)」
- ・ 国立教育政策研究所 (2006) 「特定の課題に関する調査 (算数・数学) 調査結果」
- ・ 国立教育政策研究所 (2007) 「平成 19 年度全国学力・学習状況調査 (中学校数学) 調査結果」
- ・ 久保良宏 (2009) 「関数 $y=ax^2$ の特徴を理解し関数を活用する授業」長崎栄三他編著『豊かな数学の授業を創る』明治図書, pp144-153

- ・熊倉啓之（2003）「学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究」日本数学教育学会誌,第 85 巻第 11 号,pp.40-49
- ・國宗進（2009）「一次関数の特徴を理解し関数を表現する能力を伸ばす授業」長崎栄三他編著『豊かな数学の授業を創る』明治図書,pp134-143
- ・清水宏幸（2007）「日常の場面で関数を活用させる指導」日本数学教育学会誌,第 89 巻第 11 号,pp.10-18

3-4 確率・統計分野

確率・統計分野における「わかる」

西村圭一 ・ 長尾篤志

国立教育政策研究所教育課程研究センター

目次

1. 確率・統計分野における「わかる」対象
2. 中学生・高校生の「わかる」の状況
 - (1) 確率
 - (2) 統計
3. 小・中・高等学校の接続の視点から
4. 確率・統計分野における「わかる」授業と評価のあり方

要約

本稿では、第一に確率・統計分野における「わかる」対象を、「確率・統計の概念」と「不確実な事象に対する問題解決の方法」として明確化した。第二に、中学生、高校生の「わかる」の状況について、大規模調査の結果をもとに検討した。第三に、小・中・高等学校の接続を視点に、特に中・高において一貫してわからせるべきことを具体的に示した。第四に、本研究における確率・統計分野の研究授業を概観し、授業の工夫と評価の方法について考察した。

キーワード 確率の概念，統計の概念，統計的な問題解決

1 確率・統計分野における「わかる」対象

確率・統計分野における「わかる対象」を、本研究における「わかる対象」の枠組みを踏まえて、次の2つでとらえる。

A 確率・統計の概念

B 不確実な事象に対する問題解決の方法

Aの確率・統計の概念がわかることとは、確率・統計の諸概念の意味理解、その概念の意義や必要性、確率や統計に関わる技能—例えば、場合の数の求め方やヒストグラムの表し方など—の三者がわかることと捉える。学校数学で学習する確率・統計の諸概念については、この三者を一体化してわかることが大切だからである。例えば、最頻値が「もっとも多く出てくる値」とわかるだけでは、データの傾向を捉える際に用いることはできない。なぜ最頻値を考えるのかや度数分布表での最頻値の求め方等もわかって、はじめて「最頻値がわかった」と言えるのである。

Bの不確定な事象に対する問題解決の方法は、例えば、次のような統計的な問題解決のサイクルがある¹⁾。

問題を解決するために、次の4つのデータの処理過程のそれぞれを実行する。

- i 問題を明確にし、計画を立てる、すなわち、必要とされるデータに関する問いを定式化し、データからどのような推測ができるかを考え、どのようなデータを収集し(サンプルの大きさとデータの形式を含む)、どのような統計的分析が必要かを決定する。
- ii 実験や調査、1次資料や2次資料を含む、さまざまな適切な情報源から、データを収集する。
- iii データを処理し、表現する、すなわち、生のデータを、問題に対して洞察を与えるような役立つ情報に変換する。
- iv データを解釈し議論する、すなわち、データから結論を導くことによって最初の問いに答える。
(イギリス(イングランド)の国家カリキュラム、1999年版)

現実の問題場面で確率を用いて判断をする際にも、ほぼ同様のサイクルが必要となる。そして、Bの不確定な事象に対する問題解決の方法がわかることとは、このようなサイクルを通じた問題解決ができることと捉える。

このような問題解決は、確率や統計の概念がわかってさえいればできるわけではない。しかし、確率や統計の概念がわかっていなければ、文脈に応じて解釈することはできない。すなわち、AとBは相互に関連しており、AとBを一体化してわかることが大切である。そして、言うまでもなく、一方がわかることで、他方のわかることが深まっていくと考えられる。

2 中学生・高校生の「わかる」の状況

次に、中学生、高校生の、確率・統計に関する理解の状況を、大規模調査の結果から見てみることにする。

(1) 確率

<平成13年度小中学校教育課程実施状況調査> (中学校3年生対象)

番号	問題の概要	通過率
B 10	2枚の硬貨を同時に投げたとき、2枚とも表のでのる確率は $\frac{1}{3}$ と考えたことに対して、考え方の誤りを訂正する。	75.0%
C 11	赤玉4個と白玉2個が入った袋の中から玉を1個取り出すとき、それが赤玉である確率を求める。	69.5%

<平成14年高等学校教育課程実施状況調査 数学I>

番号	問題の概要	通過率
A 5	2枚の硬貨を投げて、1枚だけ表がでる確率が $\frac{1}{2}$ である理由を述べる。	50.8%
A 6 (1)	6個の赤玉と3個の白玉が入っている袋の中から1個の玉を取り出す場合に、それが赤玉である確率を求める。	69.9%

<OECD/PISA2003年 予備調査> (高等学校1年生対象)

地震

地震と地震の頻度についてのドキュメンタリー番組が放送されました。番組では地震を予知できるかどうかについても議論が交わされました。

ある地震学者は次のように言いました。「今後20年以内にゼットランド市で地震が起きる確率は3分の2だ」

この地震学者の言葉の意味を一番よく反映しているのは次のどれですか。

- A $\frac{2}{3} \times 20 = 13.3$ 。だから、いまから13年から14年の間にゼットランド市では地震が起きる。
- B $\frac{2}{3}$ は $\frac{1}{2}$ より大きい。だから、今後20年の間にゼットランド市ではいつか必ず地震が起きる。
- C 今後20年の間にゼットランド市で地震が起きる確率は、地震が起きない確率より大きい。
- D 地震がいつ起きるかはだれも確信できないので、何が起きるかを予言することはできない。

(正答率 46.8%)

確率を求める問題の通過率はおおむね良好だが、確率の意味理解に課題があると考えられる。つまり、確率は、ある事象の場合の数を、起こり得るすべての場合の数で割って求められることは理解されているものの、その値がどのようなことを表しているかの理解が不十分である。したがって、PISA2003 予備調査のように、数字を挙げ具体的に表現された場合、経験的には疑問を感じながらも A または B が選ばれやすいと考えられる。なお、高等学校実施状況調査の問題のように、確率を与え、確率がそのようになることを説明させる場合には、単に確率を求めさせる場合より正答率は下がるようである。

(2) 統計

<特定の課題に関する調査> (中学校1年生, 3年生対象)

3 ある学校のコンピュータクラブで、「どれくらい本を読んでいるか?」が話題になり、先月1か月間に何冊の本を読んだかを学年ごとに調べてみるようになりました。

下の表は調べた結果を学年ごとにまとめたものです。この学校のコンピュータクラブの人数は、1年生が10人、2年生は15人です。

<1年生>

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計	平均
読んだ本(冊)	7	1	7	0	3	1	0	6	8	2	36	3.6

<2年生>

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	合計	平均
読んだ本(冊)	1	2	1	1	1	2	4	3	4	5	3	4	3	1	4	45	3.0

次の各問に答えなさい。

(1) 山本さんは、1年生の平均が3.5冊であることから次のように判断しました。

1年生の読んだ本の冊数の平均が3.5冊だから、読んだ冊数が3冊以下の生徒の人数と4冊以上の生徒の人数は同じです。

山本さんの判断は正しいですか。下のア、イの中から1つ選び、 の中のその記号を○で囲みなさい。

ア 正しい
イ 正しくない (1つを○で囲む) (5)

(2) 林さんは、2年生の平均が3.0冊であることから次のように判断しました。

2年生の読んだ本の冊数の平均が3.0冊だから、3冊読んだ生徒の人数が一番多い。

林さんの判断は正しいですか。下のア、イの中から1つ選び、 の中のその記号を○で囲みなさい。

ア 正しい
イ 正しくない (1つを○で囲む) (6)

(3) 斉藤さんは1年生と2年生をまとめた全体の平均を、次のようにして求めました。

$(3.5 + 3.0) \div 2 = 3.25$ だから、1年生と2年生をまとめた全体の平均は3.25冊です。

斉藤さんの考えは正しいですか。下のア、イの中から1つ選び、 の中のその記号を○で囲みなさい。また、その理由を の中に書きなさい。

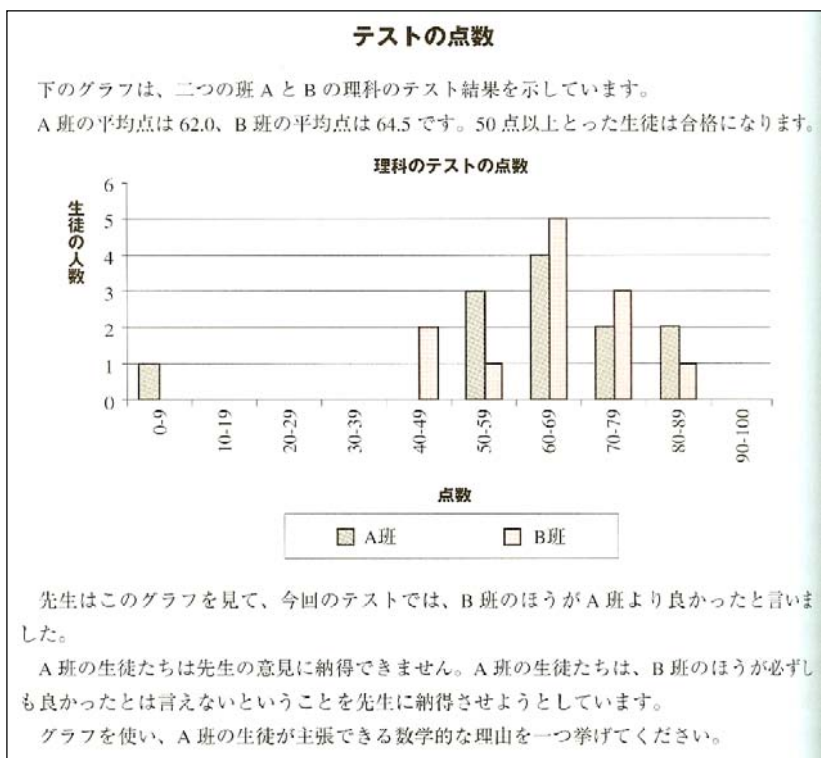
ア 正しい
イ 正しくない

ア イ (1つを○で囲む)
理由 (7)

1数II-4 OMI1740-210

(1)1年 64.1% 3年 75.7%, (2)1年 76.5% 3年 81.8%, (3)1年 33.1% 3年 45.0%

<OECD/PISA2003 年調査> (高等学校 1 年生対象)



実データがグラフや表で示されていない場合、通過率・正答率はさらに低くなることが予想される。データの分布を意識し平均値を解釈することに課題があると考えられる。

(1)(2)からは、1 に挙げた A と B の双方がわかっている生徒は多くないことが推測される。

3 小・中・高等学校の接続の視点から

新学習指導要領の小・中・高校の確率・統計に関わる学習内容を整理すると、表 1 の通りである。

小学校算数科では、棒グラフ、折れ線グラフ、円グラフ、帯グラフを学習し、度数分布を表やグラフに表したり、資料の平均や散らばりを調べるなどの活動を通して、統計的に考察したり表現したりすることを学習する。また、第 6 学年では、具体的な事柄について起こり得る場合を順序よく整理して調べることを学習する。

中学校第 1 学年では、これらの学習の上に立って、資料を収集、整理する場合には、目的に応じた適切で能率的な資料の集め方や、合理的な処理の仕方が重要であることを理解できるようにする。さらに、ヒストグラムや代表値などについて理解し、それらを用いて資料の傾向をとらえ説明することを通して、資料の傾向を読み取ることができるようにする。第 2 学年では、第 1 学年における相対度数の学習の上に立って、確率を用いて不確定な事象をとらえ説明できるようにする。第 3 学年では、第 1 学年、第 2 学年の学習の上に立って、母集団の一部を標本として抽出する方法や、標本の傾向を調べることで、母集団の傾向が読み取れることを理解できるようにする。

高等学校数学 I では、中学校での学習をさらに発展させて、四分位数、四分位範囲、

四分位偏差，分散及び標準偏差などの意味を理解させるとともに，それらを利用して

表 1 小・中・高での確率・統計に関わる学習内容

小学校「数量関係」		中学校「資料の活用」	
学年	内容	学年	内容
1	個数の数え上げ 絵や図での表現 絵や図の読み取り	1	ヒストグラムや代表値の必要性と意味 資料の傾向をとらえ説明する 平均値，中央値，最頻値，相対度数，範囲，階級 【量的データの分布の比較】
2	身の回りにある数量の分類整理 簡単な表やグラフの作成と読み取り	2	確率の必要性と意味への理解 簡単な確率の計算
3	資料の分類と整理 表やグラフでの表現と読み取り 棒グラフの読み方やかき方	3	標本調査の必要性と意味を理解する 簡単な場合について標本調査を行い， 母集団の傾向をとらえ説明する
4	二つの観点からのデータの分類整理 【二元クロス表】 折れ線グラフのかき方と読み方		
5	百分率 データの分類整理【質的データの分布】 円グラフや帯グラフ	高等学校	
6	資料の平均 度数分布表 柱状グラフ(ヒストグラム) 起こりうる場合の数	数学 I	データの散らばり： 四分位範囲(偏差)，分散・標準偏差 データの相関：散布図や相関係数
		数学 A	場合の数と確率：確率とその基本的な法則， 独立な試行と確率，条件付き確率
		数学 B	確率変数と確率分布：確率変数の平均， 分散・標準偏差で確率分布の傾向を捉える 二項分布，正規分布：二項分布の正規近似 統計的な推測： 母集団と標本，母平均の統計的な推測
		数学活用	関数とみなす【回帰】 移動平均

データの傾向を的確にとらえ説明できるようにする。また，散布図及び相関係数の意味を理解させるとともに，それらを利用してデータの相関を的確にとらえ説明できるようにする。数学 A では，中学校第 2 学年で学習した，起こり得る場合を順序よく整理し数え上げることによって確率を求めることを発展させ，数え上げの原則や，順列・組合せ及びそれらの総数の求め方について理解させるとともに，それらを具体的な場面に活用できるようにする。

数学 B では，確率変数や確率分布（二項分布と正規分布）について理解させる。また，標本調査の考え方及びそれを用いて母集団のもつ傾向を推測する方法について，具体的な例や作業を通して理解させる。

数学活用では，二つのデータ間の関係を散布図や相関係数を用いて調べたり，散布図に表わしたデータを関数とみなして処理したりすることや，時系列データを移動平均を用いて調べることなどを学習する。

ところで，中学校と高等学校において，確率・統計分野の学習に当てられる総授業時間数は，他の数学の分野に比べて少ない実態がある。したがって，確率・統計分野における「接続」に関わる諸問題は，中・高で一貫してわからせるべきであると読み替えられると考える。これに関して，特に，次の 3 点が重要だと考える。

第一に，確率や統計量が不確定な事象を捉えるための 1 つの「数値」であることである。2(1) で見たような確率の意味の理解や 2(2) で見たようなデータの分布をふまえ

て平均値を解釈することの基盤となる。

第二に、統計的確率と数学的確率の関連である。同様に確からしい事象以外の、起こりやすさや公平性の判断に統計を用いることを重視する。

第三に、データの分布やばらつき（変動）を表現したり、それをふまえて解釈したりすることである。これには、次のような、データのばらつき（変動）の違いの理解も含まれる。それは、「自然変動」「外的要因によって説明のつく変動」「標本変動」である（渡辺美智子，2007a）。「自然変動」とは、同じ条件にあると考えられる集団について計測を繰り返したときの観察値の変動のような、説明のつかない同質集団のデータのばらつきのことである。これに対して、自然変動以外の要因によって生じるデータの値のばらつきが「外的要因によって説明のつく変動」である。あるデータの変動が、このいずれにあたるのかを考えることが大切である。また、「標本変動」とは、標本抽出を繰り返したときに得られる統計量のばらつきのことであり、この理解のためには、「自然変動」「外的要因によって説明のつく変動」の理解が前提となると考えられる。

4 確率・統計分野における「わかる」授業と評価のあり方

では、確率・統計分野における「わかる」授業は、どのような授業になるのだろうか。著名な統計学者である Andrew Gelman (2002) は、高校や大学初年次の統計学コースを担当する教師向けのテキスト *Teaching Statistics, a bag of tricks* において、統計学は問題解決を前提とした手段であり、教師が実際のデータ分析のプロセスを見せたとしても、そこから得られる生徒の理解は不十分であり、最も効果的なのは問題解決の活動に生徒を巻き込むことであると述べている。

このことをふまえ、確率・統計分野では、次の3つの研究授業を実施した。これらの授業の詳細は別章で述べるので、ここでは、その概要を示す。

ア 西村圭一「資料の散らばりと代表値」（中等教育学校1年対象）

「東京の夏は暑くなったか？」という問題を開発し、統計的な概念と統計的な問題解決の方法の双方を一体化し、わからせることを目指した。その際の指導過程での工夫として、意図的に不十分な状況を作り、それを振り返らせたり、話し合わせたりして、問題点に気づかせ、修正させるようにすることを提案している。

イ 西仲則博「資料の活用」（中学校2年生対象）

中学校1年次の「資料の活用」の学習だけで、統計的な問題解決の方法が「わかる」ことは困難であるという問題意識に基づき、中学校2年生に対して、環境問題に関する資料を生徒自らが探し出し、それを整理し、統計のグラフにまとめ、そこからの知見をまとめ、発表するという一連のプロジェクト型の学習を行った。指導上の工夫として、統計的な問題解決の方法（「課題解決プロセス」）を生徒に示すこと、グループでの活動を重視することを提案している。

ウ 横澤克彦「期待値」（高等学校3年生対象）

期待値を、確率を用いて判断する際の1つの方法と捉え、宝くじの期待値を題材とした授業を行った。指導上の工夫として、実際に宝くじをつくらせること、個々

の宝くじの期待値がすべて揃う課題をすること、実生活で活用できる式をつくることを提案している。

これらの研究授業で共通する点は、1に述べた「A 確率・統計の概念」と「B 不確実な事象に対する問題解決の方法」をわからせることの双方を目指していることである。その実現のための工夫は、次のように整理することができる。

○生徒が解決の必要性を感じる問題の設定

実データの利用や、具体的な活動を通じた問題の把握など

○重視する活動

話し合い、発表・プレゼンテーション、振り返り、グループ活動など

次に、評価について検討する。上述のような、「A 確率・統計の概念」と「B 不確実な事象に対する問題解決の方法」をわからせることの双方を目指すとき、その評価はどのようにすればよいのだろうか。同様に、ア～ウの授業における評価の方法を整理すると、次の3点になる。

○レポートや探究結果を用いたポスター等を評価規準に基づいて評価する方法

○アンケートを用いて自己評価する方法

○工夫した問題を用いたテスト

また、今後の課題として、授業の工夫としては、コンピュータを、問題提示やデータ収集といった、データの処理や発表場面以外で活用すること、評価の方法についてはルーブリック（評価基準）を用いた自己評価や、評価課題の開発が挙げられる。

注

1) 諸外国のカリキュラムでは明示的に扱われている（深澤，2007）。また、日本の中学校、高等学校の学習指導要領の解説でも重視することが述べられている。例えば、次のように示されている。

「指導に当たっては、日常生活を題材とした問題などを取り上げ、それを解決するため必要な資料を収集し、コンピュータなどを利用してヒストグラムを作成したり代表値を求めたりしてや資料の傾向をとらえ、その結果を基に説明するという一連の活動を経験できるようにすることが重要である。」（中学校第1学年，p.80）

「統計の用語の意味やその扱いについて理解させるとともに、例えば表計算用のソフトウェアや電卓も適宜用いるなどして、目的に応じデータを収集・整理し、四分位数、四分位範囲、四分位偏差、分散、標準偏差、散布図及び相関係数などに着目させ、データの傾向を的確に把握することができるようにする。」（数学Ⅰ，p.25）

「目的に応じて必要なデータを収集し、コンピュータなどを積極的に活用して、二つのデータ間の関係を散布図や相関係数を用いて調べたり、散布図に表わしたデータを関数とみなして処理したりすることや、時系列データを移動平均を用いて調べることなどを取り上げる。」（数学活用，p.64）

引用・参考文献

- Andrew Gelman & Deborah Nolan (2002) “Teaching Statistics: A Bag of Tricks”, Oxford Univ Press, pp.1-5
- 国立教育政策研究所教育課程センター (2004) 「平成 14 年高等学校教育課程実施状況調査報告書－高等学校数学 数学 I－」, 実教出版, pp.88-99
- 国立教育政策研究所教育課程センター (2006) 「特定の課題に関する調査 (算数・数学) 調査結果 (小学校・中学校)」, pp.15-17, pp.69-70
- 国立教育政策研究所編 (2004) 『生きるための知識と技能 2 OECD 生徒の学習到達度調査 (PISA)』, ぎょうせい
- 深澤弘美(2007) 「初等・中等統計教育カリキュラムの国際比較研究－ニュージーランドにおける統計教育カリキュラム」, 日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻第 7 号, pp.39-48
- 文部科学省 (2008) 「中学校学習指導要領解説 数学編」, 教育出版
- Qualifications and Curriculum Authority (1999), “National Curriculum Mathematics”
- 渡辺美智子 (2007a) 「統計教育の新しい枠組み」, 数学教育学会『数学教育学会誌』48, pp.39-51
- 渡辺美智子 (2007b) 「知識創造社会を支える統計的思考力の育成－アクションに繋がる統計教育への転換－」 日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻第 7 号, pp.29-38

第4節 数学者から見た「わかる」

4-1 数学者による高校の授業

お笑いの心で数学を

愛知教育大学附属刈谷高校での実践報告書

飯高 茂

学習院大学理学部

2008年9月17日に愛知教育大学附属刈谷高校で「お笑いの心で数学を」という題で2年生のあるクラスに50分の授業を行った。授業の録音テープをもとに授業展開を整理して読みやすくまとめた。

2009年8月

はじめに

最近、お笑い芸人「大輪教授」と一緒にお台場にある理数教育施設「リスピーア」で、「お笑い」をやりました。2008年の3月15日と16日の2日間、15分のお笑いを5回ずつした結果、1回4,000円の出演料ということで合計4万円ものギャラをもらったのです。数学の教授が「お笑い」をやって、ギャラをもらおうというとても面白い話でした。もう2度とないでしょうね。その影響もあって今回は「お笑い」のように笑える数学をしたいと考えました。お台場では円周率を話題にしたのですが、ここでは平方根の覚え方をテーマにしましょう。

1. ルートと円周率を覚える

飯高「前に座っている君はM君だね。ルート2を言えるかい。」

M君「覚えています。ひとよひとよにひとみごろ(141421356)」。

飯高「たいしたものですね。それから先も言える？知らないでしょう。では教えましょう。

2です。ひとよひとよにひとみごろに(1414213562)と覚えておくといい。

次に、N君。ルート3を言ってごらん？」

N君「ひとなみにおごれや(17320508)です。」

飯高「その次はいえる？実はその次の数を3つ覚えてないと損するんだよ。

ひとなみにおごれやおなご(17320508075)でいいんだ。「おなご」がつくんです。

だからこれを覚えておいてね。彼女とデートしたら、最後にルート3、と言ってみよう。

すると、「おなご」が払ってくれるかもね。でも、実際こんなことを言ったら怒られるだけでしょう(笑い)。

次、ルート6。これは知らないだろう。」

みんな「知りません。」

飯高「ルート2とルート3は知ってるね。だからこれらを掛ければ良いわけです。しかし掛け算をしても間違えるかもしれないから、直接覚えておく方がいい。覚え方を教えてあげるからね。

でも、これから教えることは家に帰って言うてはいけません。秘密です。君達と私の間の秘密です。覚え方は簡単ですよ。さあいくぞ！妊娠。まず「妊娠」覚えてね。妊娠,それから「至急予約なし」。これを家でお母さんに言っちゃだめよ,お母さんは怒るからね。この学校は何を教えてるんだって言って,校長先生に抗議するかもしれない。

ルート6は,妊娠,至急。予約なし(244948974)と覚えるといい。妊娠があまりにも至急だったので病院に予約してなかった,困ったことだというわけですね。はい,覚えてね。これは,大輪教授が考えた覚え方です。私は傑作だと思います。

その次は円周率を覚えよう。円周率を英語ではパイといいます。円周率のように意味のよくわかる固有の言い方は英語にはないそうです。円周率は日本語なんです,そのモトは中国で古くからあります。三国志時代の終わりの頃,いわゆる魏晋南北朝の頃,円周率という言葉が中国で出来て,それが日本に伝わり,円周率と言えば日本人なら誰でも知っている有名な数となりました。円周率は「3.1415 なんとか」知ってますね。どのくらい言える？」

生徒「92まで言えます,3.141592です。」

飯高「今日は大輪教授による円周率の覚え方を教えるから,これも覚えておくと良いですね。

さあ,行きましょう！ キーワードは八百屋さんです。八百屋さんのおやじになった気持ちで円周率をいうのです。

八百屋さんがありました。さあいいよ(314)イチゴ(15)965235パック(89)。

えっ,わからなかったって?もう一度やってみるよ。

さあいいよ(3.14)。イチゴ965235パック。難しいのは965235。これは根性で覚えるしかありません(笑い)。

2. 2項係数

さて11の2乗を計算しよう。M君。11の2乗は?

M君「121」

飯高「次は,N君だね。N君。11の3乗は?」

N君「1331」

飯高「つぎは,Hさん。11の4乗を言ってみて。」

Hさん「14641」

飯高「素晴らしいね。2項係数が次々と出てきました。しかし11の5乗からは,同じ計算をするはずれてきます。しかし4乗まで知っておけば大学入試は大丈夫だ。心配はないね。黒板に書いてみると

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

この作り方は簡単です。とりあえず,両側に1をならべて書きます。そして1の段の数1, 1を足して,1+1=2。これで下の段の121ができます。

次の段で,隣の数を足して 1+2=3, 2+1=3。これで,次の段1331ができますね。

同様にして 4,6,4ができます,4の段が完成。ついで,5の段

1 5 10 10 5 1

ができる。こうしてできた三角形がパスカルの三角形です。これは知っている人も多いでしょう。じゃあ、R君ね。6の段もやってみて。

R君「1 6 15 20 15 6 1」

これで、OK。ついでに7の段もやってください。

R君「1 7 21 35 35 21 7 1」

ここまででは、高校生はやらないことが多いけれど、ここまですると面白い。両側の1以外は7の倍数です。ちょっとすごいでしょ。

5の段も、1 5 10 10 5 1 だから

両側の1以外は5の倍数です。3の段も同じです。しかし、6の段は

1 6 15 20 15 6 1

なので、15、20は6では割れないからだめ、4の段もだめなことがわかります。

じつは9の段もだめです。さてどんな種類の数ならいいでしょうか。

生徒「素数ですか」

そうです。pが素数の時、pの段は両側の1以外はpの倍数です。実際に、8の段、9の段、10の段まで求めてみましょう。11の段まですると、11の倍数が出てくることがわかります。

これを覚えておくと2項係数の計算を間違えなくなります。だから得をします。

今までの話はパスカルの三角形についての話だから、知っている人はよく知っている話です。今日は、今日のテーマは「お笑いの数学」です。だからみんなから笑われてもかまわない。面白いかと思った事はみんなやってみようという精神でいきます。

先ほどは11の2乗、11の3乗、11の4乗を計算しました。これをみて、「これで出てくる数は二項係数じゃないか」と言った高校生がいるんだね。その先生が偉かったのは「あっ！それは面白い！もっと研究してみよう」と言ったことなのです。11の5乗をやると駄目になるんですけども、だめなんて言わずに興味を持ったところを励ましたのです。11ではなく、さらに111の2乗、111の3乗とかやって、それがもとになってすごい数学の理論をその高校生たちが作ったんです。その高校生は、年末にお台場で開かれたコンテストに出て賞金50万円をもらったそうです。ちょっと発想を変えて考えて、さらに考えたら、50万円もらえてアメリカにも招待された。これはすごいですよね。

3. 逆に考える

今度は、パスカルの三角形を逆に考えてみます。7の段まで書いたところで、ミスしてその上の段を全部消してしまったとしましょう。残った7の段をモトに6の段を復元することを試みます。両側の1はわかるからそれは残しておきます。

1 7 21 35 35 21 7 1

6の段をこれから復元するために、とりあえず、6の段を未知数を用いて左から

1 X Y Z とおくと、さっきの規則から

$$1+X=7, X+Y=21, Y+Z=35$$

がわかります。これから、 $X=6$ 、 $Y=21-X=15$ などがわかります。こうして6の段が復

元できます。同様に 5, 4, 3, 2, 1の段まで復元できます。

4. 大飛躍

ここで大飛躍です。1の段のさらに上は何でしょうか。それは0の段。それは1だけからなります。その上は何でしょうか。1しかない0の段をモトにその上の段を作るのです。これは難しい！

最初が1なのはいいのですが、次がわからないので、未知数 A B C B D E を用いて

1 A B C B D E

とします。そこで、足し算のルールを用いて

$0 + 1 = 1, 1 + A = 0, A + B = 0, B + C = 0, C + D = 0, D + E = 0,$

ができ

$A = -1, B = 1, C = -1, D = 1, E = -1$

となりました。Eで終わるわけではありません。

1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, …

と無限に続きます。さらにこの上の段を作りましょう。

分からないところは未知数A B C B D E として

1 A B C B D E

とおけば、

$0 + 1 = 1, 1 + A = -1, A + B = 1, B + C = -1, C + D = 1, D + E = -1,$

になり

$A = -2, B = 3, C = -4, D = 5, E = -6,$

このようにして、上の段に

1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, …

ができます。そこで君達にあげたプリントを見てみよう。いっぱい字が書いてありますけれども、これはイギリスのニュートン (Newton, 万有引力の発見者) が自分で書いたノートです。これすごいでしょ。英語ですよ。ニュートンは英語が出来るんですよ。君たちが中学や高校で習った英語がここで使われています。彼は 1642 年生まれだから 400 年近く昔の人だけど、そんな昔の人も英語が出来たんですね。それをじーっと見ていると、分かるかな？図が書いてありますね。それで左端の上の所を見てみると、分かる？

1, 0, 0, 0, 0, … があり、次に

1, 1, 0, 0, 0, 0, … があり、さらに

1, 2, 1, 0, 0, 0, … があり、そして

1, 3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, … があります。

縦横は逆になってるけれど、二項係数が書いてありますね。

5. エクセル

ニュートンさんは非常に熱心に計算をしたんだけど、君達はパソコンでエクセルが使えるわけだからそれを使うとすごく簡単に出来ます。エクセルの本当に簡単な機能を使うだけでできま

す。私は今回、皆さんの前で話そうと思って準備を始めたのですが、最初は恥ずかしながら全部手でやったんですよ。次にそれをエクセルでしたんだけど、最初はコピーして足して、コピーして足して繰り返してやったのです。けれども繰り返してするのは大変だなと思って、うまくコピーと貼り付けをするように工夫したらすぐできることが分かったのです。

次にパソコンでちょっとやってみよう。エクセルをまず立ち上げよう。そして、このエクセルで2項係数を書き出してみよう。エクセルは使ったことあるよね。

2列目の一番前の君は、名前は何だっけ？ I君だね。ではI君エクセルを操作してください。左の上の1番上に1を入れてください。セルA1に1を書く。できたね。それをコピーして1をA1下に19個作ってください。簡単にできたね。1行目はこれでできた。2行目は、B1に1があるのでそのままです。B2はA1の1とA2の0を加えて作ります。やり方はわかるね。B2のセルに=をまず書いてさらにA1+B1と書く。できたね。B2のセルをコピーしてそれをB3からB20までコピーします。すると、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...という数列がBの列にできます。ついで、B2からB20までをコピーしてそれをC2からQ20にコピーしてください。見事に、2項係数が並びました。すごいです。こんなに簡単なコピーだけで、2項係数の表ができてしまいます。

1														
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0	0
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0	0
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0	0

これはすごいですね。まるで、事前にだれかがあらかじめ仕込んでおいたとしか思えません。今度は、逆行の方をしましょう。エクセルのSheet2を開くと、何も書いていないエクセルの表ができます。そこでセルA20に1と書いてそれをコピーしてから、セルA19からA1にコピーします。

さてA20の右となりであるB20は実は0です。何も書いてありませんが、0です。A19の右隣であるB19には=B20-A19と書きます。すると、-1が出ました。

B19をコピーして、B18からB1までに貼り付けます。結果として-19, -18, -17, ...ができます。

B19からB1をコピーして、C18からQまでに貼り付けます。結果として次の表ができました。

1	-11	66	-286	1001	-3003	8008	-19448
1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440
1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435
1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432
1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716
1	-6	21	-56	126	-252	462	-792
1	-5	15	-35	70	-126	210	-330
1	-4	10	-20	35	-56	84	-120
1	-3	6	-10	15	-21	28	-36
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1							

6. ニュートンの2項展開

$1 + X$ の2乗は $1 + 2X + X^2$ というのは良いですね。それから先ほど出てきた数を思い出すと $1, -2, 3, -4, 5$ となったのがありましたね。

この下に数式を書くんです。 $1, -2X$, それから $3X$ の2乗。 $-4X$ の3乗, さらに $5X$ の4乗。それでこれと前の2次式を掛けよう。

$$1 + 2X + X^2$$

$$1 - 2X + 3X^2 + 4X^3 - 5X^4 + 6X^5 - 7X^6 + \dots$$

やってみよう。最初, X の係数は0, 次の X^2 の係数も0, 次の X^3 の係数も0, 次の X^4 の係数も0, こうしてどんどん消えてしまいます。

最終的には1だけ残る。すごいです。奇跡が起きたとしか言えませんね。

$(1 + X)^2$ にこの複雑な式をかけると, 1になってしまいました。

これは何を意味するか? この複雑な式は $(1 + X)^2$ にかけたら1になったのだから,

$$1 - 2X + 3X^2 + 4X^3 - 5X^4 + 6X^5 - 7X^6 + \dots$$

は $(1 + X)^{-2}$ と書けることを意味します。 -2 の段の2項係数が,

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \dots \quad (\text{無限に続く})$$

となったのです。このようにして, ニュートンは負の整数を指数とする展開を考えたのです。

さらに, $1/2$ 乗の展開すなわち $(\sqrt{1 + X})$ の展開も作ったのです。これらをニュートンの2項展開といいます。

3乗の場合の展開にも使えます。

$$1 + 3X + 3X^2 + X^3$$

$$1 - 3X + 6X^2 + 10X^3 - 15X^4 + 21X^5 - 28X^6 + \dots$$

これらを掛けてみてください。

今日はこれで終わりにします。では, 皆さん, 私は学習院で教えていますから最後の挨拶ぐらいは学習院らしく「ごきげんよう」と言って決めよう。それでは終わりにします。号令かける人います? じゃあ1番最後に君, 「ごきげんよう」と言ってください。ちょっと学習院っぽくなるかも。どうぞ終わりにしよう。はい, どうぞ。はい, 起立, じゃあ言ってごらん。

ごきげんよう。ごきげんよう。終わりです。

付録 ニュートンの手書きノート

If lab is an Hyperbola; ede , ck its asymptotes, a is
 vertex, & cag its axis; if $adch$ is a square of side ad
 $ac = 1, de = x$. & $bc = \frac{x}{1+x}$. If also, $cf = 1$. $eg = 1+x$. $eh = 1+2x+x^2$
 etc. (the progression continued is $1+3x+3x^2+x^3$. $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.
 $1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$ etc.) Then, shall the areas of those
 lines proceed in this progression. $*$ = $adib$. $x = adif$. $x + \frac{x^2}{2} = adig$
 $adkx + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. $x + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ etc.

As in this table. In w^{ch} the 1st area is also inserted. The composition of w^{ch} table may be
 deduced from hence; viz: The sum of any figure of y^e
 figure above it is equal to y^e figure following
 of y^e Hyperbola $adib$ is $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ etc.

Suppose y^e $adch$ is a square
 abc a circle arc a Parabola.
 etc. & y^e $dc = x$. $ad = 1$. $fe = 1 - 2x$.

of y^e progression in w^{ch} y^e lines fe , fg , ge , he , ie , ne &c
 proceeds is $1 - \sqrt{1-2x}$. $1 - 2x$. $1 - 2x\sqrt{1-2x}$. $1 - 2x + x^2$. $1 - 2x\sqrt{1-2x} + x^2$.
 $1 - 3x + x^2 + x^3 - 2x^2$ etc. Then will their areas $fede$, $gadi$, $geae$,
 $hade$, $ieae$ &c be in this progression. $x * x - \frac{x^2}{2} * x - \frac{x^3}{2} x^2 + \frac{x^4}{2} x^3$.
 $x - \frac{2x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{x^4}{2}$. $x - \frac{2x^2}{2} + \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ etc. as in this table
 following in w^{ch} the intermediate terms are inserted. The property of
 which table is y^e y^e

x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{32768}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{32768}$	$\frac{1}{65536}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{32768}$	$\frac{1}{65536}$	$\frac{1}{131072}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{32768}$	$\frac{1}{65536}$	$\frac{1}{131072}$	$\frac{1}{262144}$
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{32768}$	$\frac{1}{65536}$	$\frac{1}{131072}$	$\frac{1}{262144}$	$\frac{1}{524288}$
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{32768}$	$\frac{1}{65536}$	$\frac{1}{131072}$	$\frac{1}{262144}$	$\frac{1}{524288}$	$\frac{1}{1048576}$

Sum of any figure of y^e figure
 above it is equal to y^e figure next
 after it save one. Also y^e
 numerical progressions are of these
 forms. a. a. a.
 a. a. a. a. a. a.
 c. a. b. a. c. a. b. c. a. b. c.
 d. a. b. c. d. a. b. c. d. a. b. c. d.
 e. d. e. c. d. e. c. d. e. c. d. e.

Where y^e calculation of y^e intermediate terms may be easily performed. The area $adib$
 depends upon y^e 4th Column $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ etc. (w^{ch} progression may be continued at pleasure
 by y^e helps of this rule $\frac{0x1x-1x2x-2x3x-3x4x}{0x2x4x6x8x10x12x14x16x18}$ etc) Wherely it may appear y^e, what
 ever y^e sine $dc = x$ is, y^e area $adib$ is $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ etc. Wherely also y^e angle adb may be found.
 (y^e area $adib$ is $\frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{40} + \frac{x^4}{112}$ etc.) Wherely also y^e angle adb may be found.

The same may be done thus. y^e areas afd , adg , agd , adk &c are in this progression $\frac{1}{2}x + \frac{3}{10}x^3 - \frac{3x^5}{10} + \frac{5x^7}{14} - \frac{5x^9}{26} + \frac{7x^{11}}{42} - \frac{7x^{13}}{42} + \frac{9x^{15}}{10} - \frac{9x^{17}}{14} + \frac{11x^{19}}{14} - \frac{11x^{21}}{14} + \frac{13x^{23}}{14} - \frac{13x^{25}}{14} + \frac{15x^{27}}{14} - \frac{15x^{29}}{14} + \frac{17x^{31}}{14} - \frac{17x^{33}}{14} + \frac{19x^{35}}{14} - \frac{19x^{37}}{14} + \frac{21x^{41}}{14} - \frac{21x^{43}}{14} + \frac{23x^{47}}{14} - \frac{23x^{49}}{14} + \frac{25x^{53}}{14} - \frac{25x^{55}}{14} + \frac{27x^{59}}{14} - \frac{27x^{61}}{14} + \frac{29x^{65}}{14} - \frac{29x^{67}}{14} + \frac{31x^{71}}{14} - \frac{31x^{73}}{14} + \frac{33x^{77}}{14} - \frac{33x^{79}}{14} + \frac{35x^{83}}{14} - \frac{35x^{85}}{14} + \frac{37x^{89}}{14} - \frac{37x^{91}}{14} + \frac{39x^{95}}{14} - \frac{39x^{97}}{14} + \frac{41x^{101}}{14} - \frac{41x^{103}}{14} + \frac{43x^{107}}{14} - \frac{43x^{109}}{14} + \frac{45x^{113}}{14} - \frac{45x^{115}}{14} + \frac{47x^{119}}{14} - \frac{47x^{121}}{14} + \frac{49x^{125}}{14} - \frac{49x^{127}}{14} + \frac{51x^{131}}{14} - \frac{51x^{133}}{14} + \frac{53x^{137}}{14} - \frac{53x^{139}}{14} + \frac{55x^{143}}{14} - \frac{55x^{145}}{14} + \frac{57x^{149}}{14} - \frac{57x^{151}}{14} + \frac{59x^{155}}{14} - \frac{59x^{157}}{14} + \frac{61x^{161}}{14} - \frac{61x^{163}}{14} + \frac{63x^{167}}{14} - \frac{63x^{169}}{14} + \frac{65x^{173}}{14} - \frac{65x^{175}}{14} + \frac{67x^{179}}{14} - \frac{67x^{181}}{14} + \frac{69x^{185}}{14} - \frac{69x^{187}}{14} + \frac{71x^{191}}{14} - \frac{71x^{193}}{14} + \frac{73x^{197}}{14} - \frac{73x^{199}}{14} + \frac{75x^{203}}{14} - \frac{75x^{205}}{14} + \frac{77x^{209}}{14} - \frac{77x^{211}}{14} + \frac{79x^{215}}{14} - \frac{79x^{217}}{14} + \frac{81x^{221}}{14} - \frac{81x^{223}}{14} + \frac{83x^{227}}{14} - \frac{83x^{229}}{14} + \frac{85x^{233}}{14} - \frac{85x^{235}}{14} + \frac{87x^{239}}{14} - \frac{87x^{241}}{14} + \frac{89x^{245}}{14} - \frac{89x^{247}}{14} + \frac{91x^{251}}{14} - \frac{91x^{253}}{14} + \frac{93x^{257}}{14} - \frac{93x^{259}}{14} + \frac{95x^{263}}{14} - \frac{95x^{265}}{14} + \frac{97x^{269}}{14} - \frac{97x^{271}}{14} + \frac{99x^{275}}{14} - \frac{99x^{277}}{14} + \frac{101x^{281}}{14} - \frac{101x^{283}}{14} + \frac{103x^{287}}{14} - \frac{103x^{289}}{14} + \frac{105x^{293}}{14} - \frac{105x^{295}}{14} + \frac{107x^{299}}{14} - \frac{107x^{301}}{14} + \frac{109x^{305}}{14} - \frac{109x^{307}}{14} + \frac{111x^{311}}{14} - \frac{111x^{313}}{14} + \frac{113x^{317}}{14} - \frac{113x^{319}}{14} + \frac{115x^{323}}{14} - \frac{115x^{325}}{14} + \frac{117x^{329}}{14} - \frac{117x^{331}}{14} + \frac{119x^{335}}{14} - \frac{119x^{337}}{14} + \frac{121x^{341}}{14} - \frac{121x^{343}}{14} + \frac{123x^{347}}{14} - \frac{123x^{349}}{14} + \frac{125x^{353}}{14} - \frac{125x^{355}}{14} + \frac{127x^{359}}{14} - \frac{127x^{361}}{14} + \frac{129x^{365}}{14} - \frac{129x^{367}}{14} + \frac{131x^{371}}{14} - \frac{131x^{373}}{14} + \frac{133x^{377}}{14} - \frac{133x^{379}}{14} + \frac{135x^{383}}{14} - \frac{135x^{385}}{14} + \frac{137x^{389}}{14} - \frac{137x^{391}}{14} + \frac{139x^{395}}{14} - \frac{139x^{397}}{14} + \frac{141x^{401}}{14} - \frac{141x^{403}}{14} + \frac{143x^{407}}{14} - \frac{143x^{409}}{14} + \frac{145x^{413}}{14} - \frac{145x^{415}}{14} + \frac{147x^{419}}{14} - \frac{147x^{421}}{14} + \frac{149x^{425}}{14} - \frac{149x^{427}}{14} + \frac{151x^{431}}{14} - \frac{151x^{433}}{14} + \frac{153x^{437}}{14} - \frac{153x^{439}}{14} + \frac{155x^{443}}{14} - \frac{155x^{445}}{14} + \frac{157x^{449}}{14} - \frac{157x^{451}}{14} + \frac{159x^{455}}{14} - \frac{159x^{457}}{14} + \frac{161x^{461}}{14} - \frac{161x^{463}}{14} + \frac{163x^{467}}{14} - \frac{163x^{469}}{14} + \frac{165x^{473}}{14} - \frac{165x^{475}}{14} + \frac{167x^{479}}{14} - \frac{167x^{481}}{14} + \frac{169x^{485}}{14} - \frac{169x^{487}}{14} + \frac{171x^{491}}{14} - \frac{171x^{493}}{14} + \frac{173x^{497}}{14} - \frac{173x^{499}}{14} + \frac{175x^{503}}{14} - \frac{175x^{505}}{14} + \frac{177x^{509}}{14} - \frac{177x^{511}}{14} + \frac{179x^{515}}{14} - \frac{179x^{517}}{14} + \frac{181x^{521}}{14} - \frac{181x^{523}}{14} + \frac{183x^{527}}{14} - \frac{183x^{529}}{14} + \frac{185x^{533}}{14} - \frac{185x^{535}}{14} + \frac{187x^{539}}{14} - \frac{187x^{541}}{14} + \frac{189x^{545}}{14} - \frac{189x^{547}}{14} + \frac{191x^{551}}{14} - \frac{191x^{553}}{14} + \frac{193x^{557}}{14} - \frac{193x^{559}}{14} + \frac{195x^{563}}{14} - \frac{195x^{565}}{14} + \frac{197x^{569}}{14} - \frac{197x^{571}}{14} + \frac{199x^{575}}{14} - \frac{199x^{577}}{14} + \frac{201x^{581}}{14} - \frac{201x^{583}}{14} + \frac{203x^{587}}{14} - \frac{203x^{589}}{14} + \frac{205x^{593}}{14} - \frac{205x^{595}}{14} + \frac{207x^{599}}{14} - \frac{207x^{601}}{14} + \frac{209x^{605}}{14} - \frac{209x^{607}}{14} + \frac{211x^{611}}{14} - \frac{211x^{613}}{14} + \frac{213x^{617}}{14} - \frac{213x^{619}}{14} + \frac{215x^{623}}{14} - \frac{215x^{625}}{14} + \frac{217x^{629}}{14} - \frac{217x^{631}}{14} + \frac{219x^{635}}{14} - \frac{219x^{637}}{14} + \frac{221x^{641}}{14} - \frac{221x^{643}}{14} + \frac{223x^{647}}{14} - \frac{223x^{649}}{14} + \frac{225x^{653}}{14} - \frac{225x^{655}}{14} + \frac{227x^{659}}{14} - \frac{227x^{661}}{14} + \frac{229x^{665}}{14} - \frac{229x^{667}}{14} + \frac{231x^{671}}{14} - \frac{231x^{673}}{14} + \frac{233x^{677}}{14} - \frac{233x^{679}}{14} + \frac{235x^{683}}{14} - \frac{235x^{685}}{14} + \frac{237x^{689}}{14} - \frac{237x^{691}}{14} + \frac{239x^{695}}{14} - \frac{239x^{697}}{14} + \frac{241x^{701}}{14} - \frac{241x^{703}}{14} + \frac{243x^{707}}{14} - \frac{243x^{709}}{14} + \frac{245x^{713}}{14} - \frac{245x^{715}}{14} + \frac{247x^{719}}{14} - \frac{247x^{721}}{14} + \frac{249x^{725}}{14} - \frac{249x^{727}}{14} + \frac{251x^{731}}{14} - \frac{251x^{733}}{14} + \frac{253x^{737}}{14} - \frac{253x^{739}}{14} + \frac{255x^{743}}{14} - \frac{255x^{745}}{14} + \frac{257x^{749}}{14} - \frac{257x^{751}}{14} + \frac{259x^{755}}{14} - \frac{259x^{757}}{14} + \frac{261x^{761}}{14} - \frac{261x^{763}}{14} + \frac{263x^{767}}{14} - \frac{263x^{769}}{14} + \frac{265x^{773}}{14} - \frac{265x^{775}}{14} + \frac{267x^{779}}{14} - \frac{267x^{781}}{14} + \frac{269x^{785}}{14} - \frac{269x^{787}}{14} + \frac{271x^{791}}{14} - \frac{271x^{793}}{14} + \frac{273x^{797}}{14} - \frac{273x^{799}}{14} + \frac{275x^{803}}{14} - \frac{275x^{805}}{14} + \frac{277x^{809}}{14} - \frac{277x^{811}}{14} + \frac{279x^{815}}{14} - \frac{279x^{817}}{14} + \frac{281x^{821}}{14} - \frac{281x^{823}}{14} + \frac{283x^{827}}{14} - \frac{283x^{829}}{14} + \frac{285x^{833}}{14} - \frac{285x^{835}}{14} + \frac{287x^{839}}{14} - \frac{287x^{841}}{14} + \frac{289x^{845}}{14} - \frac{289x^{847}}{14} + \frac{291x^{851}}{14} - \frac{291x^{853}}{14} + \frac{293x^{857}}{14} - \frac{293x^{859}}{14} + \frac{295x^{863}}{14} - \frac{295x^{865}}{14} + \frac{297x^{869}}{14} - \frac{297x^{871}}{14} + \frac{299x^{875}}{14} - \frac{299x^{877}}{14} + \frac{301x^{881}}{14} - \frac{301x^{883}}{14} + \frac{303x^{887}}{14} - \frac{303x^{889}}{14} + \frac{305x^{893}}{14} - \frac{305x^{895}}{14} + \frac{307x^{899}}{14} - \frac{307x^{901}}{14} + \frac{309x^{905}}{14} - \frac{309x^{907}}{14} + \frac{311x^{911}}{14} - \frac{311x^{913}}{14} + \frac{313x^{917}}{14} - \frac{313x^{919}}{14} + \frac{315x^{923}}{14} - \frac{315x^{925}}{14} + \frac{317x^{929}}{14} - \frac{317x^{931}}{14} + \frac{319x^{935}}{14} - \frac{319x^{937}}{14} + \frac{321x^{941}}{14} - \frac{321x^{943}}{14} + \frac{323x^{947}}{14} - \frac{323x^{949}}{14} + \frac{325x^{953}}{14} - \frac{325x^{955}}{14} + \frac{327x^{959}}{14} - \frac{327x^{961}}{14} + \frac{329x^{965}}{14} - \frac{329x^{967}}{14} + \frac{331x^{971}}{14} - \frac{331x^{973}}{14} + \frac{333x^{977}}{14} - \frac{333x^{979}}{14} + \frac{335x^{983}}{14} - \frac{335x^{985}}{14} + \frac{337x^{989}}{14} - \frac{337x^{991}}{14} + \frac{339x^{995}}{14} - \frac{339x^{997}}{14} + \frac{341x^{1001}}{14} - \frac{341x^{1003}}{14} + \frac{343x^{1007}}{14} - \frac{343x^{1009}}{14} + \frac{345x^{1013}}{14} - \frac{345x^{1015}}{14} + \frac{347x^{1019}}{14} - \frac{347x^{1021}}{14} + \frac{349x^{1025}}{14} - \frac{349x^{1027}}{14} + \frac{351x^{1031}}{14} - \frac{351x^{1033}}{14} + \frac{353x^{1037}}{14} - \frac{353x^{1039}}{14} + \frac{355x^{1043}}{14} - \frac{355x^{1045}}{14} + \frac{357x^{1049}}{14} - \frac{357x^{1051}}{14} + \frac{359x^{1055}}{14} - \frac{359x^{1057}}{14} + \frac{361x^{1061}}{14} - \frac{361x^{1063}}{14} + \frac{363x^{1067}}{14} - \frac{363x^{1069}}{14} + \frac{365x^{1073}}{14} - \frac{365x^{1075}}{14} + \frac{367x^{1079}}{14} - \frac{367x^{1081}}{14} + \frac{369x^{1085}}{14} - \frac{369x^{1087}}{14} + \frac{371x^{1091}}{14} - \frac{371x^{1093}}{14} + \frac{373x^{1097}}{14} - \frac{373x^{1099}}{14} + \frac{375x^{1103}}{14} - \frac{375x^{1105}}{14} + \frac{377x^{1109}}{14} - \frac{377x^{1111}}{14} + \frac{379x^{1115}}{14} - \frac{379x^{1117}}{14} + \frac{381x^{1121}}{14} - \frac{381x^{1123}}{14} + \frac{383x^{1127}}{14} - \frac{383x^{1129}}{14} + \frac{385x^{1133}}{14} - \frac{385x^{1135}}{14} + \frac{387x^{1139}}{14} - \frac{387x^{1141}}{14} + \frac{389x^{1145}}{14} - \frac{389x^{1147}}{14} + \frac{391x^{1151}}{14} - \frac{391x^{1153}}{14} + \frac{393x^{1157}}{14} - \frac{393x^{1159}}{14} + \frac{395x^{1163}}{14} - \frac{395x^{1165}}{14} + \frac{397x^{1169}}{14} - \frac{397x^{1171}}{14} + \frac{399x^{1175}}{14} - \frac{399x^{1177}}{14} + \frac{401x^{1181}}{14} - \frac{401x^{1183}}{14} + \frac{403x^{1187}}{14} - \frac{403x^{1189}}{14} + \frac{405x^{1193}}{14} - \frac{405x^{1195}}{14} + \frac{407x^{1199}}{14} - \frac{407x^{1201}}{14} + \frac{409x^{1205}}{14} - \frac{409x^{1207}}{14} + \frac{411x^{1211}}{14} - \frac{411x^{1213}}{14} + \frac{413x^{1217}}{14} - \frac{413x^{1219}}{14} + \frac{415x^{1223}}{14} - \frac{415x^{1225}}{14} + \frac{417x^{1229}}{14} - \frac{417x^{1231}}{14} + \frac{419x^{1235}}{14} - \frac{419x^{1237}}{14} + \frac{421x^{1241}}{14} - \frac{421x^{1243}}{14} + \frac{423x^{1247}}{14} - \frac{423x^{1249}}{14} + \frac{425x^{1253}}{14} - \frac{425x^{1255}}{14} + \frac{427x^{1259}}{14} - \frac{427x^{1261}}{14} + \frac{429x^{1265}}{14} - \frac{429x^{1267}}{14} + \frac{431x^{1271}}{14} - \frac{431x^{1273}}{14} + \frac{433x^{1277}}{14} - \frac{433x^{1279}}{14} + \frac{435x^{1283}}{14} - \frac{435x^{1285}}{14} + \frac{437x^{1289}}{14} - \frac{437x^{1291}}{14} + \frac{439x^{1295}}{14} - \frac{439x^{1297}}{14} + \frac{441x^{1301}}{14} - \frac{441x^{1303}}{14} + \frac{443x^{1307}}{14} - \frac{443x^{1309}}{14} + \frac{445x^{1313}}{14} - \frac{445x^{1315}}{14} + \frac{447x^{1319}}{14} - \frac{447x^{1321}}{14} + \frac{449x^{1325}}{14} - \frac{449x^{1327}}{14} + \frac{451x^{1331}}{14} - \frac{451x^{1333}}{14} + \frac{453x^{1337}}{14} - \frac{453x^{1339}}{14} + \frac{455x^{1343}}{14} - \frac{455x^{1345}}{14} + \frac{457x^{1349}}{14} - \frac{457x^{1351}}{14} + \frac{459x^{1355}}{14} - \frac{459x^{1357}}{14} + \frac{461x^{1361}}{14} - \frac{461x^{1363}}{14} + \frac{463x^{1367}}{14} - \frac{463x^{1369}}{14} + \frac{465x^{1373}}{14} - \frac{465x^{1375}}{14} + \frac{467x^{1379}}{14} - \frac{467x^{1381}}{14} + \frac{469x^{1385}}{14} - \frac{469x^{1387}}{14} + \frac{471x^{1391}}{14} - \frac{471x^{1393}}{14} + \frac{473x^{1397}}{14} - \frac{473x^{1399}}{14} + \frac{475x^{1403}}{14} - \frac{475x^{1405}}{14} + \frac{477x^{1409}}{14} - \frac{477x^{1411}}{14} + \frac{479x^{1415}}{14} - \frac{479x^{1417}}{14} + \frac{481x^{1421}}{14} - \frac{481x^{1423}}{14} + \frac{483x^{1427}}{14} - \frac{483x^{1429}}{14} + \frac{485x^{1433}}{14} - \frac{485x^{1435}}{14} + \frac{487x^{1439}}{14} - \frac{487x^{1441}}{14} + \frac{489x^{1445}}{14} - \frac{489x^{1447}}{14} + \frac{491x^{1451}}{14} - \frac{491x^{1453}}{14} + \frac{493x^{1457}}{14} - \frac{493x^{1459}}{14} + \frac{495x^{1463}}{14} - \frac{495x^{1465}}{14} + \frac{497x^{1469}}{14} - \frac{497x^{1471}}{14} + \frac{499x^{1475}}{14} - \frac{499x^{1477}}{14} + \frac{501x^{1481}}{14} - \frac{501x^{1483}}{14} + \frac{503x^{1487}}{14} - \frac{503x^{1489}}{14} + \frac{505x^{1493}}{14} - \frac{505x^{1495}}{14} + \frac{507x^{1499}}{14} - \frac{507x^{1501}}{14} + \frac{509x^{1505}}{14} - \frac{509x^{1507}}{14} + \frac{511x^{1511}}{14} - \frac{511x^{1513}}{14} + \frac{513x^{1517}}{14} - \frac{513x^{1519}}{14} + \frac{515x^{1523}}{14} - \frac{515x^{1525}}{14} + \frac{517x^{1529}}{14} - \frac{517x^{1531}}{14} + \frac{519x^{1535}}{14} - \frac{519x^{1537}}{14} + \frac{521x^{1541}}{14} - \frac{521x^{1543}}{14}$

4-1 数学者による高校の授業

微分積分研究授業の記録 —微分の幾何的な導入—

岡部 恒治
埼玉大学経済学部

1. データ

領域	解析を幾何でわかる
校種	私立高等学校 10月17日実施(2/3回目)
学年	2年生
対象	希望者に選択授業として
単元名	微分積分の微分

2. 授業の意図～微分の意味がわかる～

別の研究授業の際に、微分積分に対して『計算はできるが意味がわからない』という生徒が多い」というご意見があった。私は意味がわかるようにするために、微分積分をより視覚化すべきと以前から考えており、この研究授業を提案した。

この授業の前に、「積分的思考から錘の体積の公式へ」という第1回目の授業を行った。そこで、裏返しパズルを考えることで、対称の中心に着目させ、それに区分求積の考え方を用いて、錘の体積の公式を導き、積分を意識させた。

この回は、より抽象的と思われる微分を、「曲線を微かく分けると、局所的には1次関数のグラフ(線分)になる」と見ることがポイントである。1次関数にすると、掛け算微分(→割り算・無理関数微分)、(3回目に予定している)合成関数微分なども極限の方法とは違う形で出てくる。授業の進め方では現職の先生にはかなわれないが、わかるために様々な実験的アプローチを提案するのが私の務めと思う。

(注)

なお、講義と検討会は、流れにしたがって記録しているので、章や節などで区切ることはしない。また、レジュメも当日渡したものをそのまま載せたので、同様である。

読みにくいところもあるかもしれないが、ご寛恕願いたい。

また、この講義に際して、便宜をいただいた品川女子学院の漆校長と斉藤先生に深く感謝いたします。

3. 講義の記録

岡部です。よろしくお願いします。

前回は、皆さんとお近づきになるということもあって、半分以上遊びみたいでパズルみたいなことをやっていました。3回中の今回だけは、色んな人がいっぱい見に来ていますから、ちょっと真面目にやります。

今日は微分のことをやります。私が高校生の時、先生が「微分は微かに分る、積分は分かったつもり」と説明したという話は先週やりました。では、「微分は何か？」と言うと、本当は「関数のグラフを微かく分けて、分析する」という意味です。その内容を、これからお話していきます。

この1時間で、いろいろな微分の公式を導き、「それを使いこなせるように」と考えています。そのためにいくつか作業用のプリントやOHP用紙を持ってきました。でも、この資料の作成のための時間が思うように取れず、途中で断念しました。残りの分は黒板を使います。

まず、関数とグラフの復習から入っていきます。一番簡単な関数は、「定数関数」です。それは、 $y = p$ という形をしています。ここに出てくる p は定数です。 x にどんな値を入れても、 y は常にその定数の値 p になる。式の中に x が入っていませんから、当たり前のことです。 x に1を入れようが、0を入れようが、10,000を入れようが、常に p ですね。この関数は、どの x を入れても p という値をとるので、グラフの形では、 y 軸と $(0, p)$ で交わり、 x 軸と平行な直線です。

なお、関数に対して、グラフを書くことにします。グラフと関数は、本当は完全に一致するものではないんだけど、ここではグラフと関数を同じものとして考えます。関数になるものは、だいたいグラフで描けることが多いし、グラフが与えられれば、そのグラフを持つ関数があります。

いま、「だいたい」と言いました。この言い方は、微妙な言い回しですけども、中学校・高校で習う関数というのは、基本的にはグラフで書けるし、グラフを見ることによって色々なことが分かってくるものがほとんどです。グラフが関数を表す非常に良い道具なんです。

「定数関数 $y = p$ は、水平な直線のグラフになる」ということは覚えておいてください。これは後で又ちょっと出てくるかもしれません。

次に簡単なのは、1次関数ですね。これは中学校で既に学習した関数です。式の形では、 $y = p x + q$ です。何が1次っていうのかと言うと、この関数での変数 x が1次式で表されているから、1次関数と言うんですね。ここで出てくる p と q は定数で、 x が入れたら y も決まる。それで、関数になっているのです。

この関数で、 x が 1 増えると、 y が p 増えます。そういう関数で、 $x = 0$ を代入したら q ですから、 y 軸との交点が q になる訳ですね。こうしてこの関数は「傾きが p で、 (y) 切片は q 」と言われます。これは中学校で既に習ってきました。特に $p = 0$ だとしたら、 $y = q$ という定数関数になります。だから、ここでは定数関数から始めましたが、実は一次関数から始めても良い訳ですね。

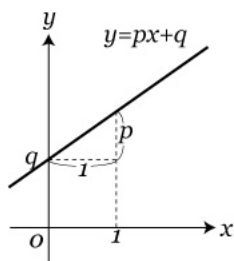


図 1・1 1 次関数のグラフ

これから話すことには、反発する方もいらっしゃるかもしれませんが、言っておきたいことがあります。

関数を分析するにあたっての数学の立場からの考え方があります。「わからないものを、既にわかっているものや、簡単なものを使って、分析していく」というのが数学のやり方の一つです。この考え方でいくと、関数とそのグラフでは、一番簡単な一次関数を使えば良いだろうとなります。今日の授業はそういう観点で行われます。分析したい関数を「微かく分け」て、各点で一次関数とみなすことから始めようということです。

その一次関数の傾きを、その点での「**微分係数**」といいます。いきなり微分係数が出てきて、教科書と違うのでとまどったかもしれません。しかし、この進み方のほうがわかりやすいのです。

この「微分係数」が曲線の分析するときの基本的な道具です。経済等で景気が上昇しているかどうかということ判断するとします。この場合、例えば、 y 軸に収入とか或いは貯蓄とかそういうものの目盛りを取れば、これが増大しているか、或いは減少しているか、それが非常に重要であります。貯蓄等なら、絶対値も重要ですが、「今どういうふうに景気が向かっているかな？上向きか？下向きか？」と考えることも非常に重要ですね。

それを調べるにはどうすれば良いかというと、曲線の一部を拡大していくのですね。拡大しても、まだちょっと曲線っぽいときは、更に拡大していきます。そのように拡大していくと、ほぼ線分とみなすことが出来るであろうと考えられるのです。

実は、いくら拡大しても線分とみなせない関数も実はあるんです。でも、皆さんが高校で習う関数は、大体拡大していくと、こういう線分にみなせます。こういう性質のことを「**微分可能**」という名前がついています。つまり、高校までで学習する関数は微分可能に限っています。

ここでは、少しおおざっぱに話を進めていきます。これは「関数が増加していくところでどうなっていくか？」という疑問を解決するために、グラフの一部分を、線分とみなせるところまでどんどん拡大してみると、その線分の傾きという概念が出てきます。すなわち、「関数が増加しているところでは、この線分の傾きがプラスである」とわかります。

一方、減少しているところはどうでしょうか？ 曲線の減少している部分を拡大して、これを線分とみなせるくらいにすると、この線分の傾きは-になっています。

グラフの曲線を線分とみなせるくらい拡大して、その傾きが「+になっているか?」、 「-になっているか?」ということで、景気の先行きを判断できるのです。だから、「曲線の各点の傾きがどうなっているか?」ということ、それからわかる「グラフの増減」が非常に大切なのです。

経済で扱うものの中に株があります。しかし、経済学者は実際の株の値動きをつかめるわけではありません。「数学者は計算に弱い」というのと同じで、「経済学者に株を取引させたらと、大体損をする」というのが相場です。中には、例外の方もいらっしゃるかもしれませんが、…。

さて、短期の株取引の極意は、極小値で買って、極大値で売って、その差額で得をするというものです。しかし、株の値動きの曲線の動きは、終わってみたいとどうなるかわかんないんです。それが事前にわかっていたら、極小値になるまで待って買う。それから極大値になるまで待って売ることが出来るのです。

ですから、こういう株のグラフを完全に分析出来れば非常に儲かるのです。実際は、人間の行為には、必勝法がありません。「こうするとうまくいく」とわかれば、誰もがそのようにしますから、結局、皆同じことをして、うまみがなくなり、必勝法にはならないのです。

でも、この分析で、極大、極小というのは非常に大切なので、この「まわりで一番高いところを「極大」、一番低いところを「極小」という名前が付けられたことだけは銘記してください。これは皆さん、今もう2年生ですから、もう既に習っているでしょう。

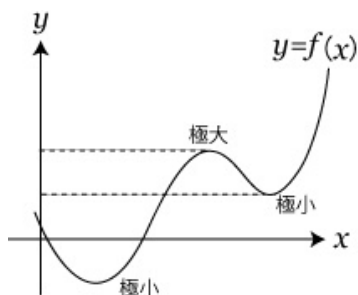


図1-2 グラフに現われる極大・極小

極大、極小は、こういう時に役立つんです。役立つと言っても、実際の株の売買には、ほとんど役立ちません。事前にこういうグラフを書けない訳ですから。ただ、こ

ういうことを理論的に分析することが重要だということです。

でも、「曲線の分析を株に」といったら大体反発が来るんですね。株のグラフって、ここに描いたものはまだおとなしい方で、本当は箱ひげ図というのがあって、一日中でも上下を繰り返しているのです。ですから、激しいギザギザがある形で、こんなグラフが、接線をひけるなんてことはできそうもありません。

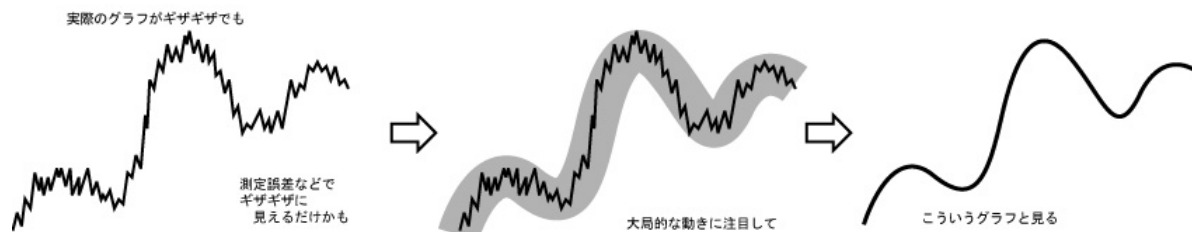


図1-3 株のグラフをなめらかにとらえる

でも、これを大まかな傾向として捉えて、これから「価格上昇局面に入る」のか、「下降局面に入る」のか、という傾向がわかれば良いのです。「大雑把に捉えると、大体こんなグラフとみなすことが出来るだろう」と、そういうふうにと考えると、このギザギザしているものも、接線がひける関数として考えることが出来るということなんですね。

このへんはすごくこじつけめいていますが、「学問が役に立つ」という話をわかりやすくする時は、こじつけざるを得ないのです。

「グラフを拡大して、この売り買いの最も重要な点、拡大点ではどうなっているか？」ということとは、実は17世紀にフェルマが着目したのです。フェルマという人は、パスカルやデカルトと一緒に、色々な数学の仕事で活躍しました。とくに、「この極大点は“増える間”と“減る間”の間だ」という、そういうくだらないダジャレができる点でも嬉しいのです。

だじゃれはともかくとして、増えるところから減るところの境目が極大値になります。フェルマは、実際に「フェルマの方法」で、極大値を求めています。つまり、極大値を与える点では、曲線の傾きが0ですから、その付近で x を少し増やしても関数がほとんど増えない。そういう点を探して、極値を求めるのが「フェルマの方法」です。彼がその方法を出したとき、接点という言葉はもちろんありませんし、座標なども彼らが開発した頃です。

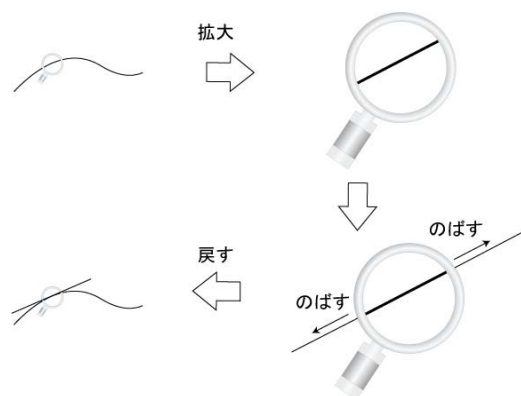


図1-4 増える間(フェルマ)と減る間(フェルマ)

さて、曲線を細かく分けて、これを拡大して、更に拡大していくと、ほぼ線分になって、その傾きを出して、その傾きを「微分係数」と言いましたね。この「微分係数」

は何を意味するのでしょうか？

「線分は両方向に伸ばすことが出来る」というのは、『ユークリッド』原論にも書いてあります。ですから、この線分を両方に伸ばしてみます。そして、伸ばしてから又元の図へ戻すと、この伸ばした直線は、接線になります。ですから、ここの細かく分けたこの線分の傾きというのは、実はここでの接点の傾きと等しいのですね。ここは、一つ押さえておいてください。よろしいでしょうか？



ここまでも、すでに「何言ってんだ？このアホ！」と思うかもしれませんが、ここからは少しずつ変わったことを始めます。今まで、「一次関数の傾き」まで話しました。

次は2次関数を分析してみましよう。2次関数は中学3年と、数Iで扱っています。数Iで学んだ結果によって色んなことが出来る状態にあります。これを使って全ての色々な性質と方法を出していこうというのです。

2次関数のグラフは、放物線と呼ばれて昔から分析されてきたんですが、このデカルト、パスカル、フェルマが軌跡の研究でこれを深く研究しました。「このフェルマ、パスカルの研究で微分が成立した」と私は思っています。

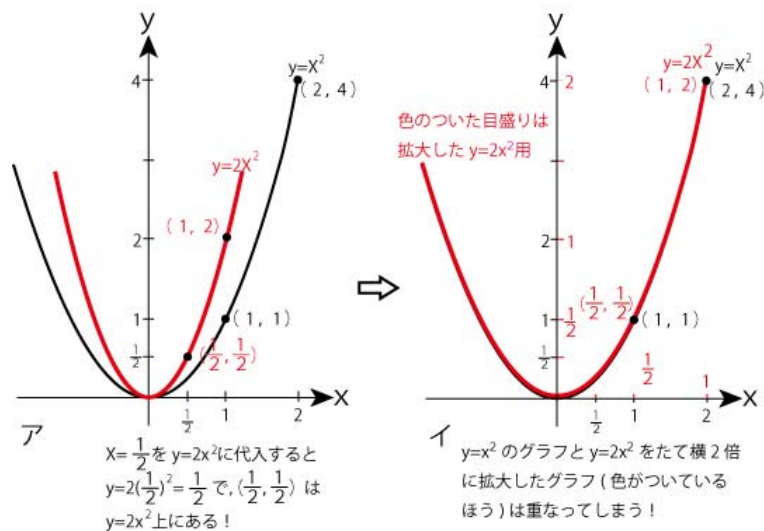
でも、そのずっと以前にこの放物線を利用した人がいます。それはアルキメデスです。彼は、紀元前3世紀にやっぱり軍事目的で、石を投げる投石機というのを発明しています。それから、軍艦が来たら、陸から、太陽の光を集めて燃やすという放火機を作りました。この面は、結果的に放物面になるのです。完全な放物面では無いんですけど、…。結果的にという言い方をしていますが、これは小さい鏡をいくつも組み合わせています。この組み合わせた物が実は放物面に近い形になっているのです。小さい面をつなぎ合わせて放物面にするのです。これはあたかも、この授業で見たように、曲線を細かく分けると、線分であるという、その線分をいくつも組み合わせると、放物線を作ったのと同じことです。現在、このアルキメデスのやり方は、パラボラアンテナや、それから懐中電灯の内側の金属面などに利用されています。また、有明のパナソニックセンターのRiSuPiaには、玉を落として、放物面で反射して焦点に玉を集める遊具があります。是非RiSuPiaで玉を落としてきてください。

放物線は昔から分析されてきて親しまれていますが、「放物線はすべて相似である」

という性質が意外と知られていないのです。だいぶ以前のことですが、私がある本にこのことを書きましたら、私の親戚にあたる有名な化学の教授から「 $y = 3x^2$ は $y = x^2$ より細いではないか。だからこんなのは相似ではない。それを相似だとは何事だ？」と、きついお叱りを受けました。

しかし、これは $y = 3x^2$ を3倍に拡大して、 $y = x^2$ に重ねれば、私の言ったことが嘘かどうかわかります。実際は嘘かもしれないので、試してみてください。皆さんに配った2枚のOHP用紙の中に $y = x^2$ と $y = 3x^2$ の3倍がそれぞれ書いてありますから、この2枚のx軸とy軸を合わせるようにくっつけてみてください。これで $y = 3x^2$ の3倍と、 $y = x^2$ がどういう関係にあるか分かります。ちゃんと、 $y = 3x^2$ の3倍のグラフが $y = x^2$ のグラフに重なりますよね。

それとついでに $y = x^2$ のグラフの4倍がそこに書いてあります。これももう一つのシートと重ねると、何かと重なりますね。何に重なったでしょうか？ $y = x^2$ の4倍は、 $y = 1/4x^2$ のグラフそのものに重なります。つまり、「一般に、 $y = kx^2$ というやつは、これをk倍に相似拡大すると、言い換えると、縦横k倍すると、 $y = x^2$ に重なる」ということです。こういうことはほとんどどこでも聞いてなかったみたいで、化学の先生が怒るわけです。今の教科書でもなかなかこの話は出てこないのです、しょうがないから僕はことあるごとに触れています(なお、下の図は $y = x^2$ と $y = 2x^2$ の場合です)。



「何故このことを話したのか？」と言うと、これから曲線を微かく分けて分析する時に、色々なkについて、 $y = kx^2$ を全部調べるのは大変です。でも、相似ですから $y = x^2$ で成り立つことは、相似比を除いてはほとんど同じように $y = kx^2$ でも成り立ちます。ですから、「 $y = x^2$ だけを重点的に調べればよい」ということになるのです。

今のような「重ねて…」などのような議論は、OHP用紙でやったほうがその場で線を引いたり、重ねたりしてやりやすいのですね。最近では、液晶プロジェクターにな

って、小さなメモリーを持っていけばすぐ表や図が出てきてすごく楽になったと思うのですが、こういう時はOHPの方がずっと楽なんですね。何にでも長所短所があるということがわかります。

その次に、放物線の性質その2も復習しておきましょう。この性質は、さきほども言ったように、フェルマという人が発見しました。別の本では、パスカルが発見したとも、パスカル・フェルマとも書かれています。

私たちは、せっかく数Iで二次関数までやっていますから、それを使います。

この $y = x^2$ の点 (a, a^2) で接線を引きますと、その接線の y 切片(単に「切片」とも言います)には、ある性質があることをフェルマが発見しています。

皆さんのお手元には $y = x^2$ のグラフが印刷された紙がありますね。ここで、 $y = x^2$ のグラフの上の好きな点で、実際に接線を引いてみてください。

ものさしを、少しずつ、 $y = x^2$ のグラフには交わらないように、 $y = x^2$ のグラフ上のある点に近づけていきます。そして、ものさしの線と $y = x^2$ のグラフが1点Aだけで重なるようにします。このとき、ものさしの線は、この点Aで接する「接線」になるのです。この点Aを「接点」といいます。この点Aの座標は (a, a^2) とあらわせますね。

その接線の y 切片というのは y 軸との交点ですね。「この接線が y 軸と交わる点である y 切片では、ある性質がある」とフェルマやパスカルが言ったのです。

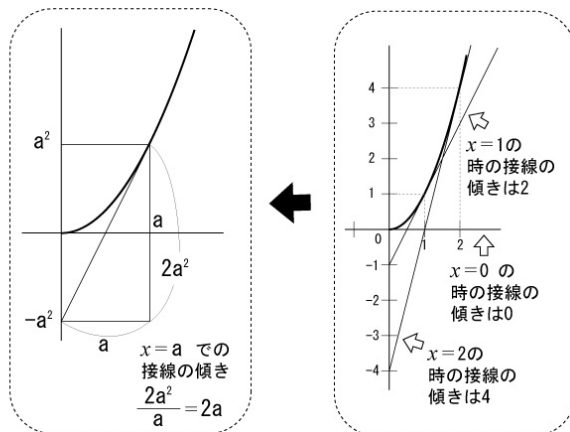
さあ、どういう性質があるのでしょうか？ どういう性質を持っているかを教えてください。おおざっぱにわかればよいのですよ。誰かわかったことを発表したい人はいませんか？

「そこの方、わかりましたか？ 言ってみますか？」

生徒A「点 (a, a^2) での接線の切片は、 $-a^2$ になります。」

そうです！ よくわかりました。切片は $-a^2$ になりますね。つまり、点 (a, a^2) での接線の切片は、接点の y 座標 a^2 と同じだけ、マイナスの方向に行ったところですよ。これがフェルマの発見です。

このことから
関数 $f(x) = x^2$ の
導関数は
 $f'(x) = 2x$
となる



これは非常に重要な性質であります。どういうふうに重要かを見てみましょう。実際、整数の値の点で調べてみましょう。(3, 9)の点で接線を引くと、このy座標が9ですから、y切片は-9ですね。また、(2, 4)の点で接線を引くと、このy座標が4ですから、y切片は-4です。(1, 1)の点で接線を引くと、このy座標が1ですから、y切片は-1なります。結局、そう (p, p^2) の点で接線を引くと、このy座標が p^2 ですから、y切片は $-p^2$ です。

では、この $y = x^2$ の点 (a, a^2) での接線の傾きは、どうなるでしょう？「今の方、分かります？ ここの接線の傾きはもちろん a を使って説明して構わないんです。」

生徒A 「2 a です。」

はい、よくできました！ 2 a になりますね。何故かと言うと、このグラフを見ても分かるけど、点 (a, a^2) のy座標は a^2 で、y切片が $-a^2$ なので、y切片から接点までのyの増えた量は $2a^2$ 、また、xは切片 $(x = 0)$ から接点 a だけ進むのですね。つまり、この接線では、x方向に a 進んだとき、これが分母で、y方向には $2a^2$ だけ増えているのです。この $2a^2$ が傾きの分子になります。傾きは、次のように計算できます。

$$\frac{2a^2}{a} = 2a$$

こうして、点 (a, a^2) での接線の傾きは $2a$ になります。この接線の傾きというのは、さっきも言いましたように、この $y = x^2$ のグラフを細かく分けたときの線分の傾きですから、 $x = a$ のまわりでは、曲線を十分拡大すると、傾き $2a$ の線分になっていることになります。これがいまの結論として出てきます。

これは次のように言うこともできます。「関数 $f(x) = x^2$ は、 $x = a$ のまわりで、 $f(x) \doteq 2ax - a^2$ と近似できる」。「まわりで」というのは、「十分小さい範囲で」ということです。ここでの、定数項の $-a^2$ というのは、接線のy切片が $-a^2$ だったからです。

このように、各点のまわりで、一次式の線分の式、つまり直線の式で表せます。例

例えば $x = 2$ のまわりだったら、 $f(x) \approx 4x - 4$ となりますね。つまり、「 $x = 2$ の付近では、この関数は $4x - 4$ という一次式とみなすことができますよ」、同じように、「 $x = 3$ の付近では、この関数は $6x - 9$ という一次式とみなせます」となります。

だから、この関数は2次関数ですが、各点で1次関数で近似されていると考えると、色々と都合が良いのです。1次関数は構造が良くわかっていますから。

さっきも言いましたように、一般に、ある点のまわりで曲線の接線の傾きが分かれば、その周りでその傾きをもつ1次関数に近似されます。微分の立場から言うと、「増えるか？減ってるか？」ということはすごく大事なので、傾きがすごく大事なんですね。その一方で、**関数の増減を調べる**ときに、**定数項はあまり気にしなくて良い**のですね。

この授業では、ものさしを使って作業的に接線の傾きを出しました。そうすると、いい加減に見えて、「数学とちょっと違うんじゃないか？」と怒る方もいます。私は作業的に理解すれば十分だと思っているのです。

でも、2次関数 $y = x^2$ の点 (a, a^2) での接線の傾きは $2a$ だということは、皆さんが学んできた数Iで確かめることもできます。これは、 $y = x^2$ と、それから点 (a, a^2) を通り、傾き $2a$ の直線、すなわち $y = 2ax - a^2$ が $x = a$ で接することを確かめればよいのです。

これはよく入試にも出てくるタイプの問題で、実際に連立方程式を解けばできます。

$$y = x^2 \quad \text{と} \quad y = 2ax - a^2 \quad \text{を連立させて、} y \text{ を消去すると、}$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad \text{となります。}$$

$$\text{これは整理してやると、} (x - a)^2 = 0 \quad \text{です。}$$

確かにこれは $x = a$ が重解になっていますから、 $x = a$ で接しているということがわかります。恐らく、皆さんが数Iで何回も習ってきたんでしょう。

皆さんは、数Iで習ったことを使ってすぐ出せるのですが、あのフェルマとか、パスカルの時代にはそんなに簡単にいかなかったのです。彼らが活躍した17世紀になって、座標が初めて出てきたのです。座標は、デカルトが初めてデカルト座標を出したとか、いや、実はフェルマが先だとか色々な説がありますが、いずれにしても彼らの前には、皆さんのように座標を使いこなせていたわけではありません。彼らの直前に、ヴィエタが多項式の表しかたを工夫したのですが、その多項式もみんながキッチンと使いこなせていたわけではありませんでした。そのような時に、微分の萌芽的な研究が出たということは、大変なことです。

実際に彼らがやったのは、図形的に「放物線に接線を引くと、この軸と交わっている点はちょうどこの x 軸を挟んでちょうど向かい側の同じ距離だ」という、そういう表現になっているのです。現代のような、「 $-a^2$ で交わる」なんて、そういう言い方

もできないので、非常に面倒な表現が必要です。

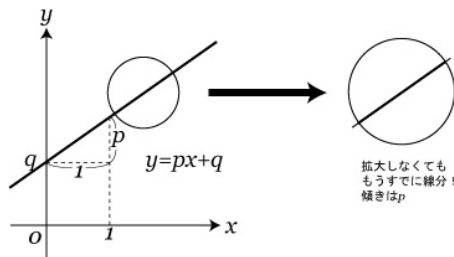
さて、この2次関数の微分の結果は、あとで大きな意味をもってきます。

そのことは、関数に対して色んな演算を考えて、その演算をした後の関数の微分係数どうなるかを考察する中ででてきます。関数の演算とは、「関数の実数倍」、「2つの関数を足す」、「2つの関数を掛ける」、「関数を関数で割る」などがあります。

まず、この時に、「各点ごとに1次式で表される」ことが使われます。そして、結論から言うと、関数の実数倍、関数の足し算、引き算では、微分係数でもそのまま受け継がれます。つまり、それぞれの関数の微分係数の実数倍、それぞれの関数の微分係数の足し算、引き算になります。もっともらしい結果で、このことを「**微分の線形性**」と呼びます。でも、このようなことが成り立たないものがあります。それは、「関数の掛け算の微分」と「関数の割り算の微分」で、このときに2次関数の微分の結果がきわめて大きな意味を持ちます。

さて、1次関数から微分を実際に始めましょう。

$f(x) = px + q$ という1次関数について、「このグラフの $x = a$ の点で拡大して1次式と考えると、…」とやる必要はありませんね。もうこれは元々一次式ですから、傾き p の直線になります。傾きは常に p ですね。



このとき、点 a で拡大して線分としてみたときの曲線の傾き(これは、曲線の点 a での接線の傾きでもありますね)を「 $f'(a)$ 」と書く訳であります。これを「 **$x = a$ における $f(x)$ の微分係数**」といいます。 $f(x) = px + q$ という1次関数について、 $x = a$ における微分係数は、 a の値に関係無く、 $f'(a) = p$ です。

というのは、 $f(x) = px + q$ のグラフは直線ですから、どこを拡大しても、傾きは p になっていますね。これは a を動かしても、常に $f'(a) = p$ であります。こういう関数のことを定数関数と言った訳ですよ。それで、どんな a でも p になるから、この関数を、「 $f'(x) = p$ 」と書きます。この $f'(x)$ は定数関数ですが、関数であることに違いはなく、「 **$f(x)$ の導関数**」と言います。

これが1次式の微分係数の公式になります。

1 次関数 $f(x) = px + q$ の導関数は、定数関数 $f'(x) = p$ ……①
これを、 $(px + q)' = p$ とも書く。

では、2 次関数はどうでしょうか？ この授業で出てきた 2 次関数は、実質的に一つで、すべての 2 次関数のグラフは、その一つに相似になることを見ましたね。ですから、関数 $f(x) = x^2$ を調べればよかったです。

その 2 次関数 $f(x) = x^2$ のグラフは、「 $x = a$ の周りでグラフの十分小さい範囲を拡大すると、線分とみなせて、その傾きは $2a$ になった」のでしたね。別の言葉では、「このグラフは $x = a$ で接線の傾きは $2a$ になった」のでした。

先ほどの微分係数という言葉で表現すると、

「 $f(x)$ の $x = a$ での微分係数は、 $f'(a) = 2a$ 」

となります。これが、 $x = b$ だったら、 $f'(b) = 2b$ ですし、 $x = c$ だったら、 $f'(c) = 2c$ 、 x が 100 だったら $f'(100) = 200$ となるはずですね。

変数 x の値がどんなに変わっても、微分係数はその x の値の 2 倍になって出てきます。ですから、各点で微分係数を与える対応も一つの関数の形になっていますね。こういうとき、この関数は、「 $f'(x) = 2x$ 」とあらわすのですね。この $f'(x)$ を、2 次関数 $f(x) = x^2$ の導関数といいます。

2 次関数 $f(x) = x^2$ の導関数は、 $f'(x) = 2x$ ……②
これを、 $(x^2)' = 2x$ とも書く。

ここまでは皆さんが学校でやったこととほとんど同じだと思うんです。

さて、足し算した関数の導関数を計算してみましょう。ここで扱う関数は、つねに微分可能ということにします。ですから、これからは「微分可能」とは一々断りません。

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ について、 $x = a$ での微分係数が、それぞれ $f'(a) = p$ 、 $g'(a) = r$ とします。このとき、2 つの関数の和 $f(x) + g(x)$ の $x = a$ のところでの微分係数は、どうなるのでしょうか？ これが足し算の「微分係数」の問題です。

条件から、 $f'(a) = p$ で、これは「点 $x = a$ のところで、 $f(x)$ の微分係数が p 」ですから、 $x = a$ の周りで、 $f(x) \doteq px + q$ です。つまり、傾き p の直線で近似されている訳ですね。これは、「 x の動く範囲を十分小さくしてみると、そこは傾き p の線分とほとんど同じである」という意味です。なお、 $f(x) \doteq px + q$ の q は定数で、これはあまり気にする必要はありません。

同様に、条件から、 $g'(a) = r$ で、これは、「点 $x = a$ のところで、 $g(x)$ の微分係数は r 」ですから、 $x = a$ のまわりで、傾き r の直線で近似されて、 $g(x) \doteq r x + s$ と表されます。この s も定数で、気にしないでください。

ですから、 $x = a$ の十分近くの x で次のように近似できます。

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\doteq (p x + q) + (r x + s) \\ &= (p + r) x + q + s \end{aligned}$$

つまり、 $\{f(x) + g(x)\}$ は $x = a$ のまわりで傾き $(p + r)$ の直線とみなせるのです。ですから、 $\{f(x) + g(x)\}$ の $x = a$ での微分係数は、 $(p + r)$ となります。

$(p + r) = \{f'(a) + g'(a)\}$ ですから、結局、次のことが成り立ちます。

$$\{f(x) + g(x)\} \text{ の } x = a \text{ での微分係数は、} \{f'(a) + g'(a)\}$$

この議論の中で、「 a のまわりで」とは言いましたが、 $x = a$ ということは、何も使っていません。ですから、 x のすべての点で、同じことが言えます。こうして導関数の公式が出てきます。

$$\{f(x) + g(x)\}' = \{f'(x) + g'(x)\} \quad (\text{足し算微分}) \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

つまり、 $\{f(x) + g(x)\}$ の導関数はそれぞれの導関数の和である。

いま関数の足し算をやりましたが、引き算も同じですね。

やはり、 $x = a$ での微分係数が、それぞれ $f'(a) = p$, $g'(a) = r$ とします。

$x = a$ の十分近くの x で次のように近似できます。

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &\doteq (p x + q) - (r x + s) \\ &= (p - r) x + q - s \\ &= (f'(a) - g'(a)) x + q - s \end{aligned}$$

ですから、

$$\{f(x) - g(x)\}' = \{f'(x) - g'(x)\} \quad (\text{引き算微分}) \quad \dots\dots\textcircled{3}'$$

さらに、関数 $f(x)$ を実数 k について、 k 倍したときはどうでしょう。

$$\begin{aligned} k f(x) &\doteq k (p x + q) \\ &= k p x + k q \\ &= k f'(a) x + k q \end{aligned}$$

これから、

$$\{k f(x)\}' = k f'(x) \quad (\text{実数倍の微分}) \quad \dots\dots\textcircled{3}''$$

ここまでは、さっき言ったように、関数を $x = a$ の周りで、一次関数に近似して、その傾きを微分係数とおいたという定義だけで出てきました。

これらの①～③のことを使うと、一般の2次関数の微分も簡単にできますね。

実際、 $f(x) = px^2 + qx + r$ の導関数を求めてみましょう。

$$\begin{aligned}\{f(x)\}' &= (px^2)' + (qx + r)' && \text{(性質③' より)} \\ &= p(x^2)' + (qx + r)' && \text{(性質③' ' より)} \\ &= p(2x) + q && \text{(性質①, ②より)} \\ &= 2px + q\end{aligned}$$

となりますね。

このようにして、一般に2次関数は全て微分が出来るようになります。今の変形はここでは最初ですからいねいにやりました。少しまどろっこしかったでしょう。

さて、ここまでは皆さん「もうわかっていることを、何でやってんだろう？」と思っただけかもしれませんが、これから進む掛け算微分のために、きちんとやっておく必要があったのです。

さあ、ここで、掛け算微分を考えましょう。掛け算微分をやるためにこそ、関数を各点で1次関数に近似したのです。以前、私達が掛け算微分を習った時は「殴ってさする」とか、少し不穏な標語が流行ってたのですが、ここでは、そんな暴力行為は必要ありません。

ここでもやはり、2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ を考えます。そして、 $x=a$ での微分係数が、それぞれ $f'(a) = p$, $g'(a) = r$ とします。「このとき、2つの関数の積 $f(x) \times g(x)$ の $x = a$ のところでの微分係数は、どうなるか？」これが問題です。

条件から、 $x=a$ の周りで $f(x)$ は、傾き p の直線で近似できますから、 $f(x) \doteq px + q$ です。

同様に、 $x = a$ のまわりで、 $g(x)$ は傾き r の直線で近似されて、 $g(x) \doteq rx + s$ と表されます。

そうすると、2つの関数の積は次のように計算されます。

$$\begin{aligned}f(x) \times g(x) &\doteq (px + q) \times (rx + s) \\ &= prx^2 + (ps + rq)x + qs\end{aligned}$$

$f(x) \times g(x)$ は $x = a$ の十分近くのまわりで、2次関数

$$prx^2 + (ps + rq)x + qs$$

とみなせます。ですから、この関数については、 $x = a$ での微分係数は、2次関数の微分係数の計算ができます。

つまり、 $f(x) \times g(x)$ の $x = a$ での微分係数は、この2次関数の導関数に $x = a$ を入れたものになります。この計算はさっきやったばかりですね。

$$2pra + (ps + rq)$$

となります。

この式で $2pra$ の部分は、 $2pra = pra + pra$ として変形できます。

「ところで、この式の p って何でしたか？」

生徒B 「 $f'(a)$ の値です」

ですから、次のように計算が進みます。

$$\begin{aligned} \{f(x) \times g(x)\}' &= pra + ps + pra + rq \\ &= p(ra + s) + r(pa + q) \\ &= f'(a)(ra + s) + g'(a)(pa + q) \quad (f'(a) = p, g'(a) = r \\ &\text{だ!}) \\ &= f'(a)g(a) + g'(a)f(x)(a) \quad (f(a) = pa + q, g(a) = ra \\ &+ s) \end{aligned}$$

この議論で、「 a のまわりで」というような言い方をしていましたが、「 a であることで議論に特別なことがあったか？」と言うと、何もないですね。つまり、この式はどこでも成り立ちます。

こうして、次の掛け算微分の公式が出てきます。

$f(x) \times g(x) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a) \quad (\text{掛け算微分}) \dots\dots ④$
--

掛け算微分は、その導き方が少しわからなくとも、使い方に習熟するほうが、微分の面白さを満喫できるものです。使っていくうちに、きちんと導きたくなれば理想的です。数学の概念の中には、そういうものがいくつかあります。「数学は途中がわからないと、それから先は全部わからない」というのは誤解です。実は、「微分」そのものがそうなんです。最初は、「これは数学とは言えない。誤りと誤りが打ち消しあって正しくなる。」などと、酷評されていたのです。でも、便利なので捨てきれずに、100年後に厳密になったのです。

掛け算微分の応用で、最も有益なのは割り算微分への応用です。

その前に、一番簡単な展開としては、 n 次関数 $f(x) = x^n$ の微分ですね。

これは、 x^2 の導関数が $2x$ だったことをもとに、数学的帰納法で示すことができます。次数をあげるときに、 $x^n = x \times x^{n-1}$ という形にして、掛け算微分を使えばよいのです。後は自分でやっていただければすぐ分かることなので、結果だけを書きます。

$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ 乗の微分}) \dots\dots ⑤$

次に割り算微分をやります。ターゲットとなる関数は、 $\frac{g(x)}{f(x)}$ です。

これをすぐ微分すると言ったって、簡単には出来ないから、これに $f(x)$ を掛けたやつを微分するのです。

$$\left[f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right]' \quad \text{これは何でしょうか?} \quad \text{と言うと, 括弧の中の分母の } f(x)$$

と分子の $f(x)$ が消えて, $g(x)$ の微分になりますから, $\left[f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right]' = g'(x) \dots\dots ⑥$

ですね。

一方, $\left[f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right]'$ は, $\left[f(x) \times \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) \right]'$ とすれば, 掛け算微分の公式がつかえます。

$$\text{つまり, } \left[f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right]' = f'(x) \times \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) + f(x) \times \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' \dots\dots ⑦$$

⑥と⑦は左辺が同じものですから, 右辺も等しくなって,

$$f'(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} + f(x) \times \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' = g'(x)$$

左辺の第2項を移項して,

$$f(x) \times \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' = g'(x) - f'(x) \times \frac{g(x)}{f(x)}$$

両辺を $f(x)$ で割って, 「割り算微分の公式」が得られます。

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' = \frac{g'(x)}{f(x)} - f'(x) \times \frac{g(x)}{(f(x))^2} = \frac{g'(x) \times f(x) - f'(x) \times g(x)}{(f(x))^2}$$

(割り算微分)……⑧

この⑦に $f(x) = x^n$, $g(x) = 1$, を代入すると, $-n$ 乗の微分が出ますが, この公式を使わないで直接出したほうが忘れないでしょう。

定数の導関数が0ですから, $(1)' = 0$ 。よって,

$$0 = (x^n \times x^{-n})' = (x^n)' \times x^{-n} + x^n \times (x^{-n})' = nx^{n-1} \times x^{-n} + x^n \times (x^{-n})'$$

最後の式の第2項を一番左の式(0)に移項して,

$$-x^n \times (x^{-n})' = nx^{n-1} \times x^{-n} \quad \text{両辺を } -x^n \text{ で割ると,}$$

$$(x^{-n})' = -nx^{n-1} \quad (-n \text{ 乗の微分}) \quad \dots\dots ⑧$$

この式は、⑤の式の拡張になっています。

最後に、無理関数の微分です。無理関数というのは、有理関数(整関数/整関数の形の関数)以外をすべて指すべきだと私は考えてます。しかし、高校の学習指導要領では、根号を使って表される関数という狭い定義になっています。ここでは、狭い意味の無理関数です。

そのために、掛け算微分を少し拡大しておきます。

掛け算微分は、繰り返し使えば、掛け合わせる関数が3個でも、4個でも、5個でも同じようになりたつことがわかります。例えば、 $(f \times g \times h)'$ の場合、

$$\begin{aligned}(f \times g \times h)' &= (f \times g)' \times h + f \times g \times (h)' \\ &= (f' \times g + f \times g') \times h + f \times g \times h' = f' \times g \times h + f \times g' \times h + f \times g \times h'\end{aligned}$$

同様にして4個の積では、次の式が成り立ちます。皆さんやっておいてくださいね。

$$(f \times g \times h \times k)' = f' \times g \times h \times k + f \times g' \times h \times k + f \times g \times h' \times k + f \times g \times h \times k'$$

例えば、 $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)'$ の計算はどうすればよいのでしょうか？

これは3乗根だから3回掛けると、 x^2 が出てくる訳です。ですから、この微分すべき式を3つ掛けたものを微分するのです。

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \left(\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x^2}\right)' \\ &= \left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' \times \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x^2}\right] + \left[\sqrt[3]{x^2} \times \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' \times \sqrt[3]{x^2}\right] + \left[\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x^2} \times \left(\sqrt[3]{x^2}\right)'\right] \\ &= 3 \left[\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x^2} \times \left(\sqrt[3]{x^2}\right)'\right] = 3 x^{\frac{4}{3}} \times \left(\sqrt[3]{x^2}\right)'\end{aligned}$$

この式の最初の式は、 $(x^2)' = 2x$ だから、

$$2x = 3 x^{\frac{4}{3}} \times \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' \quad \text{この両辺を } 3 x^{\frac{4}{3}} \text{ で割って、辺を入れ替えると、}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \quad \text{となります。}$$

この式は、 $r = \frac{2}{3}$ とおいたときに、 $(x^r)' = r x^{r-1}$ という式が成り立つという事です。

一般に、次のことが言えます。

$$r \text{ が有理数のときにも, } x^r = rx^{r-1} \quad \text{が成り立つ}$$

数学は、こういうところが面白いのです。無理関数は一見したところ、整関数などとは全く違うものです。計算の仕方も、掛け算微分を使ったというところは同じですけども、ほとんど同じようには見えないやり方です。ところが、結論まで行ってしまおうと、それが同じような結果「 $x^r = rx^{r-1}$ 」に落ち着くのですね。これが数学の美しさと我々は思っています。このように、微分の計算では、掛け算微分を使うと色んなことが出てきます。

皆さんには、ただ話だけ聞いてたって面白くないし、せっかくやったんですから是非この計算の仕方の演習をやってください。

問題 1 : 無理関数の微分,

- (1) 次の関数の導関数を求めなさい。 1. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 2. $g(x) = x^{\frac{3}{4}}$

問題 2 : 分数微分

- (2) 次の関数の導関数を求めなさい。

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

(終わってから、授業中の帰納法の進め方について生徒から質問あり)

4. 授業の検討会

出席者(最初の発言順)

司 会：吉田明史（奈良教育大学）

参加者：一楽（横浜市立大学），熊倉（静岡大学），國宗（静岡大学），横（奈良女子大学附属中等教育学校），福田（Z会），高井（広島大学大学院生），田辺（聖心女子学院），今岡（広島大学），正田（元滋賀大学），梅田（県立静岡商業高校），八田（渋谷教育学園幕張中・高等学校）

授業者：岡部

司会： それじゃあ、まず、授業者の岡部先生の方からコメントをいただきたいと思います。宜しくお願いします。

0： 大変ちょっと皆さんに申し訳ありません。キチンと用意しようと思っていたのが、全然用意が出来なくて、家庭の事情など色んなことがあって、直前まで原稿を書ききれて、実は最後のパワーポイントのところで意外と時間がかかって、書ききれず、手書きになってしまいました。本当はパワーポイントに全部書いて、そのパワーポイントをコピーしてみんなに渡す予定だったのですが、本当に申し訳ありません。

今日やりたかったことは、八田さんが前に微分の講義をしたとき、「計算は出来るけど、微分という概念が何のことか分かんない」と言う生徒がいるという話が出ました。それを受けて、「微分というのは一次関数で近似することなんだ」ということをはっきりさせたかったのです。微分概念を確立することによって、計算なども、ずっと楽になるケースがあります。

たとえば、この次の授業でやるつमりの合成関数微分なんていうのは、もう本当に単なる一次関数の合成ですから、すぐ $\frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$ の形が出てきます。

このやり方は私だけかとも思っていたのですが、偶然見た岡本さん(岡本和夫氏)の放送大学の講義は私と同じ考え方でした。それを観て、「同志がいるんだ」と大変心強く思いました。

このやり方について、前からいろんなところで、「こうやったらどうか?」という話をしてたんですけど、基本的には高校の先生には、まったく受け入れてもらえませんでした。「そんなの厳密ではないんじゃないか?」という言い方をよくされるんです。でも、微分に関して「厳密」なんていうのは、「ちゃんちゃらおかしい」というのが私の気持ちの中にあります。たとえば、「 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 」ということについても、教科書に書いてある証明は、真っ赤な嘘です。そもそも微分の厳密な証明は、実数の定義をキッチリしたうえで、 $\epsilon - \delta$ 論法を使わない限り、出来ないのです。ですから、「ある程度、感覚的に分かるということの方がむしろこの段階では重要ではないか

な？」というのが私の考え方です。このことを岡本に言ったら、岡本は、「いや、あの方法こそ厳密に出来るんだ」と一蹴されてしまいました。

このことに関してお話しするのが今日の狙いです。

この授業の前の回では、受講の生徒と親しくなるために、奈良教育大学で講演したのと同じ、「裏返しパズル」というのを最初に取り組みました。その中で「対称の中心」の概念を出して、「それと積分的な思考法を使うと、対の体積は底面積×高さ×(1/3)ということが出てくるんだ」という、流れで授業を行いました。その時に、積分の区分求積法に近い概念、つまり、棒グラフでの近似値が重要な役割を果たしました。

今回は、微分の第1回目です。でも受講の生徒は、高校2年生ですが、中高一貫ですから、微分の基本は、やっているようですね。でも、掛け算微分、それから割り算微分とか、 \sqrt{x} や $\sqrt[3]{x}$ の微分などはまだやっていないと聞きました。

私自身、教科書の著者でもあるのですが、その記述にはずっと不満があって、「 \sqrt{x} や $\sqrt[3]{x}$ の微分を掛け算微分でやると楽なのに、何でやらないのかな？」と思っていたところでもあるんです。教科書のスタイルはなかなか直せないんですよ。教科書会社は営利企業ですが、新しいことを書くと、高校の先生に拒否反応があるのですね。

司会： ありがとうございます。それじゃあ、まず、今日の授業についてご質問ありましたら、ご自由に。

A₁： 講義の中で「放物線がすべて相似ということ」が出ましたよね。あれの位置づけがちょっと良く分からなかったんだけど、面白い話だとは思ったんですけど、「あの流れの中で、何で相似がいるのか？」というのがちょっとわかりにくかったように思う。

O： 全体の流れの中であんまり関係ないかもしれないですね。言いたかったのは、「 x^2 の微分が分かれば、すべての2次関数もわかる」ということです。

A₁： うん、それは分かるんだけど。

O： 二次関数はほとんど分かるんだということをまず押さえておきたかっただけなんです。でも、実数倍ということは後でやりますから、実際にはこの事実は使わないんですけどね。

A₁： そうですね。

O： ただ、あそこで書いたちょっと帰り際に何人かの女の子には声を掛けたのですが、あそこにあるグラフを、例えば $y = 3x^2$ のグラフに接線を引いてみると、やっぱり同じことが成り立つということが分かって、それで微分係数が x^2 の3倍になっているのと同じ形になることを、そこで見る事が出来ると思うんですけどね。流れの中では余計だったかもしれないですけど、…。

A： 余計というよりは、そこでちょっと何か分かりにくくなっています。その進む方向がね。

O あ、分かりにくくなっていますか!? でも、「生徒は操作活動をやって印象を強める」という面もありますから。

操作を入れたくて焦った点があります。申し訳ありません。

A₂: あれをシートで重ねるのを見せていただいたのは大変有り難かった。いつも中3とか、高1の時の二次関数の時に、あの話はするんですね。式の変形は出来ますから、それにあのような操作を入れれば、もう本当に良く分かってくれると思います。

今日は本論が別のところにある中でこの操作をやりましたから、今出て来る時にも、「先生、相似っていうのは分かってない、私達」とかって言ってる人達がかかり居ました。

だから良い話題なので、もっとあれだけに焦点を当てて、別の機会にあっても良いのではないかなと思います。

A₃: 拡大するところの話が抜けてるから。

A₂: そう、そう。拡大をさせておいて重ねる。

拡大するところを良く見せておいて、拡大して、重なるねと。拡大しながら、相似だからねと、それが2つ無いと、あれが1つになるから、1つは、重ねるものと、先に拡大させといて、重ねると。

O: 実は、それだけの時間が今日は無かった。その意味でも余計だったかもしれません。

司会: いや、いや。やっぱり x^2 だけでけりを付けておけば、他も想像がつくって言う、やっぱりそこが伝わってきましたね。もう質問と意見が一緒になりそうなので、併せてご自由に。

A₄: 接線は子ども達はどうやって引いたのですか? 「接線を引いてごらんさない」と言ったでしょ。あれはどうやって引いたのですか?

O: ものさしで実際に(試行錯誤で)接線を引くんです。だから、今日使おうと思って、大学で大きいものさしと大きい図を作っておいて、それで実際、引くところも見せようと思ったんです。ところが、一緒に置いといたら、それを一緒に忘れてきちゃったんです。それで、ここに着いた途端、パニックに陥って、…。

接線を引くというのは、基本的にはものさしをあてて、平行移動で少しずつずらして、1点で共有点を持つところをさがすということなんですけどね。

A₅: グラフにもものさしを重ねて、 (a, a^2) での接線のy切片を $-a^2$ と読み取らせたいんですが、この重ね具合によって、y軸の値がうまく読み取れなかった場合はどうされるつもりだったんですか?

A₆: あそこが命だもんね。あそこさえうまくきまれば、全部うまくいく。

A₅: つまり、 $y = -a^2$ で交わっていると、答えてくれたんですけども、この接線をいい加減に引いたら、何かちょっと違ってるよとか、そういう時はどうするのですか?

か？

O： それはどうでしょうね。

A₇： それは、微分の普通の極限の定義を全然やらないというところに意味を持たせてるのかどうかだと思うんです。

O： そうです。極限でやってもいいんだったら、確かめれば良い訳ですよ、別に二次式だから、すぐに出来るので。それは両方あって良いんじゃないかと私は思うんです。

A₈： 後で式でちゃんと確かめないといけない。

O： いや、式で確かめる時には、極限を使わない方法で確かめればいい。

A₉： うん、あの二次関数と直線の接する条件、つまり二次方程式の判別式を使うのですね。

O： そうなんです。私の心の中にはリミットの文字を絶対使わないっていうポリシーを持っています。

その理由は、経済学部で授業をやっていると、リミットというその言葉を聞いただけで、不得意な学生は下を向くということがわかっているのです。でも、数学には、計算や証明の過程はともかくとして、結論がすごく面白いということがよくあるんですね。そこで下を向かれたらもったいないなという気持ちがあって、リミットの文字は絶対使わないぞと決めて、そういうやりかたを使うようになったんですけどね。

でも本当は、あの生徒達は、リミットを使った計算はもう既にやってるんですよ。だから、それは適当に織り交ぜるべきかもしれないですけどね。

A₁₀： そうじゃないと、さっき、 y 切片が $-a^2$ になるということは読み取っただけで、その根拠は経験でしか無い訳ですよ。

それが何故成り立つか？ということは出て来ようがない訳だよ。出て来るのかな？

O： $y = x^2$ の接線については出てきますよ。二次関数だもん。判別式を使えませうからね。

だから、実はこのレジュメを書きながら、今の数学のカリキュラムが、数Iに二次関数が出て来るところは良く出来てると、つくづく思いました。

A₁₁： だから、具体的にものさしを当てて、「どうも接線の y 切片が $-a^2$ になりそうだな」というところが子ども見つけますよね。「それで良いのかな？」という問い返しがあると面白かったと思うんですけど、先生が証明してしまいましたよね。

O： ああ、それはまずかったかもしれないね。

A₁₂： いや、いや、そこが子どもにとって結構大事なところですね。具体的にやったことで、飛ばしちゃいけないということを、子ども自身が気づくと、ああ、やっぱりこの判別式というのは役に立ってるんだなと、感じてくれると思います。

A₁₀： 判別式で確認すれば良かったんだね。

A₁₃： そう、そう。そうですね。だから、そこはポイントになるようなところだっ

たという気がしています。

ああいう活動というのは高校では実際にあんまりやらないんですよ。だから、そういう意味ではとても意味のある、面白い方法だなというのがわかります。

あそこは具体的に確かめれば次にいっても良いんですよ。「先生、おかしいんじゃないの？」っていうのが出て来ればしめたもんなんだけど。

A₁₄: 接線を引く作業を具体的にしますね。引いたとき、これがいけない、これが良いっていうのがね、定義でもなかなか難しいんだよな。

O: そうですね。

A₁₄: 「ものさしを少しずつ下げていって」ということでいくんだけど、放物線の場合どうかな？二つが一つになるというところが。

O: だから、その前に、曲線を細かく分けてやると、それが実は接線なんだという話が前振りであるつもりだったんですけどね。

A₁₄ だけども株の話じゃ、ちょっと難しいかも。経済学部だからあなるかもしれないけど。

O: 要するに、数学活用という考えがもう一つ頭の隅にあって、何かそれで役に立つという話も少し入れておきたかったということです。でも、株っていうのはちょっと良くなかったかも。

A₁₅: 株は分からないと思う。

O: 分からないか。

その他数名: 分からない。

A₁₆: 極大値のところで売って、極小値のところで買うんだよと、それが出来れば言うこと無いなどは思うんだけどね。それは難しい。そんなこと出来っこ無いですよ。

O: 役に立たないです、やっぱり。

(授業者注:ただ、数学では役立ちそうで、実際には役立たないことが多いのです。でも、役立ちそうだと思って学ぶことは大変重要だと思います。それが新しい技術の芽につながることも多いからです)

A₁₇: 別の観点でいいですか？

微分は一次関数に近似されるという、その考え方は結構伝わってきたなというのは感じました。それを元にして、足し算の微分はなるほど、結構分かりやすく伝わってきました。

でも、掛け算の微分を説明するといった時に、実は掛けて、又それを二次関数として、微分してますよね。近似した式を微分して、そこに a を代入してというあたりは、やっぱり簡単なように見えているけど、そこそやっぱり論理的な進み方をしてるんですね。

O: はい。本当のことを言うと、掛け算微分を示す論理展開は難しいんですよ。

A₁₇: その時、まず最初近似していますよね。($f(x) \times g(x) \doteq p r x^2 + \dots$) というように近似してるじゃないですか。

近似した関数の微分をしている訳ですが、出したものは近似なんですね。

O: そうです。

A₁₇: 本来は、近似式が出てきているはずなんですよ。その近似式を本当の掛けた式のようにして、それを微分してさらに近似するところに今も少し引っかかります。

O: 本当の掛けた式じゃなく近似なんです、ずっと。ずっと近似で進んで行って、最後に一次関数に近似出来るよという話しかしてないんですよ。

出てきたものが一次関数だったら、そのまま微分係数が出てくるのですが、掛け算微分では、近似した1次関数を2つ掛けると一回2次関数になってしまう。その1次近似を出すために、また微分しているのです。掛け算微分のために、2次関数の微分は先にやっておいたのです。

A₁₇: そのところがちょっと苦しいかなという感じです。

O: 解析の人から見ると、「何やってるんだ、こいつは？」って思うかもしれないですね。

A₁₇: だから子どもは今何をもとにして考えてるか？という、その認識が各段階でどれだけあったかという心配はありましたね。

やっぱり今の話もそうですけど、初めは一次式で近似したものを、今度は積になって、段々世界が広がっていくんですけどね。最後に積や商の微分の公式が出てきたということは分かったんですけど、今どれをもとにして考えているかという振り返りが、本当は子どもにどう伝わっていたか？ということですね。そこは少し迷いがあったようです。そこを厳密に言うのは難しいですね。

O: そこは、突き詰めないことにするというのが私の考え方でもあるわけです。だから、あの段階で、 a の周りで $f(x)$ はその一次式、 $g(x)$ はこの一次式って、みなしておく。そうすると、「 a の周りでは、 $f(x) \times g(x)$ は、2つの1次式を掛け合わせたものだ」とみなせるのです。そう思えることが大事なんです。

それはそこに誤魔化しがあるんですけども、最初にも言ったように、厳密にやることは最初から考えていません。わかるということと厳密に証明することは違うと割り

切って進めています。教科書の「 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 」も同じ議論でやっています。あれ

は考えたらすぐ分かるんですけど、数学者でも誤魔化されて厳密だと思っている人もいるようです。

A₁₈: 近似式というのはこのごろの教科書にはあんまり無いような気がするんですけど、近似はあっても近似式というのは無いような気がします。

O: 無いよね。

A₁₉: 生徒は分かったんですかね？ 数の近似は分かるけど、式の近似は…。

A₂₀: 近似式は無いんですよ。あれは入れた方が良くと思うんだけど、…。

O: そうですね。入れて欲しいです。このような展開をするためにも。

A₂₁: 微分はローカルにというのは割と普通の捉え方だと思うんですけど、そこをグローバルにして一次式でやるということは、そうすることによって積の公式が出て来るというところは多分面白いところだろうと思うんです。ただやっぱり微分は比例で近似するという、だからリニアで、一次式じゃなくて、それが普通で僕なんかもずっとそれでやってきたんです。そこのところはどっちが良いのかな？というの、やっぱり確かにある。積の時には、一次式でやるとうまくいくんですけど。

O: 積のところだって、あれは $x = a$ の周りである一次式というだけで、グローバルじゃないですから。「 $x = a$ の周りではほぼこのような式だ」というだけです。

A₂₁: いや、グローバルというのじゃない、そうじゃなくて、座標変換して、比例関係としてみなしちゃうのが割と普通の微分の捉え方だと言ってるんです。それを一次式でやるということを、グローバルという言葉がいけなければ言わなくても良いんだけど、一次式で、要するに $y = a x + b$ で b をつけるでしょ!? その意味。微分を普通に考える時には、その b はつけないで考えてる訳ですよ。それは b をつけると良いことは確かに積の公式の時にはさっきのようなやり方が出来る。あれは b をつけないと、…。

O: つけないと駄目です。

A₂₁: 出来ないから、だからそこは良いとこなんだけど、全体のバランスの中でどっちが良いかというのは、僕は問題がやっぱり、どっちってすぐには決められないんじゃないかなあと思います。

O: 僕は、比例式の比例定数だという捉え方でいくのには、難しいんじゃないかなと思います。最初のうちは、定数項って本当に邪魔なんですよ。文字がいっぱい出てきて嫌なんだけど、それを入れておいた方が子ども達にはむしろ分かるんじゃないかな？という気が僕はしてたんですけどね。 $x = a$ の時は一致してその a の周りではすごくそれに近いという、そういう式なんですよ。

A₂₂: 何となく聞いていたら、 a の周りに非常に限定して狭い範囲になるでしょ。狭い範囲で考えてるところが、何故 a を x に変えて、一般にそれをするのかというところは、どうして分かるようになったか？

A₂₃: 狭い範囲で近傍で考えたね。近傍で考えたことが a が一般化されて全ての x になるわけね。そこのところは掴めたかな、どうかな？そうでないと話とはにかく狭い範囲の話で…。

O: 微分というのはとにかくローカルな計算で、それがどんな a を入れても同じ計算になるからという言い方を僕はしたんです。だけど、だからそこのところはちょっと分かりづらいところではあるんだ、確かに。

A₂₄: それで結局、一番伝えたいことは、「微分は細かく分けて考えるんだよ」と、「そうすることで導関数が決定したんだ、あるいは、決定させたいんだ」というところだよな。

O: 私は、そう思っていました。

A₂₄: 「細かく分けて考えれば良いんだよ」と。

O: はい。

A₂₄: そうなると、「細かく分けると、どうなるのかな？」って、「一次関数だけやれば良いのか」という話になるね。

O: ローカリーに考える時は、一次関数でだいたい分かる。

A₂₄: 「置き換えれば良いんだよ」と。その置き換えたやつが何で全体に広げられるのか？というところは心配なくなる。

「aはxになるよ」と言ったら、多分、aとxはこんがらがるとはならないかな。aとして考えているところと、そのaをxに変えるというのがね、あれは分かりやすいようで分かりにくい。

O: いや、我々の仲間でも間違ってる人がいるぐらいだから、それを子ども達が間違おうであろうことぐらいは、大体、私の計算のうちに入っていました。だから最終的には、証明が終わったら、証明は忘れて良いというのが最後の切り札で。動機は説明したんだけど。

A₂₅: 導関数を出す必要はあったんだっけ？

O: え？

A₂₅: 微分係数だけじゃ駄目だったんだっけ？ aはxにしなきゃいけないかったんだっけ？

O: いや、関数の公式で、 $x^{1/n}$ の導関数の公式とかああいうのを導きたかったから、導関数は出したかったのです。

A₂₅: 関数でやりたかったんだよな。だから、aの周りの話と、関数の話がどう整理されとるだろうかなあ？と思う。

O: 大学で理学部の数学科相手でも $\epsilon - \delta$ というのは、かなり理解出来ない。ですから、私は、そのあたりもなかなか理解されにくいだろうと、最初から想定していました。

ただ、「微分というのは細かく分けることでうまくいく。その説明はされた」ということと、それから「掛け算微分の公式を出しておくとか色んなことに使えるんだ」と、そこが僕は本当は一番今日は訴えたかったことです。

その掛け算微分のところは何度も皆さん指摘されたように、確かにちょっと難しいんですね。近似式を関数とみなしちゃってというところもあります。あそこのところは、時間があつたら、一次関数と一次関数の掛け算はどうなるかな？という話を持ってくるつもりだったんだけど、時計を見たらあんまり時間が無いことが分かって、急

にその分、飛ばしちゃったんですけどね。だから、掛け算微分については、「 $f'(a) = p$ で、 $g'(a) = q$ なら、 $\{f(x) \times g(x)\}_{x=a} = p \times q$ になりそうだから、ちょっとやってみよう！（実は違う！）」という話を持っていく予定だったんだけど、たっぷり90分あるから大丈夫だと思ったら、全然駄目でした。

A₂₆: $(x^n)' = n x^{n-1}$ を掛け算微分という新しい発想でおやりになりましたね。あれは結局どうやるのですか？

O: そこは後で後悔したところなんです。

x^2 から、 x^3 をやって、それを用いて、 x^4 ぐらいまでやって、「同じようにどんどんやっていけるね」というやり方をすべきだったなと反省しています。すいません、それは。

A₂₆: やっぱり時間短縮なさってましたね。

O: いや、時間短縮というよりも、何となくみんなが観てくれてるから、良い格好しようと思って、…。どうもすいません。

A₂₇: プリントにはちゃんと書いてあります。でも、掛け算微分でもう一回見直したら、そうなる。なるほどと思うので、非常に面白いなと思いました。

宿題出されましたよね、最後に4つかな!?あれは当初からお考えになったのですか？

O: いや、その場で。すいません。いい加減で。

A₂₈: あと、もう一回授業がありますよね。何か終わった段階で、今日の授業だと、微分とは何かというところを掴ませたいということだったので、最後の授業の時に何か書かせていただくと有り難い。

O: はい。結果的に、今日のだと「計算が出来れば良い」という結論になりますね。あの宿題だけはね。だから是非最後の授業の時に、そういう確かめを、子どもの確かめをしたいなと思います。よろしく願いいたします。

A₂₉: 今日観たかったのはね、私が高校で授業をする時というのじゃなくて、大学の先生が高校で授業をするのは、どこが違うのかな?って観たかったんです。だから、先生がこの高校で授業をするようになった時に、「どこに気を遣う」とか、「ここはこういうふうに変えなきゃあかん」とか、「こうしないと分からないだろうな」とか、そういう気を遣ったところを教えて欲しい。

O: 僕は、今回の授業は、そういう要望に応えることはできないと思います。今回の授業に関しては、ある試みをとにかく入れたいということで始まりましたので。

「一次関数に近似」ということで微分を高校で導入するとなったらどうなるか?ということが最大の目的だったんですね。それで「細かく分けるという考え方で進める方が、生徒にわかるんじゃないかな?」と思ったので、その方法でやりました。一般の授業だと、やっぱり高校の先生と同じことを考えざるを得ないんじゃないかなと思

います。今日は、ほとんど演習が無かったですよね。普通にやるとしたら、合間、合間に、「この問題ちょっとやっごらん」とかっていう形はやっぱり含まなくちゃいけないだろうと、その方が分かりが良かったと思うんです。そういう点では、準備もあんまり良くなって、大変反省しております。今、A₂₇の方に指摘されましたが、問題もその場で考えついたのを書いちゃったのです。

A₂₇: いや、いや、予定されていた問題だと、その狙いをお聞きしたいなと思っただけで。

その微分概念がどうすれば分かるかという、教科書の一つの流れとは別に、岡部先生が新しい提案というのでやっているのかな？と私自身は捉えました。

O: だから最後の問題は、いわゆる公式でやるんじゃなくて、掛け算微分を実際使ってみてもらいたいなと思って出したのです。

A₂₇: なるほどね。

A₃₀: 微分をやる時に、言葉が微分係数と、概念かもしれないけど、微分係数と導関数と微分と3種類あるのもやっぱり、そこを押さえておいた方が良いのかなと思う。

A₃₁: 「微分というのは一次関数で近似するんだ」と、同時に、僕は数学の授業としては両方やっぱり必要だとは思いますが、極限概念もきちんと押さえたい。それが出来なきゃいけないっていう訳じゃないけど、…。

それから極限概念がそのままイコール $\varepsilon - \delta$ じゃないと思うんですよ。ただ近づけるというので良いと思うんだけど、こっちの方をやらなきゃいけないと思うけど、やっぱり確かに微分の意味というのをきちんと話すということは、高校の段階であんまり無いんじゃないかと思うんだね。やっぱりちゃんとやっておくと、多変数でも同じですし、同じに捉えるから、やっぱりそこはやっぱり両方あって良いとは思いますがね。

それと、あれは前からちょっと気になってるんだけど、その拡大すると直線になるよ！というのが分かりやすいのかどうか？

気になってるんだけど、少なくとも今の岡部さんの話だと、別にそれは仮に無いなら無くたって近似というところをきちんと言いさえすれば、それで良いのかなとは思いますが、…。でも知っちゃうと、今度は「近似っていうのは何？」ということになるんじゃないの？

どっちにしてもちょっと難しいのかなと思う。

A₃₀: だから今の中学、高校での指導というのはね、最初その二次関数のグラフを直線で結ぶ訳よ。折れ線だな。それを一生懸命直線にしちゃう訳だな。だから、直線で結ぶこと、直線に置き換えて近似することが、非常にやりづらくなるような、やっかいけんような、とらわれてる訳だな。だから、それを今度はaがxになる時どうなるの？という時、イメージとしては折れ線グラフになっちゃう訳でしょ!?

あの近似の仕方はね。折れ線グラフのような形で近似する範囲が非常に曖昧なんですよ。どれだけ狭いものなのか、大きいのね。

だから、その目的によって $\varepsilon - \delta$ のような話になるかもしれないが、微分の目的からして考えて狭い範囲を積み上げていけば良いんだよという話は、だから今の関数のグラフで一次から二次、三次といった場合に、今の中高での流れからすると、「折れ線にしちゃいけないんだよ、いけないんだよ」とずっと言ってるんだよな。だから、なかなか直線の近似式というのは嫌がられる訳ね。最終的に近似で考えたら良い訳だし、だからある範囲は直線で置き換えて考えるんだよという考えが。

でも、そうすると、微分全体というのが微分係数になるのかな？とも思う訳ね。あの狭い範囲での微分係数を考えていけばいいし、株の話なんてのは正にそれだけで必要ない。株全体というのはどうせ分からないんだから、形態が微分系では考えやすいのかなというのを思いましたけどね。

また、中3・中3あたりの生徒はすぐにグラフを折れ線にするんですよ。それを一生懸命、一生懸命先生が修正していったのが、それが僕には分からない。だから、最初に学校の先生が「細かく考えれば良い」と分かれば良いんですけどね。

だからどうしてもやっぱり大学の先生がやると、それがある程度オールマイティーだよと言うようになるから、話がちょっと多すぎたのかなとは思うんだけど。

それで、ああいう展開は、やっぱり中学・高校の先生から嫌われますよね。それから二次関数の相似なんて話題にしたところで、かなり嫌われるのは相似を考えるのは閉じた図形だ。「あんな訳の分からんのを考えてどうなる？」という反発がかなりあるんだよな。

昔は相似だということは、書いてますかね？書いてないですね。

O： 書いてあるの見たこと無いですね。ネットで検索をかけても全然引っ掛からないですね。

A₃₀： 引っ掛からないね。

グラフみたいなのところにあたるのかな？

A₃₂： 二次関数の、中学の時、時々書いてあります。書いてある教科書も見たことがあります。

但しコラムに。本文には書いてないですよ。

A₃₀： 効率的には組まれてたんですけど、その近似という言葉の使い方と、接線というところの使い方が何か混在していたようなところがちょっとあって、何か接線をちょっと考えさせたり、拡大したい時の、そのところをうまくやるのがテクニックだと思っただけ。

O： だから、途中で接線の傾きイコール線分の傾きというところで、一応はそこでけりは付けたつもりで、…。

A₃₀： そう、そう、そう。だから、やったんだけど、実際の中ではあまり接線とい

う言葉が出て来るところは無かったですよね。

O： 二次関数のところだけですよね、接線ということ強調したのは。

A₃₀： 先生が伸ばして元に戻すと接線になるとおっしゃったし、三次関数的な曲線で、交わらせたところで、一回外に取り出して、それが今度接するとおっしゃったんですけど、あそこらへんは「子どもが分かってるのかな？」とか思いながら見てたんですけど。子ども達は、交わる時は交わると思ってるから、接するとは全然思っていないですね。

三次関数的曲線の接線は、特に子ども達は交わったという意識は全く無くて、二次関数は必ず「2個が1個になったから1点で交わる」だし、円と直線も「2個が1個で交わる」っていうあの「接する」という表現がずっと中学校から来てるので、なかなかあの三次関数のあそこの接線というのは理解しにくいところなんです。

円の接線は結局遠いところで交わる方が考えられるね。あるところで考えるから2点で考えるという、だから $x = a$ の周りで考えるということは非常に大事なんだけど、あれが何故直線上の2点をとったこの線ではいけないので、 a のところでは接線にならなきゃならないのか？というところを、もうちょっと分かたら良いなあと思った。

だから、本当に言ったら、一次関数なんて2点取って線に引ける訳だから。それじゃあ駄目なんで、1点を取って、その周りが接線だよというところが、そのそういう接線をたくさん集めていったらどうなるの？というイメージが全然わからないよね。

だから、それはその a は一般化出来るんだということが出来れば、 a から x に変わる時にね。 a の周りというので、だから三次関数、四次関数は、遠いところは良いんだ。周りで考える。だからあれは非常に大事なんだけど、あれが、岡部さんは株か何か話で分からせるつもりだった？

O： いや、いや、株の話はまた違います。

株のところは極値の話です。接線じゃなくて。

A₃₀： 結局、極値の話をする時の、狭い範囲で考えるというのが極大値、極小値。そこにつなげて、そういうのを分からせたかったのかな？と思ったんだ。最大・最小じゃないからね。

極大・極小というのは狭い範囲で言ってるから。狭い範囲で考えて、接線を考えてというのが、とりあえず今日の話だったのかなと思ったけど、それでずっと行って、そのフェルマーの話とかが出てきた時に、やっぱり狭い範囲で考えるんだよという、あれはやっぱりあの狭い範囲で考えるんだという思想を貫けば、狭い範囲で考えて、接線を置き換えるんだよという考え方が大事だと思うね。しかし、その狭い範囲ではどこまでかが分からないんだよ。我々も分からない。

そりゃ生徒も分からない。そうすると、その狭い範囲がバーッと x で広がっていくんでしょ!?そこが何となく分からなくて、大事だけど、・・・言っても説明出来んわね。

O： なかなか難しいですよね。

A₃₂: 僕が思うけど、一番最初の接線を引くところがポイントで、普通だったら点を取って、接線の判別式を出しますよと。それで確かに接っているということで接線を求めますけど、今日はこのグラフで「ものさしがある人は線を引いてごらん！」ということから発問が始まりましてね、そこがそういう展開で具体化からより微分係数に定式化するのが良いのか、初めからもう点を取って、接点を決めて、接線を求めて、傾きをもう一度振り返ってるんですよ？

O: はい。

A₃₂: だから、具体的にやって、式に出して、傾きを表して、そしてそれを・・・とやってるんですけど、その最初の接線を引く時には、非常に今の話じゃないけど、あいまいにやっている訳ですよ。

そこがずっと接線というのが曖昧なままでいくのではないかとこの心配はありました。接線って一体何だったんだろう？ということは感覚的には引きましたが、今のところ。確かに判別式で確かめたら良いんですけどね。一番最初のきっかけは、適当に線を引いたでしょ。それは三次関数で同じように接線を引けるのか？とかね。

A₃₃: よくあのとき答えた生徒、 $-a^2$ って言いましたよね。

O: あれはさくらじゃないですよ。

A₃₄: 習ってるんですよ？ x^2 の微分は $2x$ だということは習ってて、あの傾きは $2a$ になるっていうことは、多分既に知ってるから、ということも考えられると思うんですけど。

傾きを知ってるから出てきたんだ。

O: ただ傾きを知ってても y 切片をそこから出すというのは結構面倒な計算ですよ。

A₃₃: まあ、そうですね。

A₃₄: あれ、あの子は僕は本当にあれで引いて見つけたんじゃないかと思うんですけど。ただ、あの問自体が漠然してて、発見したって大した発見じゃないかもしれないし、それがよく分かったかどうかちょっと疑問だったんですけど、あれはあの子は引いて見つけてくれたと思います。

A₃₅: そうですね。

でもさっき見ましたけど、実践的には私は面白いと思う。あれで自分で、「あ、最小になってる」って発見する確かめになりましたね。

本当かな？って確かめて、判別式で確かめられて、「なるほどな」となるし、自分でも良いと思うんですけど。

A₃₆: だけど、接線という概念は無いんじゃない？

A₃₇: もちろんそうですね。ただ、先程のA₃₀の先生の話ともちよっと関連するんですけど、結局微分という概念を考える時に、今日の中のポイントはやっぱり一次関数概念なんですけど、近似っていうもの、つまりローカルに近似するという部分と、接

線という目に見える接線の傾きということで微分を捉えるのと、どちらが子どもにや
っぱり分かりやすいかというのは、これは簡単にはちょっと言えないなというよう
な感じですね。ローカルに見て、これを一次関数と見ようという、この式になると、接
線という、これは固定して、厳然に目に見えるものとして傾きを考えるということ。

それは、岡部さんの話の中で、まずは傾きだと。その次に、2次関数にフェルマー
のやり方を見ながら、接線の傾きをやる。だから接線の傾きにはずっと集約されてい
くという、話の目はつけてるんだよね。

O： それはそうです。だから細かく分けて、それは線分の傾きであって、それは実
はその接線の傾きになるんだということです。だから拡大してまた元へ戻すという
操作で一応はやったつもりなんです。ちょっとそのところが弱かったかもしれない
ですね、言われてみれば。

A₃₈： 僕は、自分は接線ってどう引いたかと言うと、いい加減に引いちゃうとね、
又岡部先生に「又、お前、いい加減なことを」って怒られると思って、どうしたか
と言うと。

aにおける接線を両方、 $a-h$ から $a+h$ の区間を取って接線を引くか。区間の傾
きを求めると、必ず接線と同じ傾きになるでしょ!?二次関数の場合はね。それを使っ
て僕は間違わないように、両側を外して、そっちの点でずらして線を引いて、接線
を引こうなんて思ってたぐらい。接線を引けって言われてるんだから。見て引くんでし
ょ!?

O： 最初にはね。

A₃₈： 自分はどうやって引くか。それを使って引こうと思いましたよ。それでちゃ
んと交わるか?交わる!交わる!確実に交わる。接線を引くという活動自体が、何か
緩やかにしているようで、このちゃんとそこを通ってるかどうか?接線になってるか
どうか?ということが何の確認も出来ないというところが、知りたいところなんです
ね?

一番言いたかったんです。最初のところが接線引いたらそこしかないよね。

O： それが数学の先生の発想なんです。接線をきちんと引かなきゃっていうのは、
…。接線というのはもういい加減に引いて、「あ、これはどうも接線だ」とかっ
て、そういう感じで良いんです。

今日の授業はそのつもりで言ってたんです。

「 $-a^2$ が出て来るためには厳密に引かなきゃいけない。」「 $-a^2$ の関係を読み取
らなくちゃならない。」とか考えたらえらいことですよ。

だから「大体出て来るでしょ」で良いのです。だって。大体出て来れば良いじゃな
い。大体というのは、「それほどあらぬ方向にはいかないようにする。」という意味で
す。

A₃₉： 「y切片が $-a^2$ になる」これをちゃんとしないと、 $(2a^2)/a$ が出てこない

から。あそこはもう命だな。一番大事なやつ。

A₄₀： 普通の授業を片一方でやっているというのが前提だとあれで良いのかなあと
思うけど、今のままで、こういう授業だけだったら、接線について生徒は漠然とした
ままに終わっちゃうのじゃないのかな？ だからこの授業ではそれで良いんだって言
うんだったらそれで良い。それで良いということは逆に言うと、それで終わってしま
うという意味。やっぱり普通の授業のリミットでの定義も両方やっておいて良いんじ
ゃないかというのは僕は思うんだけど。ただ、今迄はリミットの定義でただ意味も何
も分からずに、これが定義だって数学だけやってるのは困るという。それはその通り
だと思うのね。

O： 実は、経済学部でやってる授業は、そんな操作活動はもちろんやってないから、
もう歴史の話にいつちゃって、フェルマーの話から、「接線を引いてみると、こういう
ことが分かりました。」そこから入っていくんですよ、本当はね。

だから操作的活動は、みんなの目を意識して、やったところがあります。実は経済
の学生なんか授業をする時は、半期で偏微分の Hessian や条件付極値問題までやる
訳だから、それを考えると、操作活動はできないが、直感的に本質に迫らざるを得な
いのです。だから、それでも結構リミットを使うよりはるかに抵抗は少ないですよ。

司会： 何か一言ありましたら。

A₄₁： 実は私、専門は物理なので、数学ではないんですけど、最初に 2 次関数のグ
ラフの相似の話をやったじゃないですか。あれは結構無限の概念とかと関わりが分か
ってないと分かりにくいのか？だから、3倍すると、無限も3倍になるみたいな、そ
ういうイメージをもっちゃうと、相似式では分かりにくいのではないかと。講義の中
で化学の先生が相似がわかっていないとおっしゃってたのは、「もしかしたらその辺り
は無限の概念みたいなのが、ピンときてないから分かってないのかな？」と思いま
した。「 $3x^2$ のグラフが細いじゃないか」という反応だったから。

確かにそう見えますけど、でも無限まで伸びてるじゃないですか。その意味も掴
めてないと、やっぱり相似式も掴めてないのかな？と思いますけど、そんなことはな
いですかね？

O： その人はそんなことなかったですけど、ただぼけてるかもしれないです。だから
一般にはあんまり相似ということが教えられていないこともあります。それは閉じた
図形でないと相似を定義していないということなのかもしれないですね。今の無限の
話に関しては。

A₄₂： 相似の中心を求めるとか、そういうことすらあんまりやってないんじゃない
ですか？ 中学校のカリキュラムで途中から三角形以外関係なくなりますしね。本当
は多角形の相似をもっとやったって良いんだけど、

A₄₃： あそこで「相似の中心」がね、生徒は分かってない感じですね。

A₄₄ : そうだね。でもここは中心を明確にして合わしといた方がいい。

A₄₅ : 相似の中心はここじゃないんじゃないですか？ここですか？

O : 原点です。

A₄₅ : え!?やっぱり原点？

A₄₆ : なかなか合わない。

原点合わしたけど、相似の中心って、そこで拡大すればそういうふうになるんですね？

そうですね。

O : それはここで直線を引いて・・・

A₄₇ : それはお見それいたしました。

A₄₈ : 中心を押さえてないから、生徒は分からなかったのかな。

実際はこうやって重ねてるから、ここが中心だから良かったんだけど。こうなっちゃうと・・・

軸を合わせてとかって、またそういう話をやないと、無理だったかもね。

A₄₉ : あげあしとりみたいに細かい点を言うと、 $f(x) = px + q$ で、 q は定数って先生言っておられたけど、何で q だけ条件を言うのかな？

O : p は出てきてるんですよ、 $f'(a) = p$ として出てきてるから、後は q だけですよ、定数って言わなきゃいけないのは。

A₄₉ : なるほど。前に言ってあるのね。

O : でも、 q は本当はあんまり関係ないのね、途中まで。

A₅₀ : なるほど。後、あげあしとりじゃないけど、二次曲線って言っちゃまずいんじゃないですかね？二次関数ですよ。

O : ああ、そうですね、それは、「二次関数のグラフの曲線」というべきでしたね。なにせ、素人の授業だから。

司会 : どうですか、発言なさってない方？

A₅₁ : ちょっと分かりにくいなと思ったのは、「掛け算微分が公理系の一つ」だというのが。

O : その言い方もあんまり良くなかった。

掛け算微分で色んなもん出て来るっていうことを言いたかったんです。実は、行列の場合も、「積の行列式が行列式の積になる」という性質から行列式の公式が全部出て来るんですね。それと、微分の場合は掛け算微分の公式が、積の行列式の公式に対応するということを言いたかったんです。言い方があんまり良くなかった。私は余計なことを言いすぎるんですね、本当に。

A₅₂ : それはしょうがないよね。普段使っている言葉と、高校生の言葉と違うんだからね。でも大学の先生がそういうふうになると、何となくそうなのかな？ってあるんじゃないですかね。

A₅₃ : それはちょっとね、煙に巻くっていうこともあったりして。

A₅₄ : 掛け算微分のところで x^n あたりで、どうのこうのって言ってたんですけど、僕は、流れからいくと、 x を n 個書いて、結局1個ずつ微分して、それが $n-1$ 個あるから、 x^{n-1} っていうふうにやるのかなと思ってたら。いきなり出てきたんで、ちょっと、そっちの方が分かりにくいかも？って思ったんです。

O : さっきも言ったように、それは本当は違う方法で x^2 から x^3 のことをしてて、そういう方法でやっていけばいいんだっていう。やっぱり n 個の掛け算微分ってちょっときついんじゃないですかね。分かりにくい。

A₅₅ : n 個書くの疲れる。

A₅₆ : せっかく掛け算微分をやった後、 $x^{2/3}$ でやったじゃないですか！ 3つで。ああいうふうな感じで x もバラしていくと出来るよって。

O : その方が良くもね。今度からそうしよう！

A₅₇ : それが n 個って保証は無い訳ね。今日は3つやったからね。やっぱり帰納法につながるほどやらないと。

A₅₈ : 結局そうなる。

A₅₉ : そう、そう。

だからいい加減さを売りにしたら今の方が良い。

A₆₀ : 公理系というところですね。だから、公理系は、公理系で生かしたら良いと思うんだけど、…。

A₆₁ : 「今日はリミットを使う方法はやらないぞ」とか、最初に言ったほうが良いかも。そうでないと、まとまりの話の筋が子ども達は分かりにくいかも知れない。だから今日は近似だけでやるんだよと宣言してしまうとか。

O : はい。基本的にはそういうことです。

A₆₂ : そういうことでしょ。何で面倒なことをするんかいなと思いながら計算をするんだね。だから、近似というのは近似としてこれだけ使うというのが、恐らくちょっとまだはっきり印象に残ってないのかな。これをきちっと分かるようにしておけば、公理系という言葉を使わなくて、これやっちゃだめなんだよというふうに、これだけでいくんだよというふうに整理したら面白い授業展開になると思う。

最後に出した問題は掛け算微分の公式だけを使ってやりなさいっていう、そういう意味で出したんですね。

A₆₃ : 後、僕なんかは前から言ってるのは、合成関数の微分法はすごい大事だよと言っている。逆関数でも何でも、あれから出て来るのは。という話だけ、結局掛け算微分だけあんまりしていなかったのでああ、そうなのか！同じような感じかな？と思って見てた。

言い方を変えると、それを導くまでに全部抜けてても、あそこだけちゃんとやっていけば、それからまたついていける。

O：　そうですね。だから、それを忘れても、掛け算微分の公式を覚えてれば、後は色んなことが出て来る。それは非常に実り豊かな公式なんだという、そこが言いたかったんですよ、一番ね。

司会：　はい、だいたい、時間になってきたのですが、一言、二言。

A₆₄：　すいません、全然喋っていないものですから、自分も、今日の授業ですけども、通常の授業があったからこそやれる授業かなということが感じられますので、私がおもし先生の授業をやるとしたら、やっぱり一通りやってから教科書、それから改めてからちゃんと岡部先生の授業を真似してやらせていただければなあと感じました。

司会：　見直しを振り返るとのことね。

O：　先生の高校でまたやりますか？

A₆₅：　ここはずっと90分でやっているのですか？

A₆₆：　50分です。この授業だけ特別90分です。

O：　長いかもしれませんが。でも、操作的活動を入れたりすると90分あった方が良いでしょう。

A₆₇：　今日の授業、やり直しでなくても初めから出来るんじゃないかと思っています。さっき誰も触れないからもう一回言うと、接線が同じ幅をとれば関数の場合、その傾き、そのまま平行で出て来るんだから、あのへんを整理しておいて、そして狭い区域における接線の傾きの話に入って行くというのも結構使えるんじゃないかな。僕が一番心配なのは、近似しといて、近似したままで後はイコールでずっとやっていくのと、イコールでずっとやっておいて最後にhを出すというのと、どちらが分かりやすいかなあっている感じね。

A₆₈：　なるほど。

A₆₉：　その場合は、aが先に決まるんだからな。

A₇₀：　そうですね。

司会：　どうも皆さん、長い間ご苦労様でした

5. 配布資料「微分とは何か」

○ 「知識がウサギの糞」

表題の「微分とは何か？」は、悩ましい設問です。

私の『マンガ微積分入門』がベストセラーになったとき、週刊誌が特集を組んでくれました。そのとき、予備校のある教師が「微分積分は概念をわかったって役に立たない。武道の型と同じで問題を解いて答えを出す鍛錬のみだ」という趣旨のコメントを出していたのです。

実際、私の経験でも、また多くの人の話を聞いても、そのコメントの方法が教育の世界で一般的な方法だったのです。

だから、小学校からの折れ線グラフの知識も役に立たないと思われていました。また、さまざまな面積の公式もバラバラで有機的なつながりを持てなかったのです(このことを、数学教育の大御所の茂木勇先生は「知識のウサギの糞状態」と形容しました)。

○ 微分の意味

では、私の考える「微分とは」の回答を述べましょう。

「曲線を微小な線分をつないだ折れ線グラフと考える」と捉えなおすことです。

例えば、アルキメデスが正 96 角形で円周の長さを測定したことを思い出してください。円弧も典型的な曲線の 1 つですが、円を描いて「正 96 角形だ」と言っても誰も疑いません。つまり、**なめらかな曲線**を十分小さな区間に分割して拡大して見ると、その部分部分はほとんど線分に見えるのです。

こうして、中学校までかいてきたさまざまな折れ線グラフが曲線へのステップであったことがわかるのです。「曲線を拡大して微小な区間を取り出すと、その区間では線分、つまり 1 次関数で、折れ線グラフの一部だった」ということになるので、曲線上のある点 A での線分は、一体何を意味しているのでしょうか？

線分は、両端がありますが、ユークリッドはちゃんと次の約束事を用意しておいてくれました。「線分はその両端を限りなく延長することができる」

延長したものは、何でしょうか？

「直線に決まってる」確かにそうですが、その直線は元の曲線とはどんな関係にあるのでしょうか？

拡大したままだと、状況がわかりにくければ、また、図を元に戻してみましよう。そうすると、その直線が点 A で曲線に接しているのが見えてきます。こうして、点 A での接線が登場します。

○ そして導関数へ

この考え方で、微分は次のように定式化されます。グラフが**なめらかな曲線**の

とき、 $(a, f(a))$ のまわりを拡大すると線分に見えます。その線分の傾きは、点Aでの接線の傾きでした。この傾きを $f'(a)$ で表します。これを、 $x = a$ での $f(x)$ の微分係数といいます。そして、 a の値を変えると、微分係数 $f'(a)$ も変わります。この a に微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数が導関数 $f'(x)$ です。

つまり、以下のことが成り立ちます。

点 a での微分とは、関数 $y = f(x)$ を点の a のまわりで十分大きく拡大して、直線の式、つまり1次式とみなす操作。

また、その直線の傾き微分係数 $f'(a)$ で、 $f'(a) = p$ とすると、 a のまわりで $y = f(x) = px + q$ とみなすことができる。

グラフの概形

○ 株の売り時と買い時

株のグラフでは、ある一定期間の中の最大の値を「極大値」、最小の点の値を「極小値」、あわせて極値と名前が付けられていることをお話ししました。

関数が与えられたとき、そのような点を探すにはどうしたらよいのでしょうか。

○ 極値の性質

そのようなときに大きな力を発揮するのが微分です。関数 $f(x)$ の極大値と極小値で、そのグラフの接線はどうなっているのでしょうか？

接線の傾きが0ですね。このことをフェルマーは「最大値・最小値の近くでは、関数の値が非常にゆっくり変化する」と述べています。極値は最大値ではありませんが、一定の間では最大値で、最大値と同じ動きになるのです。

ですから、まず、関数 $f(x)$ のグラフの曲線の傾きを表す導関数、 $f'(x)$ について、 $f'(x) = 0$ になる点を探すことから始めます。

○ 極値の探し方

その $f'(x) = 0$ になる点が見つかったら、その点のまわりで、 $f(x)$ の増減を調べます。これは、 $f'(x)$ の符号で決まります。 $f'(x) > 0$ ならば、曲線の傾きが正ですから、増加します。逆に、 $f'(x) < 0$ ならば、曲線の傾きが負なので減少するのです。まさしく増える間(Fermat)と減る間(こっちも Fermat)を調べます。

増から減に変わるところで極大値、減から増に変わるところで極小値となります。

抽象的な議論ではなかなかわかりにくいので、具体的な関数でやってみましょう。

ここでは、

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$$

について、極値を求めてみましょう。

まず、この関数の導関数を出します。それぞれの項の導関数を求めて加えればよいのですね。

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

このあと、 $f'(x) = 0$ となる x を求めることになります。これは、

$$\begin{aligned} 4x^3 - 12x^2 + 8x &= 4x(x^2 - 3x + 2) \\ &= 4x(x-1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

より、 $x=0$ と $x=1$ と $x=2$ が極値の候補になります。そこで、この点のまわりの $f'(x)$ の符号を調べるのですが、こういう多項式の関数では、重解でない限り、そこで符号が変わります。重解でも、3重解ならやはり符号が変わります。そこで、 x が非常に大きい時には最高次の係数が正なら正になる(負なら負になる)ことを利用して、 $f'(x)$ の符号の欄に順に +, -, +, - とつけていけばよいのです。

そうすると、 $x=0$ のところでは、 x の増加にともなって、 $f'(x)$ の符号が - から + に変わってますから極小値で、その極小値は $f(x)$ の x に 0 代入して、 $f(0) = 2$ となります。他の極値も同じようにします。

極値が求まれば、増減をみながらそのグラフの概形を描くことができます。概形をつかんでおくと何かと便利です。

極値の判定に簡便な方法もあります。

導関数 $f'(x)$ も x の関数です。この $f'(x)$ をさらに微分した $f''(x)$ は $f''(x) > 0$ のとき下に凸で、 $f''(x) < 0$ のとき上に凸です。

ですから、 $f'(x) = 0$ の点 a で次の判定が可能です。

ア $f'(a) = 0$ かつ、 $f''(a) < 0$ ならば極大

イ $f'(a) = 0$ かつ、 $f''(a) > 0$ ならば極小

関数の演算と微分

○関数の足し算と実数倍

数は足し算・掛け算などでその領域を拡大していきました。関数も同じように、足し算や掛け算などでその種類を増やすことができます。

$$f(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 1), \quad g(x) = (x + 2)$$

についてその例をあげていきましょう。

● 関数の足し算とは、

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (x^3 + 2x^2 + 3x + 1) + (x + 2) \\ &= x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

のように、項ごとに足すものです。

- 一方、実数倍とは、

$$\begin{aligned} 3f(x) &= 3(x^3+2x^2+3x+1) \\ &= 3x^3+6x^2+9x+3 \end{aligned}$$

のように、項ごとに実数倍します。

- また、関数の掛け算は、

$$\begin{aligned} f(x) \times g(x) &= (x^3+2x^2+3x+1) \times (x+2) \\ &= x^4+4x^3+7x^2+7x+2 \end{aligned}$$

と、展開して加えたものになります。

いまの例は、ともに多項式で表される関数でしたが、そうでない場合でも同じように足し算、実数倍、掛け算が定義できます。

さて、これらの演算は微分にどのような影響を与えるのでしょうか。

○ 足し算の微分

いま、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ がともに a で微分可能とします。そして、それぞれの微分係数を $f'(a)=m$ ， $g'(a)=p$ とします。このとき、 $f(x)$ と $g(x)$ は a のまわりの十分小さな範囲で、線分（1次関数）とみなせて、その傾きはそれぞれ、 k ， m と考えられます。つまり、

$$f(x) \doteq mx+n$$

$$g(x) \doteq px+q$$

（この式の n と q はあまり本質的ではありません。）

よって、

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &\doteq (mx+n)+(px+q) \\ &\doteq (m+p)x+(n+q) \end{aligned}$$

この式は、

$$(f(a)+g(a))' = m+p = (f'(a)+g'(a))$$

を意味しています。

この計算で $x=a$ であることは、使っていません。ですから、この計算はいつでも成り立ちます。よって、次の導関数の式が成り立ちます。

$$(f(x)+g(x))' = (f'(x)+g'(x))$$

○ 実数倍の微分

今度は、 $kf(x)$ の微分を考えましょう。ただし、 k は実数とします。やはり、 $f(x)$ の $x=a$ での微分係数を $f'(a)=m$ とします。 $x=a$ のまわりで $f(x) \doteq mx+n$ ですから、

$$kf(x) \doteq k(mx+n) = kmx + kn$$

これは、 $kf(x)$ の $x=a$ での微分係数が $km = k f'(a)$ になることを意味しています。この計算でも、やはり、 $x=a$ であることは、使っていません。ですから、この計算はいつでも成り立ちます。よって、次の導関数の式が成り立ちます。

$$(k f(x))' = k f'(x)$$

○ すべての2次関数で微分が可能に

これで2次関数はすべて微分できることになります。

たとえば、 $3x^2+5x+4$ の導関数を求めるには、

$$\begin{aligned} (3x^2+5x+4)' &= (3x^2)' + (5x+4)' \\ &= 3(x^2)' + (5x+4)' \\ &= 3(2x) + 5 = 6x+5 \end{aligned}$$

と計算されます。

5 掛け算微分とは

○ 掛け算で出てくる関数の微分

多項式の関数を組み合わせてできる関数の微分は、関数を掛けてできる関数の微分が基本です。では、それを考えてみましょう。

前項と同じく、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ がともに a で微分可能とします。そして、それぞれの微分係数を $f'(a)=m$, $g'(a)=p$ とします。このとき、 $f(x)$ と $g(x)$ は a のまわりの十分小さな範囲で、線分（1次関数）とみなせて、その傾きはそれぞれ、 k , m と考えられます。つまり、

$$f(x) \doteq mx+n \quad (\text{とくに } f(a)=ma+n)$$

$$g(x) \doteq px+q \quad (\text{とくに } g(a)=pa+q)$$

でしたね。

よって、

$$\begin{aligned} f(x) \times g(x) &\doteq (mx+n) \times (px+q) \\ &\doteq mp x^2 + (mq+np)x + nq \end{aligned}$$

この関数は、2次関数とみなせますから、その $x=a$ での微分係数は、この2次関数を微分して $x=a$ を代入したものです。ここで、前項の2次関数の微分係数が活きてきます。

つまり、 $f(x) \times g(x)$ の $x=a$ での微分係数は、この2次式をまず微分して、

$$\begin{aligned} [mpx^2 + (mq+np)x + nq]' \\ = 2mpx + (mq+np) \end{aligned}$$

これに、 $x=a$ を代入して、

$$\begin{aligned}
& 2mpa+mq+np \\
& =mpa+mq+mpa+np \\
& =m(pa+q)+p(ma+n) \\
& =f'(a)g(a)+g'(a)f(a)
\end{aligned}$$

となります。

結果的に次のことが成り立ちます。

$ \begin{aligned} & \{f(x) \times g(x) \text{ の } x=a \text{ での微分係数}\} \\ & =f'(a)g(a)+g'(a)f(a) \end{aligned} $
--

この計算で $x=a$ であることは、使っていません。ですから、この計算はいつでも成り立ちます。よって、次の導関数の式が成り立ちます。

$ \begin{aligned} & [f(x) \times g(x)]' \\ & =f'(x)g(x)+g(x)f'(x) \\ & \text{(掛け算微分の公式)} \end{aligned} $
--

○ 掛け算微分の公式の豊かさ

数学らしくない見出しで失礼しました。でも、そう言わざるを得ないほど、この公式からさまざまなことが出てくるのです。

まず、ベタな x^n の微分です。

まだ出していない x^3 の微分から。

$$\begin{aligned}
(x^3)' & = (x \times x^2)' = x' \times x^2 + x \times (x^2)' \\
& = 1 \times x^2 + x \times (2x) \\
& = 3x^2
\end{aligned}$$

この $(x^3)'$ の結果を用いて、 x^4 も計算できます。

$$\begin{aligned}
(x^4)' & = (x \times x^3)' = x' \times x^3 + x \times (x^3)' \\
& = 1 \times x^3 + x \times (3x^2) \\
& = 4x^3
\end{aligned}$$

以下、同じように進めていけば、一般に、次のことが成り立ちます。

$(x^n)' = nx^{n-1}$

○ 割り算微分ほか

掛け算微分は、掛け算だけにとどまりません。関数の割り算の形の関数でも有効です。

$ \begin{aligned} & [f(x)/g(x)]' \\ & = \{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)\} / \{g(x)\}^2 \end{aligned} $
--

○ また、 $x^{1/2}$ は $x = (x^{1/2})^2 = (x^{1/2}) \times (x^{1/2})$ でしたね。これについても、両辺を微分すると、掛け算微分で、 $1 = (x^{1/2})' \times (x^{1/2}) + (x^{1/2}) \times (x^{1/2})' = 2 (x^{1/2}) \times (x^{1/2})'$

ゆえに、 $2 (x^{1/2}) \times (x^{1/2})' = 1$ より、

よって、 $(x^{1/2})' = 1/\{2(x^{1/2})\} = (1/2)x^{-1/2}$

ゆえに、 $[x^{1/2}]' = (1/2)x^{-1/2}$ などでもできます。

4-2 大学生に対するゼミ形式の指導

大学数学における「わかる」の判断基準に関する研究 —ゼミ形式の指導を通して—

市原 一裕

奈良教育大学教育学部数学教育講座

芝野 雄大

奈良教育大学大学院教育学研究科

目 次

1. はじめに
 - 1.1 ゼミ形式
 - 1.2 「わかる」とは
2. 本研究の方法
3. 結果と考察
 - 3.1 「わかる」「わからない」の判断材料
 - 3.2 「わかる」を判断するための比較するもの
 - 3.3 「わかる」の判断過程モデル
4. 段階別の指導及び判断方法
5. まとめと今後の課題
6. 謝辞
7. 参考・引用文献

要 約

算数・数学の授業における「わかる」を判断するための方法と「わかる」ための指導法の確立を目的として、大学数学におけるゼミ形式による指導を観察し、さらに発表者と指導者に「わかる」をどう判断したかなどのインタビューを行った。その結果として得られた仮説『「わかる」の判断基準として『指導者の「確立された理解」と学生の対応との比較』が挙げられるのではないか』を基に、「わかる」の判断過程モデルと指導法を提案する。

キーワード ゼミ形式, 「わかる」の判断基準, 判断過程

1. はじめに

筆者らは「わかる数学の授業」を構築する上で、教師が児童・生徒の「わかる」を判断することが重要なファクターであると考え、この「わかる」を判断するための方法及び基準の研究に関して、研究に適している授業形態は大学におけるいわゆる「ゼミ形式」であろうとの示唆に基づき、ゼミ形式による指導を観察し、さらに発表者と指導者に「わかる」をどう判断したかなどのインタビューを行った。本稿では、その結果の考察として得られた「わかる」の判断に関する仮説を報告し、それに基づき「わかる」の判断過程モデルを提案する。

1.1 ゼミ形式

ここでは、今回の研究対象として取り上げた「ゼミ形式」の指導について簡単にまとめておく。多くの大学での数学科において行われている、いわゆる「ゼミ」とは、少人数グループによるテキストの輪読、つまり、学生の発表とそれに関する質疑と討論を主体とする演習を意味する。個人指導に近い形態であること、また専門教育に関する深い議論がなされうることから、高い教育効果が得られる指導形態であることは、多くの大学教員が認めるところである。

しかし実際、大学のゼミ指導、特に学生の「わかる」の判断は、指導者の主観に頼りがちになっているのが現状である。またいわゆる講義形式の授業と異なり、その性質(多様性や密室性)から、ゼミ形式の指導は授業改善などの教育研究の対象になりにくい(毛利, 2007)。従って、ゼミ形式における「わかる」の判断に関する客観的基準が保証できれば、ゼミ形式の指導改善にもつながると考えている。

1.2 「わかる」とは

ここでは、算数・数学の授業における「わかる」とはどういうことか、筆者らのとる立場について述べておく。村上は、わかることについて、広辞苑(わかる)、国民教育小辞典(わかる)、教育心理学辞典(理解)、現代教育用語辞典(理解)、授業研究大辞典(理解)に当てはまり、各辞典の出版趣旨により主張するところは異なるが、おおむね通ずるところは同じとして、次のようにまとめている(村上, 1977)。

「わかる(理解)ということは、対象(事物、事象、事態、言語、知識など)について感覚的把握、意味把握、関係(因果関係、論理関係、構造関係、全体関連など)把握などによって、それを認知(認識)し、心的内面の関係体系、認識体系、知識体系に新しい意味や関係を附加したり、それを新しくつくり変えたりすることである。」

そこで吉田、重松は、上述の村上の指摘から、わかることと理解することを同義にとらえ、その用語の意味を探っている(吉田・重松, 2007)。ここで注目すべきことは、

「わかること(理解)が感覚的把握→意味把握→関係把握により認知レベルに達し、自らの体系に新しい意味や関係を附加したり新しく作り変えたりすることを述べ、理解

のプロセスがわかりやすく表現されていることである。特に、関係把握が認知の重要な要素であるとの主張は数学的なものである。」

ということである。本研究における「わかる」はこの吉田・重松の主張するものに沿って議論する。

2. 本研究の方法

本研究の方法は以下の通りである。まず、3名の研究協力者(篠原彌一先生[関西学院大学、幾何学専門]、小森洋平先生[大阪市立大学、解析学専門]、松澤淳一先生[奈良女子大学、代数学専門])に、実験的なゼミの指導を依頼した(なお研究協力依頼文書は本稿の最後に資料として含めておいた)。上述の各大学で1回ずつの計3回、筆者である芝野もしくは各協力者の指導学生がゼミ発表を行った。発表内容は、学部2回生程度～大学院1回生程度の数学専門に関するものとした。これに対し、できる限り通常行っているものに近い形で、研究協力者がゼミ指導を行い、それを詳細に観察し記録した。その後、発表者と指導者にインタビューをし、

- 指導者には「わかる」をどう判断したのか、また、どのように指導しようと試みたのか
- 発表者には「わかる」をどう判断されたと感じたのか、また、指導された結果、どのように理解が深まったのか

を議論した。ゼミ内容に関しては、抜粋を付表1から付表3として掲載しておいた。

3. 結果と考察

ここではまず、ゼミ及びインタビューの記録から指導者の「わかる」の判断材料をまとめ、それから導かれた、指導者が学生の「わかる」「わからない」を判断している方法仮説を述べる。さらに、その仮説に基づき、ゼミにおける「わかる」の判断過程モデルを構築する。

3.1 「わかる」「わからない」の判断材料

3回のゼミとインタビューを通して挙げられた、発表者の「わかる」を指導者が判断した要因、着眼点を列挙し、表1に整理した。

表1から、ゼミ指導において指導者は「わかる」を判断するというよりむしろ、「わからない」を判断することに重点をおいていることが読み取れる。つまり、「わからない」の判断をするための基準が指導者の中にあるのではないだろうか。

(表 1) 「わかる」「わからない」を判断する場面

「わかる」の判断	「わからない」の判断
<ul style="list-style-type: none"> ・ <u>文章，論理のつながりがスムーズ</u> ・ 自己矛盾に学生自身で気がつく ・ <u>教員からの(唐突な)発問に沿った返答がなされる</u> ・ 自己決定で発表を続ける ・ ささいなミス(記号ミスなど)を自分で修正できる ・ ノートを見ずに，<u>自分で論理を追いながら発表できている</u> ・ <u>質問を深めていったときに，着実に答えたいける</u> ・ 図も文章も矛盾なくかけている ・ アドバイスしたことを学生が説明できる 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 文章，論理のつながりが悪い ・ 自己矛盾に学生自身で気がつかない ・ 教員からの(唐突な)発問に沿った返答がなされない ・ ここまでの論理展開で大丈夫か否かの判断(他者判断)を求める ・ ずっとノートを見ながら発表している ・ 用語の使い方が不適切 (単語の使用法を間違っていたり，\forall，\existsの記号を混在させたりなど) ・ 定義の確認で答えられない ・ 学生の声のトーンや行動などに違いがある ・ 質問を深めていったときに，どこかで詰る ・ 図だけかける状態や，図もかけない状態 ・ アドバイスしたことを学生が説明できない

一方「わかる」の判断については表面化しているもの(学生の板書及び言動や行動など)或いは教員側からのアプローチにより表面化させたもの(発問に対する返答)のみで「わかる」を判断しているようである。しかし、表 1 の破線部の意見を加味すると、表面化したものまた表面化させたものだけで判断しているのではなく、何か(次節で提案する)と比較をした上で、「わかる」を判断しているということを示唆していると考えられる。

3.2 「わかる」を判断するための比較するもの

ここで、数学者(もしくは、数学的に経験豊富な教員)が、学生を指導する際に、「どのようにして、わかっている・わかっていないを判断しているか」の判断基準の一つとして、現時点で仮説ではあるが、

指導者の中での「正しい(深い, 完成された, もしくは, 確立された)理解」と学生の対応との比較

を挙げる。

その理由を以下に述べる。まず、ゼミ観察とインタビューから、表1における破線部、及び、以下の(1)から(3)の大学教員の興味深いコメントを見出すことができる。

- (1) (証明の開始部分の板書を見て)「最初の行の落ち着きが悪い。」
- (2) (どこでわかっていると思いましたか? という質問に対して)「自分で論理を追っている。証明の書き方(板書)が良い。その場で論理を追っている。」
- (3) (わかっていないとどこで判断しましたか? という質問に対して)「文章が論理的におかしい。発問に対する答えがずれている。」

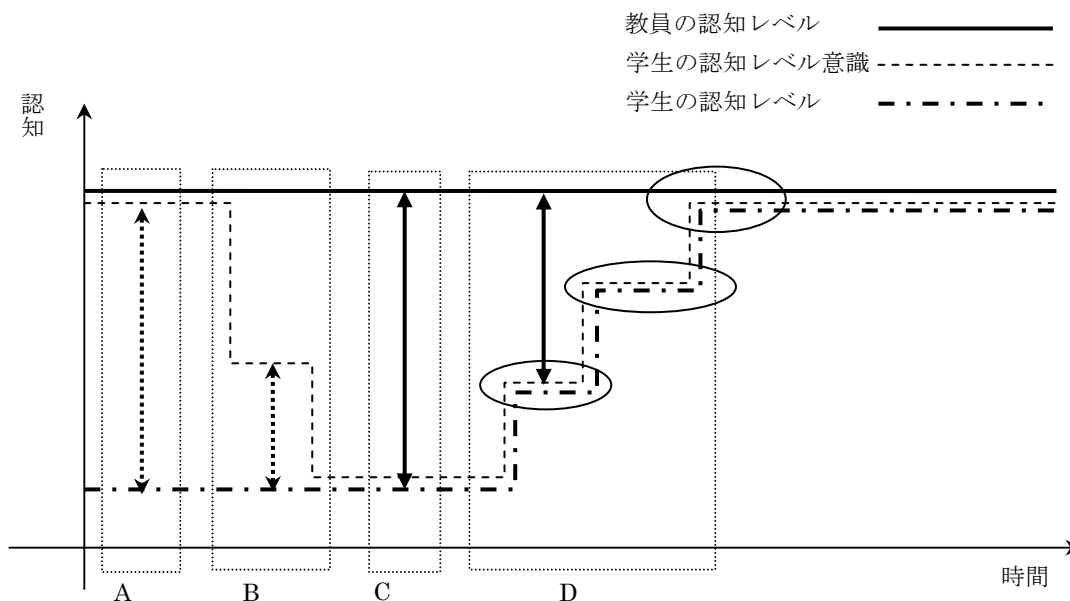
これらは、「指導者の中での理解」と「学生の対応(発言や板書など)」との比較を通して、その差を測ることにより、学生の理解度を判断している、ということを示唆していると言える。ゆえに、大学教員が「学生の理解度」を測るために用いている測定具として、「自分の中での(証明や計算の)完成型」があるのではないだろうか。

さらに、「自分の中での(証明や計算の)完成型」が存在したと仮定して議論を進めると、「指導者の認知レベル」と「学生の認知レベル」との差が大きければ「わかっていない」、また差が小さければ「わかっている」と判断していると考えられる。つまり、「わかる」は瞬間的に判断できるものではなく、「学生の認知レベル」と「教員の認知レベル」との差を慎重に測り、その上で、その差を縮めることができた(学生が説明できた、質問に答えることができた etc)と教員が納得したときこそが、「わかる」の判断というものではないかと考える。

3.3 「わかる」の判断過程モデル

3.2であげた判断基準仮説、ゼミ観察における指導者の発問や指導、及び発表者へのインタビューから得られた意見「分かっていないことに気付いた」などを加味し、教員の認知レベル・学生の認知レベル意識・学生の認知レベルの3つの視点から、「わかる」の判断過程モデル(図1)を構築した。

※「学生の認知レベル意識」とは、自分の認知レベルを学生自身が主観的に捉えた認知レベルのこと。学生が自分の認知レベルを高く思い込んでいる場合がある。



(図1) 「わかる」の判断過程モデル

つまり、「わかる」の判断過程モデルを

A 段階：「わかっている」「わかっていない」の判断を模索している段階

B 段階：どこから「わかっていない」のかを判断している段階

C 段階：教員が学生の認知レベルを把握できた段階

D 段階：学生の認知レベルの向上を、測っている段階

の4段階と捉え、段階別の学生及び教員の状態の詳細を表2にまとめた。また、実験ゼミを記録した付表1の発言記録にA段階を㉠、B段階を㉡、C段階を㉢、D段階を㉣と記しておいた。

また、モデル内の \longleftrightarrow は「教員の認知レベル」と「学生の認知レベル」の差を表し、矢印の長さが長ければ長いほど「学生はわかっていない」と判断でき、また矢印の長さが0に近ければ近いほど「学生はわかっている」と判断できる。

また、図1の「わかる」の判断過程モデルを繰り返すゼミ(学生が「わかっていない」ことを見つけ出し、認知レベルを上げていくというA, B, C, D段階を繰り返すゼミ)こそ、学生が「わかる」ためのゼミになっているのではないだろうか。

(表 2) 「わかる」判断過程を捉える枠組み

A 段階	学生	綿密な準備から「わかっている」状態であると意識している段階
	教員	学生の「わかっている」「わかっていない」を模索している段階
B 段階	学生	教員の発問などから学生自身が「わかっていない」ことに気付く段階
	教員	表 1 から学生の「わからない」を判断し、どこまで「わかっている」のかを判断している段階
C 段階	学生	学生自身がどこから「わかっていた」のかを認識できた段階
	教員	教員が学生の認知レベルを把握できた段階
D 段階	学生	教員の発問や意見を基に、感覚的把握、意味把握、関係把握をしている段階
	教員	数学的な論理をステップに分類するなどの方法で、認知レベルの向上を、教員の認知レベルとの差を測るにより「わかる」を判断している段階

4. 段階別の指導及び判断方法

ここでは、表 2 の段階別で行うべき指導及び判断について述べる。

A 段階は、学生の「わかっている」「わかっていない」を模索することが目的であるから、指導というよりも判断を重んじておく必要があると考えられる。学生に「それはなぜですか？」などの発問をすることが大切である。

B 段階は、学生を「わかっていない」と判断した後の段階であるから、どこでつまづいているのかという判断をすることが大切であると考えられる。したがって、発問は難易度の高いものから低いものへと移行していきつつ、学生の認知レベルを調べていくことが望ましい。

C 段階は、学生の認知レベルを把握した段階である。学生の認知レベルを向上させる出発点から到達目標までを見通して、数学的および論理的に流れの良い発問の順番を考える必要がある。

D 段階は、学生の認知レベルを向上させつつ、「わかる」の判断をしなければならない段階である。したがって、先ほど述べた「教員の認知レベル」と「学生の認知レベル」の差を測ることと、「学生の認知レベル意識」と「学生の認知レベル」の差をも測ることを意識しておくべきであると考えられる。

以上の段階別の指導及び判断方法について、ゼミ観察およびインタビューから抽出することができた実践的具体例について表 3 にまとめておく。

(表 3) 段階別における指導及び判断方法に関する実践的具体例

段階	指導及び判断材料
A 段階	判：文章，論理のつながりが悪い。 判：ずっとノートを見ながら発表している。 判：用語の使い方が不適切。 判：教員からの(唐突な)発問に沿った返答がなされない。 例)それはなぜですか？定義は何ですか？ 記号の意味は何ですか？ 判：学生の声のトーンや行動などに日常との相違点が見られる。
B 段階	判：発問の内容を掘り下げていく。 ⇒最終的には定義まで掘り下げる。 ⇒発問の難易度を難から易へ。
C 段階	判：発問内容を掘り下げていく。 ⇒学生が質問に答えられるようになる。 指：到達目標までを見通して，数学的に流れの良い質問の順番を意識しながら発問する。 指：定義を忘れていて，答え方が分からないなどの数学のコミュニケーション方法に問題のある学生にはコミュニケーション方法を指導する。
D 段階	指：今までアドバイスしたことを学生に説明させる。 指：待つ。 指：確認したことを利用すれば証明できるような問題を与え，チャレンジさせる。 判：今までアドバイスしたことを学生自身が説明できる。

5. まとめと今後の課題

本研究において行った実験ゼミの観察とゼミ後のインタビューの考察は，以下のよう
にまとめることができる。

(i) 「わかる」を判断する基準について

ゼミ中の指導者の発言及びゼミ後のインタビューから，ゼミにおける指導者の「わ
かる」の判断基準として，

指導者の中での「正しい(深い，完成された，もしくは，確立された)理解」と学生の
対応との比較

があるのではないかという仮説がたてられた。また，「わかる」は瞬間的に判断できる
ものではなく，「学生の認知レベル」と「教員の認知レベル」との差を慎重に測り，そ
の上で，その差を限りなく縮めることができた(学生が説明できた，質問に答えること
ができた etc)と教員が納得したときこそが，「わかる」の判断であるという仮説を立

ることができた。

(ii) 「わかる」の判断過程モデル

またその仮説を基に、図1の「わかる」の判断過程モデルを構築した。具体的には、以下の4段階と捉えるモデルを提案した。

- A: 「わかっている」「わかっていない」を模索している段階
- B: どこから「わかっていない」のかを判断している段階
- C: 指導者が学生の認知レベルを把握できた段階
- D: 学生の認知レベルの向上を図っている段階

(iii) 「わかる」ためのゼミとして実践的具体例

前述の「わかる」判断過程モデルをもとに、段階別の指導及び判断方法について、ゼミ観察およびインタビューから抽出することができた実践的具体例を表3にまとめた。

今後の課題としては、本研究で立てた仮説の妥当性を検討していく必要があると考えられる。また表3にまとめた実践的具体例に関しても、より多くの実践データを集め、質の向上に努めなければならないであろう。

6. 謝辞

研究協力をいただいた篠原彌一先生、小森洋平先生、松澤淳一先生には、お忙しい中、貴重なお時間を割いていただきご指導をいただいたことを心より感謝しています。

なお本研究を行うに当たり、数学教育講座の重松敬一先生、近藤裕先生、教職大学院の吉田明史先生から、多数のアドバイスをいただきました。ここに記して感謝いたします。

[注] 本原稿は、「奈良教育大学教育実践総合センター研究紀要」に掲載決定したものに加筆修正したものである。

7. 参考文献

- [1] 村上芳夫(1977)『わかる授業の構造』明治図書, p39
- [2] 毛利猛(2007)「ゼミ形式の授業に関するFDの可能性と必要性」,香川大学教育実践総合演習, 第15巻, pp.1-6
- [3] 吉田明史, 重松敬一(2007)「わかる算数・数学授業の構築のための基礎的研究」, 奈良教育大学紀要, 第56巻 第1号, pp.127-134

(付表 1)

時間	学生の活動・言動・心境	教授の言動
4分	④ A が開集合なので, $X - A$ は閉集合とする。	④ $X - A$ は閉集合というのは, 定義なのですね?
11分	はい。それを定義としてやっています。 . . . 証明続く . . . $f^{-1}(A)$ が連続写像である。 ④ or ⑤ (少し悩み) 逆像です。 ⑤ (忘れてる) A の逆像の定義は . . . (図を書いて, 説明) ⑤ 逆像は . . . 単射とかそういうことですね? (答え方がわからない) ⑤ $f^{-1}(A)$ は . . . 集合かな? (半信半疑) ⑤ $f^{-1}(A)$ は . . . (定義の仕方が分からない, 何をどう書いて良いのか分からない) ⑤ そうですね。(図を見て解釈) ⑤ どのような性質? (先ほどと同様答え方が分からない) ⑤ $f^{-1}(A)$ というのは . . . (答え方が分からない) ⑤ 答え方が分かりません。	④ (唐突に) $f^{-1}(A)$ の記号の意味は何ですか? ④ (少し待って) 逆像ですか? 逆写像ですか? ④ or ⑤ A の逆像ですね? A の逆像の定義は何でした? ⑤ 集合の記号でも文章でも良いです。 A の逆像の定義は? 左側が X ですよ? ⑤ $f^{-1}(A)$ の正体は何ですか? 集合ですか? 写像ですか? ⑤ (絵を見ながら) 上が f ですね? 下にも写像を表す矢印がありますよね? それはどのように定義するのですか? ⑤ $f^{-1}(A)$ は X の部分集合ですよ? X の。 ⑤ 口で言えます? $f^{-1}(A)$ はどういう X の部分集合であるか? どのような性質を持っています? ⑤ 数学にはすべて記号に意味がありますよね? f は写像, A は閉集合, O は開集合で $f^{-1}(A)$ っていう記号はどのような意味ですか? ⑤ A はどうやって決まります? Y の部分集合 A はどうやって決まります? ⑤ そうか。(どこでつまづいているか分かってくれた) 集合の記号は知っています? $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ と書ける。(ここで

<p>◎なるほどなるほど。(定義の仕方が分かった)</p> <p>◎or⑩ちょっと考えさせてもらっていいですか？空集合は閉集合です。(半信半疑)</p> <p>⑩絵を描いて説明するが、説明しきれず・・・ Xは開集合なので・・・</p> <p>⑩$f^{-1}(f)$ですか？(焦)空集合は元がないので・・・$f^{-1}(f) = f$?</p> <p>イメージじゃないですか？(笑)</p> <p>⑩なるほど。(記号の一文字一文字の重要性を実感した)</p>	<p>はこれ以上の説明はなかった)</p> <p>⑩いじわる質問いいですか？空集合は閉集合ですか？</p> <p>⑩本当ですか？ま・・・それは正しいですけどね。 なぜかというとな開集合を定義しなければならないのですが空集合はなぜ閉集合なのか説明できます？</p> <p>⑩それは認めるのですね？開集合の定義をしなかったから分からなかったけどそれでいきましょう！！すばらしい！！いま、Yの各閉集合に対して、・・・質問は$f^{-1}(f)$は何ですか？</p> <p>⑩ですよね？じゃそれはなぜですか？</p> <p>⑩イメージはすごく大切。数学的に説明してみよう。$f(x)$は空集合に含まれる。そして、fは写像なので全ての点が行かなければいけないよね？つまり、$f(x)$が空集合と言うのは、xのfによる行き先がない、ということ。そのようなxがないということ。だから、$f^{-1}(f)$なわけ。数学でしっかりと説明できるでしょ。</p>
--	---

(付表 2)

時間	学生の活動・言動・心境	教授の言動
13分	<p>悩む</p> <p>AをやってBをやる？BをやってAをやる？</p> <p>・・・計算・・・</p> <p>特別な性質ですか！？結合律・・・</p> <p>群としてですか？ (沈黙)</p> <p>今気付きました。転置？</p> <p>可換？(アーベル群であることに気付いた。)</p> <p>どっちから回転をかけても大丈夫・・・。</p> <p>どうしてかというと・・・なぜでしょう？(笑) 180度回転・・・</p> <p>2つの(悩む)</p> <p>あっ！直交している。</p> <p>(証明始める)軸が直交・・・</p> <p>悩む</p> <p>これで・・・直観的な今思いついたんですけど、この頂点をこっちに移してからこっちに移るのがこっちに移って・・・同じ位置に移る。</p>	<p>AをやってBをやる？BをやってAをやる？</p> <p>もう少しやってみて</p> <p>群表を書いて、特別な性質を感じますか？特別な性質がありますか？</p> <p>それは群なので当たり前、群としての何か性質持っていますか？</p> <p>群の性質で、忘れていないものないですか？群の性質はたくさんあるわけではないから気付く方法ありますか？演算表の特徴という観点で？計算しているときに気が付きませんでした？</p> <p>そうですね～対称ですね。そういう性質を言って下さい。～群的に。</p> <p>そうです。可換群ですね？それを計算ではなく、図形からどのようにして可換群であると気付く方法がありますか？図では可換群であるという性質はどう現れますか？</p> <p>どうしてですか？</p> <p>普通はなかなかそうはいかないですね。けど回転して可換になるのは特別な関係にある。</p> <p>軸に関する180度回転でしょ？つまり、軸が特別な関係にあるのでは？</p> <p>うん。直交してればね。・・・可換。(少し待ち)</p> <p>証明しなければね。</p> <p>空間でもそういうことが成り立つのでしょうか？(平面事象から空間事象へ類推)</p>

<p>(証明を続ける)・・・成り立ちます。 (笑)</p> <p>悩みながら証明を続ける</p> <p>x軸に関して180度回る・・・</p> <p>あっ！変わりません。はい、変わりません。y座標は変わります。 ・・・証明が続く・・・</p> <p>(悩む)</p> <p>(みんなで考える) たぶん・・・図が分かりにくいから・・・図を改善したら？ そうやな!!</p> <p>(2人で試行錯誤している)→学生なりの結論を出し、また証明をチャレンジ 数学的な説明をする。</p> <p>だから、順番を変えても、同じであると言える。</p>	<p>なぜかですよ？ (先生は待っている) x軸は変わるのか？</p> <p>x座標は変わるのか？</p> <p>z座標はどうなってるの？さっきx軸に関して回転したよね？z座標は不変なの？</p> <p>助け船を出してあげて・・・(周りの学生に)</p> <p>君(見学している女子学生)が書いてみてよ。</p> <p>今の考えたことを説明してみて。</p> <p>はい。(うなづく)</p>
---	---

(付表 3)

時間	学生の活動・言動	教授の言動
0分	今日は閉集合について話をします。	
17分	位相空間です。(なぜ空間の確認があるのか分かっていない) 定理 5.2 の『 \rightarrow 』を示します。 ・・・定理 5.2 を証明・・・ 定理 5.3 の『 \rightarrow 』を示します。 A は Y の部分集合とする。A は Y の閉集合であるから、A でないものは Y の閉集合である。	扱っている空間は何ですか？ 位相空間ですか？距離空間ですか？ うなづく
23分	・・・証明続ける・・・ 「閉集合なので、...こう言えるんですよね？」	最初の行の落ち着きが悪いね。 仮定と理由と前提をはっきりさせるために正しい日本語を書くべきだね。
28分	(アドバイスを聞いて、あまり理解できていない状態、どのような手が必要なのか分かっていない) A \cap Y = B を示すには「含む含まれる」を示せばよいので・・・	「閉集合だから言えるわけではないですよね。」
35分	示すべきことはこれでした。(証明を追うことに必死で近視眼的になっていた) 定理 5.3 の『 \leftarrow 』を示し始める。 あとは同じ証明でいけますよね。	今の示すべきことを確認しよう！
	・はい。(そうやったんや。と心の中で思う \rightarrow ちなみになぜかは分かっていない) ・さきどりの式を書いて、その式で悩んでいる。(ノートを理解していないのがばれた) ・・・証明終了・・・	はい。さっきの式は閉集合、開集合に関係なく成り立っているものです。

調査へのご協力をお願い

奈良教育大学教育学部数学教育講座 市原一裕
奈良教育大学大学院教育学研究科 芝野雄大

近年「理系離れ」が叫ばれる中で、「数学教育における「わかる授業」とは何か」ということに焦点を当てた、吉田明史教授（奈良教育大学）を代表者とする下記の研究プロジェクトが、平成19年度に立ち上げられました。

科学研究費補助金：基盤研究（A）

わかる数学の授業を構築するための基礎研究 ～小中高接続の重点化を通して～

研究課題番号：19203037

<http://kaken.nii.ac.jp/ja/p/19203037>

上記の研究プロジェクトの一環として、私たち2名は、わかる算数・数学の授業を構築する上で「教師が児童生徒の「わかる」を判断する判断方法の研究」が必要不可欠であろうと考え、またさらに、その研究のための実験形態としては「ゼミ（発表形式）」が最も適切であると判断し、研究を進めることを計画しています。

より具体的には、3回の実験ゼミ（発表形式）を研究協力者の数学者の指導のもとに行い、その後、協力いただいた数学者へのインタビューを行うことを計画しています。これらの実験とインタビューを通して、まず明らかにしたいと考えているのは、「数学」のプロフェッショナルである数学者が「学生の「わかる」をどのように判断しているのか」および「(そのような判断に基づき)どのように指導をしているのか」ということです。

さらには、これらから考察されたことを基にして、児童生徒の「わかる」を判断する一般的な枠組みを構築し、支援方法などの指導原理を確立することを目指しています。

具体的な研究協力の内容に関しては別紙にまとめさせて頂いています。ご面倒なお願いを致しまして大変申し訳ありませんが、私どもの趣旨をご理解の上、御協力の程、宜しくお願い申し上げます。

資料 2

「教師が生徒の「わかる」を判断する判断方法の研究」のための 実験ゼミとその後のインタビューについて

(1) 調査の主体：

科学研究費補助金基盤研究 (A)

「わかる数学の授業を構築するための基礎研究～小中高接続の重点化を通して～」(研究代表者：吉田明史 (奈良教育大学))

研究分担者：市原一裕 (奈良教育大学)，研究協力者：芝野雄大 (奈良教育大学大学院)

(2) 実験ゼミ指導およびインタビュー協力者：

篠原弥一教授 (関西学院大学)

小森洋平准教授 (大阪市立大学)

松澤淳一教授 (奈良女子大学)

(3) 調査の目的：

「数学」のプロフェッショナルである数学者が、ゼミ形式の授業において、「学生の「わかる」をどのように判断しているのか」および「(そのような判断に基づき) どのように支援をしているのか」を明らかにすること。

(4) 調査結果の報告：

研究結果は、上記科学研究費報告書 (平成 21 年度) に記載予定。また可能であれば、研究論文としてまとめることも検討中。調査結果の原資料は、整理したうえで各研究協力者に送付。

(5) 具体的な協力依頼内容：

研究依頼者の一人である芝野，もしくは，研究協力者の指導学生によるゼミ発表に対して，指導学生に通常行っているものを出来る限り再現するように，指導をお願いします。その実験ゼミの様子は，レコーダーによる録音と，市原による筆記により，記録をとらせていただきます。それらの記録を基に，ゼミ終了後に，「発表者の「わかり」をどのように判断したのか」および「(そのような判断に基づき) どのように支援 (発問) をしたか」に注目しながら，指導者および発表者を中心とする振り返りの議論への参加をお願いします。

4-3 数学者からの提言

わかる授業 大学篇

飯高 茂

学習院大学理学部

1 はじめに

1) 授業評価

10年以上前に大学を卒業した方々、言いかえれば20世紀の大学で学部教育を受けた人にとっては意外なことだと思われるかもしれないが、今や大学でも「わかる講義」や「わかりやすい授業をすること」がしつこく求められるようになった。実際、大学によっては授業評価で学生に5点満点で点をつけさせ、その平均を算出して公表している。授業評価の点が3点を割るとだいぶ肩身がせまい。4点を超えると評判がよくて思わずにやりとするくらい嬉しい。とくに非常勤講師にとって、これらの点数は契約更新の上で大きな意味を持つことがあるという。

高校までの教育と大学での教育には質的に異なる点もあるが、その本質において変わりはない。したがって、最近の大学での数学専門教育でどんなことが行われているかできるだけ詳しく述べることは、「わかる数学の授業」を追求する本研究において有意義であろう。

2) エピソード

最初に1つのエピソードから始めよう。

フィールズ賞を受賞された小平邦彦博士は、自伝「ボクは算数しかできなかった」(日経サイエンス社、昭和62年刊)54ページで、東京帝国大学物理学科2年生のときの思い出を次のように書いている

「天文学の萩原先生の講義を聴いたが、ものすごいスピードでさっぱりわからなかった。講義が済んで小使い室でお茶を飲んでいると、先生もお茶を飲みに来られて『どうだ、君、わからなかったろう』と大得意であった。これで講義は必ずしも学生にわからせるためにあるのではないと悟った。」

小平先生はその当時も鳴り響いた秀才であり、かつ帝国大学数学科を優等で卒業してから物理学科に入り直した2年生なのである。そんな大秀才でも理解できないのが萩原先生の講義なのだからましてやほかの学生は理解できなかったに違いない。私は東京大学の理学部に勤務した時代に小平博士とよく喫茶店で一緒にお茶を飲み、先生から面白い話を聞いたのだが、萩原先生の難解な講義のことを繰り返し話してくれた。

あらためて考え直してみると今なら見ることがある。当時、秀才の誉れの高い学生が入ってきたという話を聞いて「彼を驚かせてやろう」という茶目っ気が萩原先生にはあったに違いない。また、小平先生も理解不能な講義に接してそれなりに大きな学問的刺激を受けたのであろう。では、ほかの学生はどうであったか、何も分からない講義を聴く羽目になり結果的には、単に耐えに耐えて時間を過ごすという空しさを感じた学生もいたことだろう。小平先生は数学で十分な学識を身につけ物理学科の学生とはいえ、数学の学術論文を書いているほどの人である。だから一般的に大学の講義の善し悪しをいうための材料には使えない。しかしこのエピソードから萩原先生という理論天文学の泰斗とすでに数学者となりつつあった小平邦彦先生とが真剣勝負で向き合った風景が見えるようではほほえましい。今の大学ではこのような講義のやりかたはもはや許されない。時代の変化というか、なんというか、やるせない思いもある。

萩原先生も大変な秀才でかつ自信家であった。学生の頃、「将来、数学を専攻するか、理論天文学をするか」でだいぶ悩んだ。結局、天文学者になったのだが、天体力学で偉大な業績を上げた世界的な学者である。先生が日本語で書かれた天体力学の本の序文で、「自分が天文学でなく数学を専攻していたら、現代数学はどのような展開をしたのだろうか」と回顧されていた。このような強烈な自信、または自負は日本人ばなれしている。萩原先生は晩年、天体力学をまとめた英文著作を完成させた。大部な本で7巻を超えていたと思う。私が理学部で助教授の頃、昔あこがれた萩原先生にお目にかかったことがあった。私は緊張のあまり「先生の天体力学を読み非常な感銘を受けました」と口走った。本当は本の序文しか読まなかったのだが、そのことは言わなかった。その結果、萩原先生は非常に喜ばれ英文の天体力学の本が出版される度に私に送ってくださった。今それらは私の書棚の肥やしになっている。

3) 第二のエピソード

W大学の大学院を出て、G大学付属の高等科で数学の先生をしている方のはなし。「ぼくが大学で受けた講義は、鉄則というシリーズで受験本をよく出されていた T 教授が担当されました。ガロア理論を含む代数の講義でしたが先生は話がうまく、声も大きくよくわかる名講義です。しかしこれで数学は分かったとはいえないんです。わかった気になるだけでした。ほかの数学の先生の講義は難しくて良くわからないんですよ。これではだめだと思って本を買って友達と一緒に読んで考えたんです。だから、結果として下手な講義の先生の方が勉強になって、良くわかりました」

聞いていて分かった気になるだけの講義では何にもならない。数学では講義を聴くだけの受け身の態度では何も身につかない。数学がわかるようになるためには、強いられてでもいいから、自分で能動的に考えわかる努力を必死にする必要がある。強制的に考えさせるには、受験の圧力が有効であることは確かであろう。試験とか受験勉強とかで数学が嫌いになることも多いが、逆に受験勉強がきっかけで数学が面白くなったと

いう生徒も少なくない。

私が受験勉強をしていたのは1960年代だったのだが、受験の年になった1月の末に「数学難問題集」という本を買って問題を解こうとした。やってみると本当に解けない問題が多くてこれには参ったと同時に感心もした。数学というのは難しいものだとしみじみ思った。著者はW大学の市田教授で、古典的な代数幾何の解説書を書かれていたことを後に知った。縁とは不思議なものである。今は学生の気質もだいぶ違ってきて入試の勉強に興味を持たない人が多いようだ。1つの原因は大学入試センター試験のような共通試験で大幅にマークシート式が取り入れられ、そのための特別な訓練が必要になったからであろう。

2 大学での数学

1) 講義と勉強

大学で学生に数学を勉強させようとしても入試圧力は使えない。しかし、数学の先生は本質的に試験が好きなので、大学の先生も中間試験、小テスト、期末試験などの試験を多くして学生を勉強に追い込むのである。ところが期末試験のとき、入試問題のように考えないとできないような問題を出せない。たとえ出してもほとんどの学生が解けないので無意味なことになってしまうのである。そこで定型的な問題をあらかじめ講義で説明しておき、学生に事前練習してもらった上で実際の定期試験ではほんの少し変えて出題する。そうするとかなり得点できる。このようにして8割以上の学生が単位をとれるようになる。G 大学でも20世紀の頃は半数の学生が留年しても問題にならなかったが、21世紀の今は9割近くを4年で卒業させねばならないという見える圧力があるのである。

私は20年以上にわたって線形代数の講義を1, 2年生にしてきた。どうしたら学生が本当にわかるかさまざまな工夫をしてきた。8割の学生に分かってほしいと思いつけてきた。しかし5割の学生に分かってもらうことがいかに困難なことか、期末試験の採点をするとき、いつも反省に反省を迫られる。一方的な講義だけでは、学生に考えさせることは難しいから講義中に学生に問いかけをするし、また小問をやらせる。小問を出してできる学生にやってもらうのは簡単だが小問が理解できない学生が少なくないので、できる学生に自発的にやらせるだけでは落ちこぼれを防ぐことにはならない。そこで、ランダムに指名して学生にやらせるようにした。分からない学生にやらせるのだから彼らはすぐに「わかりません」という。「大丈夫だ、やり方を教えるから」と言ってヒントを出す。やり方さえ分かれば、計算すればできる問題ばかりだから何とか解ける。しかし、あたらぬ学生が退屈して騒がしくなるので、少し対策を工夫し黒板の前で解く問題を2, 3人でやってもらうことにした。すると、わからないながらも相談したりして結構分かってくることに気づいた。これがわかっただけでも大進歩である。学生の人数が多い上に講義すべき内容はたくさんあるのに時間数は少ない。8割の学

生にこれは面白いと思わせるほどに分からせることは、実際問題として至難の課題である。

3 数学基礎セミナー

1) 解析概論

G大の数学科には「数学基礎セミナー」の時間がある。入学時に数学科の1年生を7, 8人からなるグループに分けこのグループをホームルームと呼ぶ。略してルームとも言うが、各ルームには数学の先生が1人ずつ割り当てられる。ルーム単位でセミナーをするのである。そのやり方はルーム担当者によってだいぶ違うのだが、私は一貫して、高木貞治著『解析概論』（岩波書店）をテキストとして用いてきた。

解析概論で用いられている漢字は難しい上に文体は擬古文的で学生にとっては、本書はむしろ外国語の数学書に近い。だから個人ではまず読めないのだが、セミナーとしてやれば少しずつでも理解できる。少しでも分かってくれば数学のおもしろさがわかってくる。

新入学生に初めて接するのは、入学式の後の時間である。2009年4月8日、入学式典、写真撮影、教員紹介などが終えた後で、ルームで集まってもらいと、男子6名、女子3名であった。とりあえず2人ずつで組を作ってもらい、各組には『解析概論』の最初から1ページ前後ずつ割り当てる。はじめに本の最初の12ページをコピーして配布した。後で各人に『解析概論』を大学から購入してもらい配布した。予算は学科の教材費である。

学生からすれば、国語として読むだけでも難しそうな本を渡され、新学期の月曜の1限からセミナーがあり、そこで発表することになるのだから、大変な事態である。最初に、次のような注意をしておく。

- 数学基礎セミナーでは、学生さんが勉強し、内容を数学として理解し消化して黒板を使って説明します。
- 組の2人であらかじめよく相談してください。そして分担を自分たちで決めて発表します。発表のときは数学の先生になったつもりで話してください。
- 先生や友達が聴いてくれるのですが聞き手は何も知らないことにして、わかっていそうなことでも詳しく説明してください。
- 原則として、先生が教えることはありません。考える方向を指示することだけです。
- 間違った議論になれば、間違いであるといいますが、どこが間違いかは、学生自身が考えて正しい議論になおす必要があります。
- セミナーの点は次のようにつけます。持ち点は20点。出席すれば毎回5点追

加, 発表すれば2点, 自己都合で欠席すると-10点。病気のときは, 0点。また遅刻すると, 10分刻みで1点ずつ減点。

2) 自然数

2人の男子学生が担当した。次回の人にノートをとってもらった(オフィシャルノートと呼んでいる)。学生は最初のセミナー発表なので緊張しながら「数の概念」からはじめて, 解析概論をそのまま受け売りの形で説明する。私は当然のことながら機嫌が悪くなる。

「そんな説明では, 数学的な意味が明確でない。君たちは解析概論が講義された時代とは違い, 高校で集合論をやってきたのだから, 集合を使って整理して自然数を説明してほしいね。自然数全体の集合は, どんな記号を使うのだったかね。太字のNを使うのが現代数学の常識です。

1は自然数である, ということが一番大切だね。それを黒板にしっかり書いてください。」

私が説明するときは, 自分で黒板に書かない。口述筆記の要領で学生に黒板に書かせる。それをほかの学生はノートにとるのだが, 内容が分からないときは学生同士でどんどん質問し議論している。私が板書しても学生はノートをとるが分からなくても質問をしない。これは良くない。学生に書いてもらう形にするだけで質問がぐっと増えるのである。

次のように進む。

「1は自然数である」の内容を集合の記号で書くと, $1 \in N$ です。ずっと簡単に書けるでしょう。書いてみてください。元が属するという記号 \in と, 集合の部分集合を表す記号 \subset は似ているけれどだいぶ違うね。

自然数の大切な第二の性質は,
 n が自然数なら, $n+1$ も自然数である
ということだね。これも集合の記号で書くと簡単になるね。

$$n \in N \text{ から } n+1 \in N.$$

定義によれば

$1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$ などが自然数ということになるね。
しかし, これでは使いづらいから, 順に2, 3, 4などの記号を使うようになったのです。」

こういった説明を, 学生は感動をもって受け入れてくれる。自然数が理解できるようになってよほどうれしいのだろう。

哲学者で数学者であったデカルトが, 「 $3+2=5$ 」を自明な命題の例としてよくと

りあげていることを話す。

「 $5 = 4 + 1$ 」は、単に5の定義を書いただけ、と言えるが、「 $3 + 2 = 5$ 」は定義とは言い難い。だから、「 $3 + 2 = 5$ 」はもっとも簡単な定理と言ってよいのかもしれない、など。

3) 整数

次に整数の説明に入る。「負の数,たとえば, -3 は一体全体なんだろう」といった質問はしない。これを言い出すと,時間がかかって収拾がつかなくなるからである。そこで,

「 $3 + (-3) = 0$ になるのというのが -3 の意味だね。」
といった話で誤魔化しておく。次ページに学生のノートを載せる。

4/13 (月)

1. 数の概念

<自然数> 1, 2, 3, ... の数
場合によっては 0 を含めることもある
 $\{1, 2, 3, \dots\}$ は自然数の集合 \mathbb{N}

< \mathbb{N} の定義> ① $1 \in \mathbb{N}$
② $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

$$2 = 1 + 1 \in \mathbb{N}$$

$$3 = 1 + 1 + 1 \in \mathbb{N}$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 \in \mathbb{N}$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \in \mathbb{N}$$

⋮

<整数> • 0 とは $1 + 0 = 1$ となるものである

$$1 + 1 + 0 = 1 + (1 + 0) = 1 + 1$$

$n + 0 = n$ となる性質をもつ。

• -1 とは $1 + (-1) = 0$ を満たすものである。

• $-n$ とは $n + (-n) = 0$ を満たすものである。

↓

整数とは 1, 2, 3, ... と 0, -1, -2, -3, ...

整数全体の集合を \mathbb{Z} とかく。

{ 独語 Zahlen
英語 integer という。
仏語 numéro

4) 分数

そして、有理数に入る。

「分数の意味は一体全体何だろう？縦横に書かれた2つの数の間に横棒を引いたのが分数だけど、横棒は何を意味するのだろうか」

など、質問をしながら考えさせる。

「分数が等しいことと比が等しいこととは同じだ。分数は計算できるが、比はできない、それは数学の習慣なのだ」

などと説明する。分数の意味を考えさせることは大切である。高校では、虚数の分数が結局は虚数で書ける（虚数になる）ということ共役複素数を使って説明するが、教科書では「虚数の分数」の定義がない。分数があれば自ずと数の意味がわかるという前提で書かれていて、定義がされていない。実際、 $(2 + 3i) / (3 - i)$ と分数で書いてあるがその意味は書かれているわけではない。

この事実に触れると学生に衝撃が走る。そして分数とは何か？を問いかけ、小学校の時以来、分数は何となくわかったつもりでいたが、言われてみると実は分かっていないことに気づかせる。こんなことを考えさせることはとても教育的なことである。

整数の分数が有理数である。有理数は10進の小数表示で書くと、有限の小数か、循環小数になる。このことは分数の計算から簡単にわかる。

具体的な分数を与えて、その循環小数を求めることは、数学的には意味のあることでそのいくつかの性質は、初等整数論や群論の初歩と関連が多く、ここから多くの計算問題ができる。

<有理数> 2つの整数 a, b を用いて,
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ (ただし, $b \neq 0, d \neq 0$)
 $\frac{a}{1} = a$ とかく

• $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$ (約分) の証明 • (ただし, $m \neq 0, b \neq 0$)
 証明) $ma \cdot b = mba$ を示せばよい
 $m \neq 0$ より両辺を m で割って
 $ab = ba = ab$ (積の交換法則) //

有理数全体の集合を \mathbb{Q} とかく。
 (rational number ※ ratio: 比)

<小数の定義> + 進数で考える
 小数点の左に有限個の数が並び, 右には無限個の数が並び。
 ただし, 右に 0 が連続的に続く場合は省略する
 $12,000 \dots = 12$ これは単に 12 と表す

$\frac{3}{7}$ を小数で表す
 $\frac{3}{7} = 0.42857142857142 \dots$
 $= 0.\underline{428571}$ (循環小数節)

長さ 6

↓ 2つに分けて足すと

$$428 + 571 = \underline{999}$$

↓ 3つに分けて足すと

$$42 + 85 + 71 = 198 = \underline{99} \times 2$$

5) 無理数

「有理数でない数が無理数である」といつてから、「有理数と無理数をあわせて実数とよぶ」と実数を定義すると、循環論法になり実数の意味がわからなくなる。循環しない無限の10進小数を無理数というとするれば、矛盾はおきないが無限に続く小数という強面の概念が出てくる。

しかし、そんなことで学生は悩まないで、寝た子を起こすような質問はなるべく避けて次の問題をだす。

問題 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明してください。

すると、

「自然数 n, m を用いて $\sqrt{2} = n/m$ と書けると仮定して、矛盾を導けばいいのです。」

と模範的な解答がかえってくる。これは我が国の高校数学教育の成果である。だから、この問題は出さない。代わりに関連した問題をたくさん出す。

問題 $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明してください。

問題 $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明してください。

問題 $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明してください。

問題 $\sqrt{7}$ が無理数であることを証明してください。

問題 $\sqrt{10}$ が無理数であることを証明してください。

問題 $\sqrt{11}$ が無理数であることを証明してください。

など。そして、はじから順にあてて1週間の宿題とする。

次の週には学生が解答を黒板に書いて待っている。しかし

「 $\sqrt{3} = n/m$ から $3m^2 = n^2$ を導く」ところで、

「 n^2 が3の倍数なので、 n も3の倍数である」と説明する。

「このこと自身も証明がいります。証明してください」と言って学生を責め立てる。

すると、 n を偶数と奇数に分けて考えるという学生が数年に1人ほど出てくる。これは、学生同士の議論に委ねると、案外簡単にそれではだめなことがわかってくる。そのうち、3で割ったあまりを考えるとうまくいくことに、自分たちの話し合いで分かってくる。

このようなことがわかる過程をしらべることは興味ある課題であるが、詳細はノートにとられていない。ノートにはごくきれいに整理されて書かれているだけなので、その過程が明らかにできない。ビデオ取りして学生の話し合いで正しい解答にいたる筋道を記録するといいたいだろう。

やりかたがわかると「 $\sqrt{5}$ が無理数であること」などはきちんと、しかも得意になってやってくれる。次いで、「 $\sqrt{6}$ が無理数であること」を出題すると、同じ手間をかけてやるのが多いのである。学生の説明が終わってから、

「 $6m^2 = n^2$ については、 n が偶数を示せばいいのですね」

とコメントすると、しばらくたってから、「なるほどそうですね」と学生の反応が返ってきて、かれらの感動が伝わってくる。

古代ギリシャ人は、 $\sqrt{2}$ が整数の比で表せないことに気づいて恐怖を覚えたという。

実際に、 $\sqrt{19}$ まで、平方数でない数の平方根が無理数であることを検証した記録が残されているという。とくに素数の平方根が無理数であることは、実際に同様の計算をすればわかるに違いないのだが、証明することは大変そうである。しかし、ギリシャの数学者は互除法を考え出して、それを元に自然数の素因数分解の一意性まで証明した。古代の数学としては、実に偉大な成果である。実際、それから素数の平方根が無理数であることが直ちに示された。

有理数は、小数に展開すると有限の小数か、循環する無限小数で表せる。このことを学生はよく知っている。そこで、 $1/7$ 、 $1/13$ 、 $1/17$ 、 $1/19$ について循環する無限小数で書き出してもらい、その循環節のもっている性質を確かめさせる。これは、学生のノートに書かれているとおりでである。

$1/7$ の循環節は 142857。これを2つに分けて足すと

$$142 + 857 = 999$$

これは感激の材料である。さらに3つに分けて足すと

$$14 + 28 + 57 = 99$$

ここでも9が並ぶ。 $1/17$ 、 $1/19$ 、 $1/23$ などについて指示すると、学生は夢中になって計算し、感動してしまう。

そこで、時間があれば、 $1/21$ 、 $1/39$ 、 $1/51$ などもしてもらおう。

ついでにいうと、 $p > 7$ の素数について、 a/p ($a < p$)の循環節の2分割和を求めると9が並ぶことは1801年にロンドンの学会誌でGoodwynによって証明されたそうである。

分数 $a/3p$ については、私の本『数の不思議世界』（岩波ジュニア新書）に詳しく書いてある。分数 $a/9p$ の循環節の2, 3分割和についてはゼミの卒業研究（2009年度）で詳しく調べた。循環節の2, 3分割和を求めることは、計算の原理は簡単でも実際の筆算は面倒である。しかしエクセルを用いれば簡単にできる。

$$\frac{1}{17} = 0.\dot{0}588235294117647$$

長さ 16

↓ 2つに分けて足すと

$$05882352 + 94117647 = \underline{99999999}$$

↓ 4つに分けて足すと

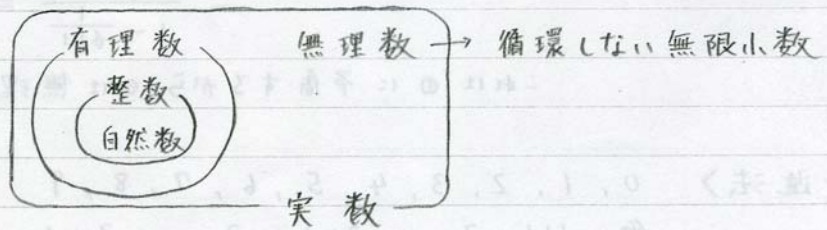
$$0588 + 2352 + 9411 + 7647 = 19998 = \underline{9999} \times 2$$

- 一般に $\frac{1}{p}$ (ただし $p \neq 2, 5$ の素数) の循環節の長さは、 $p-1$ の約数である。

- 長さが偶数の時は、半分にして足すと 9 が並ぶ
- 長さが 3 の倍数の時は、3 分割して足すと 9 が並ぶと思う
- 長さが 4 の倍数の時は、4 分割して足すと 9 が並ぶか、又はその 2 倍になる

<有限小数> 有限個の数で表された小数

分数は有限小数又は循環小数で表せる



- 循環小数が有理数であることの証明

証明) 例, $0.\dot{3}1\dot{4}$

$$x = 0.\dot{3}1\dot{4} \quad \text{--- ①}$$

$$1000x = 314.\dot{3}1\dot{4} \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \quad 999x = 314$$

$$\text{つまり } x = \frac{314}{999}$$

∴ $0.\dot{3}1\dot{4}$ は有理数である。

6) 連分数

ところで、古代ギリシャ人は平方根の無理数性の証明には幾何学的方法が使われたこという。その方法は本質的には代数であり、簡単なことなので次に説明しよう。

α を正の数とするとき、その整数部 $[\alpha]$ を N とする。

$\alpha - N$ が 0 なら終わり。正ならその逆数を α_1 とおき繰り返す。

これが、有限回で終われば α が有理数になることがわかる。無限に続いたら α は無理数である。

例 $\alpha = \sqrt{2}$ のとき、 $N=1$, $\alpha_1 = 1/(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1$. $N=2$, $\alpha_2 = \alpha_1$

になるので、ずっと 2 が続く。したがって、 $\sqrt{2}$ は無理数になることがわかる。

そこで、平方根の計算の練習もかねて、次の問題を出す。

問題 $\alpha = \sqrt{2}$ (答えは 1, 2, 2, 2, 2, ...)

問題 $\alpha = \sqrt{3}$ (答えは 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...)

問題 $\alpha = \sqrt{5}$ (答えは 2, 4, 4, 4, ...)

問題 $\alpha = \sqrt{7}$ (答えは 2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, ...)

問題 $\alpha = \sqrt{10}$ (答えは 3, 6, 6, 6, ...)

問題 $\alpha = \sqrt{11}$ (答えは 3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, ...)

問題 $\alpha = \sqrt{13}$ (答えは 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, ...)

問題 $\alpha = \sqrt{15}$ (答えは 3, 1, 6, 1, 6, 1, 6, , ...)

これらについて同様の計算をすると分数の時のように必ず循環する。しかし、 $\sqrt{13}$ などのときは、かなり面倒な計算がでてくる。しかし正しい計算の結果、2 番目に回帰するという結果になるので達成感が大きい。平方根の有理化としては絶好の練習問題になる。

さて、一般に平方数でない d について、 $\alpha = \sqrt{d}$ とおく。 $N = [\alpha]$ として $\alpha_1 = 1/(\alpha - N)$ とおけば

$0 < \alpha - N < 1$, $1 < \alpha_1 = 1/(\alpha - N)$ を満たすので、かの有名なガロアが高校生の頃発見した定理が使えて、最初から循環することがわかる。

7) 数の連続性

次に数の連続性を学習する。数の連続性は、デデキンドによる切断の公理から考えるのが伝統的である。

ここでは学生のノートを参考のために載せるにとどめる。

このようなセミナー風の授業が、昔、すなわち私が学生のころあればどんなに良かったことだろうか。こういう教育の機会が用意されれば、私はもっと早い時期に「数の連続性」が理解できたに違いないと思う。今の学生はこのように手間暇をかけた教育がなされて幸せそうである。しかし、冒頭のエピソードにあるように親切過ぎる教育は、それ自身問題があるのかもしれない。

分数が有限小数となる必要十分条件

例, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \dots$

分母を素因数分解すると、素因数が2と5である

<無理数> $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}, \dots$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\pi = 3.1415926535\dots$$

(産医師異国に向こう産後やくなく産婦御社に虫さん人間に鳴く)

• $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ が無理数であることの証明 •

証明) $e = \frac{a}{b}$ (a, b は自然数で互いに素) であるとする

$$b!e = b! \times \frac{a}{b} = (b-1)!a \quad \text{I} \text{ 整数} \quad \text{--- ①}$$

$$(e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \text{ とか(する)})$$

$$\text{I} \text{ 故 } b!e = b! \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{b!}\right) + b! \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \dots\right)$$

整数 ✓

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+2)(b+1)} + \frac{1}{(b+3)(b+2)(b+1)} + \dots$$

$$< \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b+1-1} = \frac{1}{b}$$

これは ① に矛盾するから e は無理数 //

<十進法> 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$$\text{例, } 1+1=2, \quad 2+1=3, \quad 3+1=4,$$

$$4+1=5, \quad 5+1=6, \quad 6+1=7,$$

$$7+1=8, \quad 8+1=9, \quad 9+1=10 \text{ とかく}$$

9 を超えると桁が増える性質をもつ

5/11 (月)

松本、田中

2. 数の連続性

$\mathbb{R} = \{\text{実数}\}$

① $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$

② $A \cap B = \emptyset$ CAP: 共通部分

③ $A \cup B = \mathbb{R}$ CUP: 和集合

④ $x \in A, y \in B \Rightarrow x < y$

(A, B) を Dedekind の切断 (cut) といふ。

A を ^{した}下組, B を ^{した}上組 とする。

$\delta \in \mathbb{R}$ に対して, A, B を次のように定める。

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \delta\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \delta\}$$

(A, B) は切断である。このとき $\delta \in B$

δ は B の最小数 (minimum), A に最大数は存在しない。

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \delta\}$$

$$B' = \{y \in \mathbb{R} \mid y > \delta\}$$

(A', B') は切断。このとき $\delta \in A'$

δ は A' の最大数 (maximum), B' に最小数は存在しない。

○ Dedekind の定理

実数の切断は、下組と上組との境界として

一つの数を確定する。

切断 (A, B) が与えられたとき、一つの数 δ が存在して、

(A, B) または (A', B') になる。

算数・数学教育における「意味」の復権を

——数学がわかるということ——

一楽重雄

横浜市立大学国際総合科学部

1. はじめに

私が算数を最初にならったときに具体的にどのようなようであったかはもう記憶にないが、「数」は直接的に「もの」と結びついていて、たとえば、数とその足し算については、「3足す5」は「3個のりんごと5個のりんごをあわせると8個になりますね」というような具合であったに違いない。そこでは抽象的な数は具体的な物と対応させることによって、足し算の意味が捉えられていた。しかし、小学校の高学年に進み、分数の割り算くらいになると、その意味を具体的な物に対応させて理解するのが難しいこととなり、むしろ、ひとつの手続きとして「分子分母を逆にしてかける」というように覚える。意味の理解ではなく手続きの記憶によって問題に解答するすべを身につけていったのではないだろうか。

中学、高校と進むにつれ、数学の抽象度は高まり、数学概念と具体的なものごととの対応を考えることは少なくなってくる。数学の勉強にもいろいろな側面があり、一概に「理由はわからなくても方法を覚えて計算する」ということを否定することはできない。しかし、数学教育の現状を観てみると、今は「意味の復権」を図るときではないか。それによって、数学嫌いを減らすことにつながると思う。

たとえば、日本の中学生では「確率」の計算はできるが、「確率」概念の意味がわかっていない生徒がほぼ半数存在することがわかっている。ここに示されているのは言わば氷山の一角であって、日本の数学教育の姿がクローズアップされているように思う。他の分野でも「できる」けれども「わかっていない」ことがままある。このことは本研究の「わかる授業の実践的研究」の中でも明らかにされている。

ここでは、まず、「意味理解」と「手続き理解」について整理する。

2. 数学がわかるということ

数学がわかるということは、どういうことか。一口で「わかる」と言っても現実にはいろいろな意味での「わかる」があり、いろいろな「わかりかた」がある。また、それぞれのわかるに深さもある。

ここでは微分の場合を例にとり、これらを整理する。

(ア) 論理的理解 ——あるいは、定義的理解——

- (イ) 数学的意味理解 ——あるいは、概念理解——
- (ウ) 周辺の意味理解 ——あるいは、見通し理解——
- (エ) 関連性理解 ——あるいは、深い理解——
- (オ) 手続き的理解 ——あるいは、「できる」こと——

(ア) 論理的理解

これは、通常の「数学を理解する」という言葉でイメージされるもので、数学理論を数学としてそのまま理解することを指す。

微分概念を例にとると、微分を学ぶ際の通常の順序は、まず、微分係数の定義からであろう。その定義は、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a))/h$$

というものであり、これを理解することが**論理的理解**である。この場合の万全な理解のためには極限概念を理解することが含まれる。しかし、実際にはそれはなかなか難しいことであり、場合によっては単に式の記憶にとどまるかも知れない。ここではその点は問題にせず、「理解」という表現をとる。

一般に極限概念の完成はコーシーによるとされているが、コーシーは1789年生れでありニュートン・ライプニッツよりずいぶんと時代が下っている。また、数学史の専門家の中には、コーシーにいたっても、まだいわゆるイプシロン・デルタ論法の本質に達していなかったという主張をされる方もある。それだけ極限概念は難しいものなのである。したがって、極限概念を生徒に理解してもらうには、時間をかけて順序よく解説しなければならないだろう。そうしたとしても、上の式が何を意味するか実感を持ってわかってもらうのはなかなか難しい。

(イ) 数学的意味理解 と (ウ) 周辺の意味理解

そこで、たいていは

「この $f'(a)$ という数は、関数 $f(x)$ のグラフへの点 $(a, f(a))$ での接線の傾きを表している」

と解説する。この理解が**数学的意味理解**である。すなわち、問題としている概念を、数学の範囲内でその意味を理解することである。このような解説によって、「微分」、正確には「微分係数」のイメージをうることができ、これで「わかった」と思う人は多いだろう。

また、微分は「瞬間速度」を求めることだというように、日常生活の中での対応を求めて理解を促す説明もある。直感的イメージを得るものとして有力なものであろう。(本研究[梅田]参照) これも意味理解を求めての説明であるが、数学理論の論理の中にとどまらないという意味で**周辺の意味理解**と呼ばれる。ただし、

極限の定義の意味を理解するという観点では数学的意味理解と呼んでもかまわないだろう。この例の場合のように、数学的意味理解と周辺の意味理解に画然とした区別があるわけではない。

微分を学ぶ中には、その使い方を知ること含まれる。たとえば、最大値最小値の求める方法を学ぶことである。これも微分概念に関連した周辺のものごとの理解であり、周辺の意味理解である。このような理解が進むことによって、生徒が「わかった」という気持ちを持つことは、本研究でも報告されている。(本研究[八田]参照)

極限概念がきちんと捉えられないと微分が分からないかといえ、それは「わかる」と言う言葉の意味によるわけであり、数学理論としての「数学の展開」と数学教育としての「数学の展開」とは必ずしも同じである必要はなく、むしろ、別な要素があることに注意しなければならない。実際、微分係数を「極限」概念なしに教えてしまおうとする試みもある。(本研究[岡部]参照) この試みにおいては、微分を「接線の傾きを求める」と捉え、幾何学的に接線を求め、それによって極限概念の使用を排除した。そして、微分を「一次関数で近似する」と捉え、それを用いて積の微分の公式を導いた。この場合には意味理解に大きく重点がおかれる。数学的定義がなくては数学を理論的に展開することはほとんどできないが、「定義なしに数学教育がありえない」わけではない。通常は、微分を教えるにあたってはその定義も教えることになるだろうが、逆に「定義を教えれば、生徒はわかる」ということでは決してない。特別に数学的才能に恵まれた一部の生徒を除いては、定義的理解だけではなく、そこから数学的意味理解、周辺の意味理解へと進むことによって初めて「よくわかった」と実感されるのではないだろうか。

(エ) 関連性理解

大学への数学への展望もこめて、多変数の微分、さらには多様体上での微分への見通しを考えるとという視点に立てば、微分を一次関数ではなく(平行移動によって)定数項をなくして「比例関係で近似すること」という意味理解が望ましいだろう。多変数での「比例関係」が「線形写像」に当たると考えれば、多変数での微分を「線形写像で近似すること」と捉えることに直接つながる。この見方は合成関数の微分法が、とても見通しのよいものとなり、教育的観点からは必ずしも「合成関数の微分法の数学的証明」は必要でなくなる。

一般には一変数の微分を教えるにあたって、多変数の微分までの見通しを考えることは多くないと思われるが、仮にこのような見通しをもつ場合は、**関連性意味理解**の範疇となる。関連的意味理解とは、数学の中での他の概念との関連を理解することを指す。積分と微分の関係「微積分学の基本定理」などの理解も、そ

の典型であろう。

(オ) 手続き的理解

一方、数Ⅱの範囲での微分は整式の微分に限られるから、この場合は微分するということを手続きとして捉えることも可能である。すなわち、「 x の n 乗の微分は n 倍の x の $(n-1)$ 乗」ということを手順として記憶すれば、少なくとも問題を解くことができるようになる。これが**手続き的理解**である。数学の展開という意味では邪道であるが、意味理解と上手に重ねることができれば、一定の意味のある教育となるかも知れない。

3. 意味理解を重視しよう

PISA調査や教育課程実施状況調査での質問紙調査において、日本の数学教育の特徴がよくわかる。おおざっぱに言って、どうも数学本来の魅力で勉強しようという意識は少なく、仕方なくやっているという様子が読み取れる。私は、いわゆる問題ができるかどうかという意味での学力低下の問題より、情意的な面でのこのような状況こそが改善されなければならないと考えている。現在の日本の生徒の多くが、もっといえば、おそらくは多くの教師も、数学とは「問題を解くことなり」と考えているのではないだろうか。もちろん、数学を理解しているかどうかを判定するのに問題を解くことは重要であるし、問題を解くことによって深く数学を理解することにつながる場合が多いのは事実である。しかし、問題を解くことは、そのように数学を学ぶ手段であって目的ではない。この目的と手段の混同が、生徒に数学の面白さや楽しさを伝えられない大きな原因ではないかと思う。

上のように分類したそれぞれの“理解”は、それ自体では必ずしも優劣や貴賤があるわけではなく、わかることの諸相に過ぎない。しかし、今述べたような日本の数学教育の現状を考えると、「手続き的理解」ではなく「意味理解」に重点をおいた授業が望まれるのではないだろうか。

4. 「わかる授業」のために

多くの研究授業に参加してみて、授業とは奥深いものでなかなか「これでよい」という完成形はないものだとつくつく感じたが、それは一方で授業にはいろいろな「工夫」がありうるということでもある。当然だが、その場合、生徒の状況に合った工夫が必要になる。

「わかる授業」という場合に、まっさきに浮かぶのは、「ていねいな分かりやすい説明」ということではないだろうか。もちろん、それも必要なことであることに疑いはないが、実際の生徒の気持ちにそってみると、恐らく、それだけでは問題は解決しない。数学的意味理解を求めて定義や理論の数学的説明をゆっくりと

いねいに行えば、生徒にわかりやすいかという点、必ずしもそうでないのではないだろうか。生徒がわからないと考えているその中味は多様であって、周辺の意味理解を求めている生徒に論理的説明をいくら一生懸命やってもあかぬ。無論、その逆もあるだろう。

生徒の力をどう見るかも、それだけでなかなか大きな問題になることであろう。習熟度別の授業において「数学が苦手な生徒だから、できるだけ平易にゆっくりと説明し、生徒が考える時間も十分にとろう」というあまり、生徒に余裕ができすぎて、友人とついしゃべり出してしまうような状況を見ることもあった。恐らく、これは教師の陥りやすい罠のひとつであろう。

数学が苦手であっても、その理由は多様であり、いわば脳のCPUの速度が遅い人ばかりとは限らない。そこには、いろいろな要素があるのは確実であるが、「(そこで習う) 数学を学ぶ動機」の問題もひとつの大きな課題である。的確な動機付けができると、生徒の関心・意欲がたかまり理解も進む。新しい学習指導要領では「数学的活動」が強調され、その要件として「生徒が主体的に取り組む」ことが必要とされているが、その理由はここにあるのではないかと思う。

生徒の関心・意欲を高める工夫について述べてみよう。これについては、いろいろな側面があると思うが、ここでは本研究での授業実践の中からの例をあげる。

1. 実験を利用して、生徒がとっつき易いようにする
2. 実生活の話題から問題設定を行う。
3. 作業的課題を提示し、生徒に実際にやってもらう。
4. 討議を促すために、グループ学習を行う。
5. グループ学習をある期間行い、その結果を発表する。
6. ディベートを授業に取り入れる。

特に、グループ学習の結果の発表とかディベートということは、新学習指導要領での「言語活動」の重視にもぴったりである。そして、このような活動で伸ばされる能力が「根拠を持って主張する」力であろう。新学習指導要領の新しい内容である「統計」の学習においては、特にこのような方法が有効であろう。(本研究[西村][西仲]参照)

確率概念さえしっかりわかっていないようでは、確率・統計分野で「根拠を持って説明する」ことは、ほぼ不可能である。上にあげたような学習スタイルだからと言って、必ず「身近な事象」を扱わなければならないということはない。当然、このような授業では数学概念や方法の「意味理解」が前提となる。自分がわかったと思っていないことがらを他人に説明することはできない。

5. おわりに

数学が苦手だったという人のなかに、自分にはまったくわからなかったけれど、入試に必要なから「このような問題はどのように解く」ということに徹底して、「自分の「わからなさ」を忘れて勉強した」という意味のことを述べる人がときどきいる。私の出会った人は医学部へ入学した人で、難しい入試の数学を突破したのに、本人自身は「わからない」と感じている。このような例は数としては少ないかも知れないが、日本の数学教育の問題の核心をついているように私は思う。本人にしてみれば、問題を解く“手続き”はわかるが、その“意味”がわからないということであろう。

いまや、数学学習が入試のためだけということだけではなかなか成立しにくくなっている。また、その一方、高校や大学の入試を無視して数学の授業を行うことも一般には不可能であろう。その意味において、今後入試においても「意味理解」を問う問題が多くなることが望まれるのではないだろうか。

わかる授業についての提言 ～数学者の立場から具体的な例を基に～

市原 一裕

奈良教育大学教育学部数学教育講座

ここでは、自分がこれまで長く経験した、初等・中等教育における算数・数学の授業、大学における専門科目としての講義、大学院における種々の講義やセミナー、さらに、その後に参加した様々な研究会・セミナー・シンポジウムでの講演、などによる「数学の学び」にもとづいて、その中から考える「わかる数学の授業」とはどんなものか、について、まず以下の2つの視点から私見を述べる。

・「数学の授業」がわかるのはいつか

数学の授業において、他の科目の授業と大きく異なると感じられる点は、その授業の「内容」（次節に詳しく述べる）が「いつ」わかるか、という（時系列）点である。つまり、

1. その授業時間内に「わかる」
2. （学習者自身の自習によるなど、授業後、時間をおいて）「わかる」

の2つの場合があると思われることである。

自らが学んできた経験によると、学年があがるにつれて（内容が高度になるにつれて）2.が多くなるように感じている。実際、大学の専門科目の講義など授業時間内（90分）で本当に理解することは不可能に近いのではないだろうか。

もちろん、同じ一つの講義・講演の内においても、授業を受ける個人の能力（ある数学的能力）と内容のレベルとの関係によって、どちらの「わかり方」がおこるか様々であろう。

自分の経験の中で、特に上記2.のように感じた、特に初等・中等教育において受けた授業を思い返してみる。するとその中で、より「時間が経ってからわかる」授業をつくっていたと感じた授業者に特徴的だったことは、「学習者の「学習意欲（動機）」の高め方」であった。（もちろん、授業方法（指導方法）の巧みさ、さらに、（これは 数学の授業に限

らないが) 生徒との良い関係 (人間的な魅力) も, 重要な因子であったのは確かである.)

具体例として, 実際に中学で受けた「球の表面積・体積」に関する授業を思い出す. 一般的に言えば, その授業はいわゆる「失敗授業」だったかもしれない. その時間内で「わかる」ようになった生徒は非常に少なかった. しかしながら, それが故にかえって「どうしてそうなるんだろう?」と問いかけた授業者の言葉が, 深く記憶に残る授業になっていた. その授業時間内に「わからせる」ことだけを追いかけすぎなかったことが, 一つの要因だったと思う.

さらに, 大学以降に受けた講義 (現在, 研究者として参加した研究会における講演も含めて) において, 特に上記 2. のように感じた講義・講演においては, 授業者・講演者の, 数学に関する「能力の高さ」「見識の深さ」「視野の広さ」が, 際立っていたように思う. それらにより「よりわかりたい」という動機付けが喚起され, 深く記憶に残り, ことあるごとに思い返されるようになり, いつか別の機会に「深い理解」に到達することができていた.

具体例として, 例えば, 大学院生のときにうけた「宇宙の形」に関するセミナーでの講演をあげたい. これは現在では「宇宙トポロジー」と呼ばれる分野の草分け的存在である研究者による紹介的な講演で, 非専門家向けのものであったため, 数学的な厳密な理解を求めたものではなかった. しかし, そのため, やはり講演時間内に「全てわからせよう」としすぎるのではなく, 深い「余韻の残る」素晴らしい講演だったと今でも感じている.

・「わかる数学の授業」の内容とは

いままで受けてきた授業・講義・講演を思い返してみると, 授業者・講演者が「わからせたい (伝えたい) 内容」というのは, 大きく分けると, 次の3点ではないかと考える.

1. 「事項」(知識 (定義, 背景 (歴史的, 社会的)), 定理, 公式)
2. 「考え方」(定理の内容, 定理の証明, 定理・公式の適用法・応用法)
3. 「姿勢」(哲学, 理念)

上記 1. と 2. に関しては, 前節で述べた「授業時間内でのわかり」に, 直接つながったことも多くあったと思うが, 3. に関しては, 授業時間内に「表面的にわかる」(わかった気になる) ことはあっても, 本当に「わかった」と感じたのは遥かに時間が経った後であった.

具体的には, 授業ではなくゼミ形式による指導では, 特にそう感じている. 大学, 大学

院における指導担当教官の「数学」および「研究」に対する姿勢は、自分が研究者として進み始めて、また大学教員として就職して、はじめて身にしみて実感して「わかる」ようになったと感じている。

以上、2つの視点から「わかる数学の授業」について、その性質と内容について私見を述べてきた。結論として、自らの学びの経験から、「わかる数学の授業」として次のようなものもあるのではないかと、いうことを指摘したい。

- ・ その授業時間内ではなく、いつか時間が経ってから「わかる」授業
- ・ いわゆる授業内容（知識や考え方）ではなく「数学に対する姿勢（哲学、理念）」が「わかる」授業

もしこのような授業（特に中等教育における授業）の構築に向けて、なんらかの取り組みを強いて考え提案するとすれば、それはまず、そのような教育を担う教員の「数学・数学教育に対する知識・理解の向上」ではないだろうか。特に「数学」および「数学の授業」のあり方に関して、

- ・ 現状に満足せず自ら積極的に新しいものを探し身につけようとする姿勢
- ・ 従来までの（特に自分が受けてきた）ものにとらわれることなく、新しい見方・考え方を柔軟に受け入れる姿勢

を身につけることが、「いつかわかる数学の授業」「数学に対する姿勢がわかる授業」の構築に向けての第一歩となるのではないかと考えている。

最後に、そのような初等・中等教育における「数学教育の向上」に関して、日本数学会理事会の提言を資料として抜粋し引用したい。基本的にこの提言にあるように、「数学力」の向上を第一義的に請け負っている初等・中等教育機関の算数・数学の教員に対して、数学研究者（数学者）の支援が、（どのような形にせよ）「（初等・中等教育における）わかる数学の授業」の構築には不可欠であると考えている。

資料：

日本数学会理事会提言「我が国の数学力向上を目指す」（2006年9月15日）

4. 今日、数学研究者が果たすべき社会的貢献（全5項目のうち第3項）

(3) 初等・中等教育における数学教育

初等・中等教育における数学教育は、科学技術創造立国を目指す日本としては要の事業であり、数学という学問の役割はたいへん大きい。たとえば数学教員の大学院における再教育や、算数・数学の教育課程に関する検討と助言、「出前授業」などを通じて、初等・中等教育における数学教育の質の向上に積極的に加担することは、数学研究者の責務の一つである。今後は、このような点も自覚的に担う必要があろう。

5. (日本数学会が実現に努力する) 提案（全5項目のうち第3項）

(c) 初等・中等教育における数学教育の質の向上

我が国の数学力の向上は、日本社会の将来のために根源的かつ死活的な重要性がある。そのための基盤的教育は、第一義的には初等・中等教育機関の算数・数学の教員が請け負っている。しかしながら、数学研究者も直接的・間接的に基盤的教育に貢献する必要がある。すでに述べたように、数学研究者は、数学教員の大学院における再教育や、算数・数学の教育課程に関する提言と提案を通じて、初等・中等教育における数学教育の質を高める努力を支援している。日本数学会は、一例を挙げれば、2005年10月に教育課程の改訂について、中央教育審議会に意見書を提出したところである。また、これまで「出前授業」を含むいくつかの事業で、数学研究者ならではの初等・中等教育における数学教育に対する提案や、学校教育の現場での算数・数学の面白さの紹介などを行ってきた。これらの活動や事業をさらに拡大強化し、生徒の算数・数学に対する理解を深め、計算力のみではなく、論理力や透察力を持った人材の育成を支援したい。

「わかる授業」についての提言

今岡 光範

広島大学大学院教育学研究科

はじめに

本研究テーマの「わかる授業」というものを客観的に規定しようとする、なかなか難しい。まず、誰もが共通に認める「わかる授業」の規準はあるのだろうかとか、「わかる授業」で育てたい資質は一般的なものであるかというような、普遍性の問題に直面する。一方、主観的に見れば、人それぞれに、「わかる授業」というものに対する何がしかの像があるだろう。その場合、それぞれの人がもつ像が、本質的に異なるものであってもおかしくはない。

例えば、ある概念を初めて学ぶときに、生徒にそのアイデアを発見させようとするのは「わかる授業」の主要な要素だと考える人もいれば、そうではなく、概念は先生が端的に与え、活用を通してその意義が伝わるようにすることが「わかる授業」の要素として大切だと考える人もいるだろう。または、授業の場面に応じて、それらの方法が使い分けられることが「わかる授業」として望ましいと考える人もいるかもしれない。

筆者は、本研究における分担者であり、数学研究の経歴をもつので、本報告書の企画に沿って、「わかる授業への提言」を仰せつかった。しかし、提言は苦手である。それは、何か人に物申せば、必ず、自分に跳ね返ってくるからである。特に、「わかる授業」ということに提言すれば、お前の大学での授業はその「わかる授業」になっているのかと問われ、苦しい立場に陥る破目になる。

しかし、ここは役目であると割り切って、自分の授業はひとまず棚に上げ、思いつくままに「わかる授業」に対する提言を考えてみることにする。筆者の主観的な「わかる授業」に対するイメージは単純である。それは、学ぶ者が、強制されることなく、学ぶことに集中させられてしまう授業である。ある意味で、何か魅力を感じずる授業である。しかし、そのような授業は一様ではない。例えば、指導者の優れた教授方法に引き込まれる場合もあるし、自分が興味をもつことが扱われる授業の場合もある。それを客観的に類別したり特徴づけたりすることは容易ではない。そこで、自分自身の経験を中心にして、「わかる授業」への思いを未整理のままに描写することをお許し願いたい。

1. 数学的経験から

筆者は、1960年代後半に、高校の数学教師に将来なることをめざし、広島大学の理学部数学科に進学した。当時の大学での数学の授業は、集合論を基調とする

構造主義的な方法が浸透していて、大変、抽象的な内容が多かった。最初は戸惑ったが、次第にそのような抽象的な数学が面白くなっていった。特に、位相空間の諸性質を証明することはとても面白かった。このように書くといかにも数学ができるように聞こえるが、実際はそうではなく、そのような好きななり方のために、後でずいぶん苦労した。しかし、今でも、数学の抽象性は、数学をわかりにくくするものでは決してなく、むしろ、数学を理解する上で、大きな助けになると考えている。ただ、自分で何か問題を設定しようとか、研究課題を構成しようとするとき、抽象性だけでは難しいと感じている。

高校教師になることを保留して大学院に進み、代数的位相幾何学を学んだが、トムのコボルディズム理論やアティアの K 理論など、大きな結果に魅了された。特に、幾何の対象に仮想的な「負」の要素を入れることで、それまで得られなかったことが可能になることが衝撃的であった。それは、自然数を整数に拡張する発想が、数学の専門理論でも活用されていることを知るよい例である。

大学院で、いろいろな理論を学んでいく間は順調であった。しかし、修士論文に取り組む段階になって、大きな壁にぶちあたった。それは、論文を読んで理解することと、自分で何かを作ることのギャップである。論文の整理された記述は、その基になる素朴な着想までは見せてくれない。優れた数学の論文は、人々に感動を与え、さらに知りたいという気を起させてくれるが、そのレベルの発想ができる能力を与えてくれる訳ではない。否、そのような能力を、短い時間に巧みに獲得できる人々もいて、そのような人々は一流の数学者として活躍することになる。筆者は残念ながらその器ではなかった。いろいろな論文を讀んでいながら、自分で解けそうな問題を見出すことや、具体的な問題において既知の理論を活用することのためのメタ能力ができていなかった。

結局、修士論文が出来なかったことで、このままでは終われないという思いが、高校教師をめざす道から遠ざかってしまった。その後、葛藤が続く中で、一種のコツのようなものが少しずつわかってきた。それは、優れた理論の脇道にそれぞれのレベルで取り組める問題が残されていることや、適切な具体例を入念に調べてみることで何がしかの発見のチャンスが訪れるというようなことである。すでに何本も論文を書いていた同級生に遅れること、十年以上のことであった。

このような葛藤は、数学の研究者に限ったことではないように思える。人々が障壁に遭遇するとき、必要なのは、自分で物事に取り組めるための「構成力」であろう。そのような資質が少しでも身につくようにすることが、「わかる授業」で育てたいものであると考える。それは、今日の数学教育が求めている資質に含まれているものでもある。

この自分の経験から「わかる授業」について考えるとき、次の要素が浮かび上

がる。

- (1) 授業で、課題に対する「考え方」や問題解決の「方略」を意識的に扱う
- (2) 授業で、数学を「作る」という側面を試みる

(1)は、なぜそのように考える（考えた）のか、どうしてそのことに気づく（気づいた）のか、なぜそのように判断する（した）のかなどの問いを、生徒が意識するように、授業構成に組み込んでいくことである。それらは、教師の説明の中や、生徒の発言の中に、多かれ少なかれ含まれてはいる。しかし、多くの場合、定義や性質がこうだからこうなります、こういう理由でこの性質は正しいです、といった、スモールステップのことが多い。そうではなく、もっと直接的な「方略」を教示することが大事であると考え。

例えば、高校のベクトルの内容で、内積をなぜそのように定義するのかという、よく高校生の疑問として取り上げられることがある。それを納得させようと、仕事量などの実際面を例示して説明する方法もあるが、そのためだけに内積がそのように定義されている訳ではない。むしろ、垂直の場合に内積は零になるという、垂直性に対する内積の定義の有効性が大きい。したがって、図形の問題などで、内積の垂直性に対する性質を効果的に生かす方略を重点的に扱うことが大事なポイントになる。同様に、自由ベクトルと位置ベクトルの使い分けも、多くの高校生を悩ませる。しかし、個々の問題で位置ベクトルと自由ベクトルのどちらを使うのかを、それぞれの有利さや不利さを念頭に置いて判断させることこそ、方略を育てる授業では大事である。

数学のある内容が「わかる」というのは、個々の生徒が身につけている方略の幅とも関係している。それはメタ認知と関係しているが、方略の汎用性が広がれば、その生徒は新しい課題にも柔軟に対応できるだろう。そのような方略は、それまで獲得した「考え方」や「方法」の集大成であり、獲得した概念の多さではない。したがって、「わかる授業」には、そのような方略が広がる要素がなければならない。

(2)は、構成力の育成であり、授業で何がしかの数学を「作る」活動を入れれば、より「わかる」ことが促進されるということである。むしろ、「わかる授業」では、生徒の中に、なにがしかの数学の新しいことが構成されているはずであり、それを顕在化することである。それは、今日の数学的活動や創造性の育成ということの趣旨と共通している。

中等教育の数学では、課題学習などの機会はあるが、日常的な授業では与えられた問題を解くことが中心になる。確かに、問題を解くことも「作る」活動ではあるが、一歩進めて、生徒に問題を構成させる活動を設けることはどうだろう。

例えば、単元を振り返る機会に、学んだことを使って、自分で問題を作ってみることである。生徒による問題設定を取り入れた授業は、「問題作りの授業」といわれるが、授業で生徒の構成力を育てる優れた方法である。

問題作りの授業は、長い歴史もあり、多くの実践報告もあるが、高校などではほとんど行われていない。筆者は、近年、大学の同僚や高校教師と協力して、高学年での問題作りの授業の実践研究をしている。これまでの研究で、高校生ともなると、宿題などで、学んだ内容からの問題作りを課すと、事前に問題を作る訓練をしなくても、それぞれに工夫した問題を作ってくることが示されてきた。さらに、生徒が作った問題を皆で解きあう時間を授業中につくると、生徒が通常の演習問題よりも大変興味をもって取り組むことも示された。問題を「作る」ことは、一つの作品を作る創作活動である。人間は物作りを好む。そのことを数学の授業で活用しているのである。問題点としては、先生の役割と負担の問題があるが、「わかる授業」を考える上で、問題作りの授業はオプションとして視野におくことをお勧めする。

2. 高校での「わかる授業」の経験から

残念なことに、筆者自身の高校までの数学の授業で、「わかりにくい授業」はあったが、特に「わかる授業」は経験しなかった。その点、高校の「倫理社会」で、ある先生の正に「わかる授業」を経験した。その科目の内容は、ソクラテスなどの古代ギリシャ時代に始まり、ヘーゲルやカントの哲学の解説など、決して皆が興味を示す内容ではなかった。しかし、その授業では、その内容を実に魅力的なものにするという魔術が使われていたように思う。その証拠に、同級生の多くがその授業を楽しみにしていた。

その先生は法学部の出身で、口ぐせは「僕は、本来、こんな田舎教師をやっているような存在ではない。弁護士になって、もっと立派な所で活躍していたはずだったが、家の事情で故郷に帰らざるをえず、こんなことをしている」というものだった。感じのよい先生だったが、目立つ存在ではなかった。それが、授業になると輝いてみえた。

今、なぜその授業がそんなに魅力的でわかりやすかったかということを考えることは、科目の違いはあっても、「わかる授業」のヒントになる。まず、その先生の学問に取り組む真摯な態度があったことは間違いない。その証拠に、いつも独特な表現で、難しい哲学を高校生でもわかる形で語りかけられていた。生徒として、その先生の学識の深さのようなものが伝わり、大変、魅力を感じた。もう一つは、授業の進め方である。黒板に、さらさらとわかりやすい字を書かれるのと同時に、それぞれの哲学の特徴や関係を、人や物のスケッチも取り入れたモデル図で巧みに説明されていた。そのモデル図はよく工夫されていて、試験の準備な

どでその図を見返すと、要点がすっと頭に入ってくるようなものであった。今の私の幾何好きは、そのときに始まったのかもしれない。また、大事な考え方をまとめるときに、全員ノートに写しなさいといって、口頭で数行の文章を言われ、皆それをノートに枠囲みにして書いた。そのまとめの文章が実によくできていて、図と合わせて、ノートに主要な内容が簡潔にカバーされていた。この先生以外に、そのようなノートの活用をした先生を筆者は知らない。

以上の経験から、「わかる授業」に有効な要素として、次が浮かび上がる。

- ① 教師の学問に対する取り組み（見識）と、それを生かす工夫が肝要
- ② 図を有効に使う（特に、上図なスケッチが有効）
- ③ ノートの取らせ方を大事にする（近年、粗雑になっている傾向がある！）

ここから話が逸れるが、今日、高校の授業を参観させてもらうとき、かつて自分が受けた授業と比較して、ずいぶん丁寧なものになったという印象を受ける。多くの場合、授業の進め方は穏当で、数多くのプリント資料が準備され、教師は生徒の様子をよく観察しているように見える。高校では生徒の理解を無視して猛烈に進むとよく言われるが、筆者は授業を工夫している高校の先生が多いと感じる。高校への高い進学率に対する対応が整ってきた成果かもしれない。反面、生徒の授業を受ける姿勢は受動的な面が強くなってきていると感じる。悪く言えば、自分でやろうとする意欲に欠ける面もあるが、周りが次々とやってくれるので、自分で工夫する余地も少ないといえる。その影響は、大学で、こまかく指示されなければどうしてよいかわからないという傾向として現れている。特に、自分に合った勉強方法を見いだせない学生が少なからずいる。ある意味で「学び方」を身につけてきていないのである。

もちろん、そのような面の育成は、大学教育の責任でもある。大学でも、近年、シラバスや授業評価などによって、授業改善をめざしている。しかし、高校までと違って、一つの授業の受講生が70名などは普通である。しかも、週に90分の授業が一回きりである。「わかる授業」研究は、高・大接続ということも含めるべきかもしれない。少なくとも、高・大接続ということを考えれば、今の大学の授業環境から見て、高校でも、ときには少し突き放して、自分に合った勉強の仕方を考えさせることも大事であろう。

3. 「わかる授業」における発展的な要素

これまで、1節では筆者の数学的経験から、2節では筆者の高校時代の経験から、主観的な考えを記述してきた。しかし、筆者の「わかる授業」に対するイメージは、次のような、今日の評価の観点にも対応した、誠に常識的なもので、生

徒が学ぶことに集中している授業である。

- (1) その授業で何をねらい、何がわかったかが明確である（「目標」、「全体像」）
- (2) 先生の授業展開が巧みである。（「授業構成」、「教材」）
- (3) 生徒が授業の内容をこなせる（「活動」、「理解」、「表現」、「処理」）
- (4) 授業内容に面白さや挑戦的（発展的）な側面がある（「考え方」、「関心」）

ただし、この言い方では、(1)の「明確さ」、(2)の「巧みさ」、(3)の「こなせる」という程度の規準はあいまいである。例えば、授業では、教師の説明の理解、種々の探求活動、演習、ふりかえり、宿題などいろいろな活動が行われるが、どのようになれば「こなせた」ことになるのかは、それぞれの状況による。「わかる授業」への提言としては、客観的な水準を設定し、その実現の方策を述べるべきであるだろうが、私にはできていない。

ここでは、(4)に関して、少しコメントしたい。「面白さ」とは数学的な面白さのことであるが、授業において、そのような「面白さ」が必要なことは、ほとんど異論はないように思える。しかし、「挑戦的な側面」については、「わかる授業」の規準としては必ずしも必要ないと思う人もいるだろう。筆者は、その面は「わかる授業」で必要不可欠な要素であると考え。というのは、「わかる授業」で求める「わかる」ということは、各授業での「わかる」ことを考えることと同時に、小・中・高校に渡る長い期間をかけて「わかる」ことも追求している。その場合、授業で「わかる」ようになる種子を耐えず育てるものでなければならない。そのとき、「挑戦的な側面」は大きな原動力になると考える。2節で書いた、数学を「作る」ということも、その一つである。

少し発展的で挑戦的な問題は、いわゆる知的好奇心を刺激し、解いてみようという気を引き起こす。それは、テレビ番組や新聞の記事などで、クイズ欄に人気があることからわかる。多くの人々がクイズ好きなのである。面白いクイズは挑戦的であり、解けたときの快感がたまらないことから、人々は愛するのである。

同じように、生徒が数学につきあうには、それぞれのレベルに即した、少し挑戦的な内容の刺激がとても大切である。大学生にアンケートをすると、高校までで数学は好きな科目だったと答える学生の多くは、難しい問題が解けたときの喜びを理由にあげる。彼らの多くは高校時代に数学がわかる生徒だったのであろうが、数学は苦手で、教科書の内容もなかなか理解できない生徒でも、考えてみたいと思うような設定であれば、少し挑戦的な問題でもかなり熱心に取り組むのではないだろうか。身の丈にあった、少し発展的な内容が学びに効果的であることは、例えば、ヴィゴツキーの研究などにも現れている。そのような要素の大切さは、多くの教師によく認識されていることであろう。(1)～(3)の要素に(4)の要素を効果的に統合していくことが、「わかる授業」の大切な要素であると筆者は考えている。

おわりに

数学は、最も「わかる」と「わからない」ことが明確になる学問であると考えられるだろう。それは数学の学びの特質でもあり、それゆえに、「わかる授業」という本研究の意義が存在する。そして、その「わかる」と「わからない」ことの明確さが、学ぶ者の得手と不得手を際立たせ、数学嫌いなどのいろいろな問題も生み出してきた。

「わかる」ことは、ある意味で個人の感覚であり、個人差がある。試験の成績で自分の「わかる」程度を判断することは通常行われているところであろうが、他人から見ればつまらないことに固執していると思われることにこだわりながら、自分なりに「わかる」ことにかけることも大切である。なぜなら、1節で書いたように、そのようなわかり方が、長い人生では物を言うからである。

最後に、筆者の主観的な見解を綴ってきたことを再度お詫びして、本稿を閉じる。

謝々

わかる授業のために

岡部 恒治
埼玉大学経済学部

1章 議論の前提

わかる数学の授業について考えるとき、筆者は、数学の授業の役割から説き起こすことが必要と考える。それに関して参考にするべきものは、日本学術会議数学研究連絡委員会附置 数学教育小委員会が 2003 年 7 月に発表した、“「算数」・「数学」はなぜ必要なのか” (以後「なぜ必要か」と略す) と思う。ぜひ、原文をお読みいただきたい¹。

そこに以下のような数学教育の役割があげられていた [これは筆者の解釈です。() 内は例示されているもの]。このような数学の役割を明確に意識した授業をすることが必要である。ここにあげられている項目は、新学習指導要領で強調されている数学活動によって効果的に伸ばすことができるであろう。

- ① 社会生活に必要な四則演算力や図形の認識(小学校レベルの数学)。
- ② 数値・図形を的確に把握できる数量感覚(対数)・図形的感覚をつける。
- ③ 学問記述の言語として。
- ④ 数学本来の美しさ(思い込みからの自由)を味わう。
- ⑤ 問題を解く楽しさを味わい(算額)、結果を他人に説明できるようになる(言葉と論理)。
- ⑥ 問題の本質は何か考察し、抽象化により適用範囲が広がっていく数学の働きを学ぶ。

本稿は、以上の前提の下に論じていく。

2. 教師の心得

次に教師として自分が心がけていることを、2・3述べておく。

どんな良いことを授業しようとしても、相手にきちんと意図が伝えられなければ、意味がない。だから、次の注意事項が出てくる。

(1) 不必要な記号は使わない。

以前、センター試験が終わった夜に、あるラジオ局で解説を頼まれて、一瞬詰まった。数列の問題で、問題文に「 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 」と書けば何というこ

¹ たとえば、<http://mathsoc.jp/publication/tushin/0801/kaiho81-sansuu.pdf> にある。

ともないのに、 $\sum_{k=1}^n a_k$ と書いてあったからである²。翌日、某受験産業が鬼の首を取ったかのようにクレームをつけたのは当然の成り行きだった。数学が苦手な生徒は、そういう記号だけで引いてしまうことを忘れてはいけない。

普段からそのような記号は使わなくてすむ場面では使わないように心がけるべきである。私が今回、品川女子学院で行った授業は、微分の授業でありながら、リミットの言葉は一切出さなかった。

(2) 説明の文章・発言を簡潔にわかりやすく。

昔、助手の頃、医学部志望の受験生の家庭教師をしたことがある。1年間毎週彼女にやらせたことは、問題文を3回ゆっくり読む訓練である(もちろん問題も解いた)。その結果、次の年には、数学が得点源になったのである。これは、彼女の読解力にも問題があったにせよ、数学の問題に悪文が多いことにも起因している(他の科目ではそんなことがなかった)。「悪文→問題が解けない→数学嫌い」では、たまらない。

これも昔、K出版で教科書の全科目の著者の集まりがあったとき、国語の木下順二氏は、「ほかの科目にも目を配って、助け合おう」と言ったあとで、「特に数学の著者の方は、国語に注意を払っていただきたい」と言った。これには、若干不満があったのだが、特に若い人の作った問題文はセンテンスが長く、悪文が多いことは確かである(数学以外ももっとひどいとは思うが)。

特に形容する言葉などは、その言葉を入れ替えてみたりしてわかりやすくなっているかを確認することをおすすめする。

例： 「非常においしくて嬉しい」→もし、「非常」が「嬉しい」を形容しているのなら「おいしくて非常に嬉しい」とすべき。「非常」が「おいしい」を形容しているのなら「非常においしい。だから嬉しい」とすれば明快。

(3) わかることと、厳密なことは衝突することもある。

もちろん、そういう時も、「王道はない」と進む生徒がいると頼もしくなる。でも、先生のほうとしては、やはり、わかりやすさを第一に考えるべき。

自分も著者なので、言うのも気が引けるが、高校(実は大学でも)の教科書で厳密に書いてあるものはない。 $x \rightarrow 0$ のとき $\sin x / x \rightarrow 1$ というのは典型的な例。あえて、わかったつもり(積分!)になる道を選択している。

²なお、出題者に同情すべき点もあります。この件が起こった当時、センター試験の範囲が変則的だったことにもあります(通常の教科書にない文系コースの範囲)。範囲の不自然な限定(他にも、微分の範囲が x^3 まで等)は、問題を難しくしていることの一因です。

ある方が、朝日新聞で『分数の割り算でなぜ逆数を掛けるか小学生に説明できますか』と聞いたらみんな下を向いていた」と語っていたが、そんなことを小学生に教えようとするから数学嫌が増えると言いたい。杉山先生がある講演会で「証明しなければダメだというなら、円周率が 3.14 ということはどう説明するのだ」とおっしゃっていたが、まさにそういうこと。だからと言って、円周率を外すと、数学が面白くなくなること請け合いである。

なお、分数の割り算の件は、高校生になったら、二重分数を学んでその疑問はすぐに解決できる。

(4) 自分と異なる思考回路も認めなければならない。

「思考の多様性」は、「アプローチの多様性」にもつながる。このことについては、前々回の教育課程審議会会長の福井謙一氏が幾何学を学ぶ意味として主張していた「解析的にも解けるが、幾何的に考えると驚くほど簡単に解ける。その思考方法を、子どものうちから身をもって味あわせたい」の言葉につながる。

私も福井先生の意見に同感である。以前『数学セミナー』で「エレガントな解法求む」の出題者をしたときは、この観点を最重要視していた。

また、この点は「わかる」の研究の上でも重要。解析的だとぜんぜんわからないのに、幾何的に説明すると「わかった」という生徒もいる。もちろん、その逆もある。

研究授業であえて微分積分を選んだ理由は、「微分積分＝解析的」と即断する人が多いから、別の道を提示したかったと言う意味もある。実は、私も高校のとき、計算ばかりの微分積分は好きになれなかった。でも、幾何的に捉えなおしてみると、「こんなに面白いものはない」と思えるようになった。

(5) 教えるにくいという理由で努力を放棄しない。

現在、「平面図形」が数学 A の最後の章になっている教科書が多いという。これは入試で敬遠されると、省略されてしまう恐れが極めて強いのだが、平面図形は以前の中学校でやった必修的な領域。確かにテストでは採点が面倒だし、先生が生徒に出し抜かれることもある。その点で大変教えるにくい。でも、それだけに福井氏がおっしゃっていたようなことが平面図形でおきやすいとも言える。ぜひ、その点も考慮に入れていただきたい。

3. 良い授業とは

次に、良い数学の授業とはどういうものかについて述べたい。

その条件として、その段階と賛否を無視して、考え付くもの。よく言われているものを列挙していくと、以下のものがある。

1. 思考力を伸ばせる
2. 構造を深く理解できるようにする
3. 発展性がある
4. 多様なアプローチ・思考法に触れる
5. 数学の有用性を認識できる
6. 学んでいて楽しいもの
7. マニュアル通り進められないもの
8. 逆に、マニュアル通り進められる
9. 知識がきちんとつく
10. 計算力がつく
11. 生徒を評価しやすい

ここで、7と8は逆方向のベクトルである。おそらく、読者諸氏の大多数は、「8なんてとんでもない」とお考えであろう。しかし、残念なことに、現実には、8を重視した教科書が多い。教科書会社からしてみれば、それだけ需要があるということである。

しかし、まずは理想を掲げて(そのあとは、…)という立場から議論を進めると、私は、1～6と9、10を重視すべきだと考えている。これは、前章の「なぜ必要か」の数学の役割の①～⑥から出てくるものばかりである。

「1. 思考力」と「2. 構造理解」は、同義に近く、⑥そのものとも言える。「5. 有用性」は、直接関係ある①はもちろんのこと、②、③までが含まれるであろう。「3. 発展性」は、④～⑥に関係あるが、とくに⑥と深く結びついている。

「4. 思考・アプローチの多様性」については、前章の(4)でも述べた。思考・アプローチの多様性は、上の⑤と直接関連するが、⑥との関連が重要である。考察の深化の具合にもよって、初心者でも上級者でも楽しめ、再び本質の考察へと向かわせるものである。

さて、「6. 学んでいて楽しい」は、大変重要なのに教室では置き去りにされがちである。「なぜ必要か」には、この原因の一つが次のように指摘されている。

「数学は公式を暗記してそれに数値を当てはめて問題を解くこと」という誤解の広まりが「多くの『数学嫌い』の生徒を生み出している」。

数学の問題を、**数学的に原理に遡って考えれば応用も広がり楽しいのに、数学的に考えないので楽しくない**ということを強調しておきたい。であるから、数学嫌いを生み出しているのは、**数学的な思考ではない**のである。

数学に限らず学問は、現実社会との結びつきが大切なのは当然である。でも、現実社会の飛躍的な進歩は、抽象化によって理論を高めることによって生まれる。

また、だからこそ、現実社会にはありえないようなパズルにも子どもたちが時間を忘れて夢中になる。現実社会を強調することで夢を奪わないでほしいと思う。

数学的活動が促す理解の変容 —反復・スパイラル・学び直し—

渡邊公夫

早稲田大学教育・総合科学学術院

1. 背景

新しい小学校学習指導要領及び中学校学習指導要領が告示されたのは、平成 20 年の 3 月 28 日、高等学校学習指導要領の改訂案が公表されたのは暮れも押し迫った 12 月 22 日である。その方針を策定する算数・数学部会では現行の学習指導要領の精神を活かすには様々な不整合が見出されると指摘された。その一つである「学び直しの困難性」がきっかけとなり、議論の末得られた結果が「既習を活かすスパイラルの導入」である。児童・生徒の発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）を考慮した教育課程により、理解の広がりや深まりなど学習の進歩が感じられるようにするという意図が込められている。

一つの問題解決という設定での従来の数学的活動は、端的に言えば「数学『的』活動」、すなわち「数学の傾向がうかがえる活動」から「数学の活動」への変容が意図されている。これらを局所的な数学的活動と位置づけ、反復（スパイラル）による教育課程での学習を「既習という『体験』のあらたな『経験』への変容」という視点から大域的な数学的活動として位置づけてみよう。反復（スパイラル）の本質がみえてくる。

算数、数学に関わる「改善の基本方針」が答申の p.83～ p.87 に述べられている。そこで、「学び直し」に関する事柄の具体的な記述を見てみよう：

- 数量や図形に関する基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図る観点から、算数・数学の内容の系統性を重視しつつ、学年間や学校段階間で内容の一部を重複させて、発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程を編成できるようにする。
- 子どもたちが算数・数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である。そのために、
 - ・数量や図形の意味を理解する上で基盤となる素地的な学習活動を取り入れて、数量や図形の意味を実感的に理解できるようにすること
 - ・発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程により、理解の広がりや深まりなど学習の進歩が感じられるようにすること

2. 形式と実体

部分と全体との関係において、部分に対する全体の優越性を主張し、全体は部分の単なる総和ではないという「ホーリズム」とよばれる概念がある。数学の学習では、このような概念のもとでの対比も重要であるが、それに加えて形式と実体という対比が重要になる。

実体と形式との関係においては、実体に対する形式の優越性が語られるが、形式は実体が集まったからといって、観えてくるものではない。ましてや、形式のみを学んで数学が理解できるものではない。そこで、形式と実体を結ぶ役割が数学的活動に期待されている。さらに時間軸も加味された学習空間では理解の深化という変容が期待されている。それに答えるのがスパイラルとよばれる学び直しである。

3 数学における抽象化

数学は具体的事象から構造を抽出することにより発展してきた。抽出された構造はさらに抽象化され、あらたな構造へと変容していく。この繰り返しである。

まず、身近な事象や具体物から抽象化された自然数、有理数、実数等の数や点、直線、三角形等が考察の対象となり数学の進歩につれて一次的な数学的実体としてその地位を獲得していった。さらに、複合された現象の解析が要求されるようになり、とくに、一次的な数学的実体の間にある関連の解析が必要となった。たとえば、関数とか、変換とか、分布を、数学的実体と考えて、それらを考察の対象とするようになった。二次的な数学的実体の誕生である。次は、これらを集合の要素として定式化することによって新たな数学的実体が登場してくる。関数空間とか、変換群などへのさらなる抽象化である。このように数学の発展においては、さらなる本質を究めるためには現代数学の理念としての構造を定式化する抽象という過程は不可欠であった。

4. 構造の具現

数学者は、深い洞察から数学的構造を理念として把握し、それに導かれてその理論を展開していった。しかし、その理念たる数学的構造は、さまざまな具体例や計算のかけにかくれて、あからさまに表に出ることはない。しかも、抽象化された構造はそれ自体を学べるものではない。まったく無味乾燥な文字列に見えるであろう。その構造が宿っている事物を体験しているものにとってはあたりまえのこととみえることもある。しかし、その体験が欠如しているものにとっては、まったくチンプンカンプンであることが多い。そこで、初学者は数学を学ぶに際し、教育的に工夫された教材や計算等の行為によってその理念を「体得」するよりほかないのである。構造としての数学は具体化されていなければならない、ここ

に構造を具体的に宿す、すなわち数学の教材化がもとめられる理由がある。

私は数学に関わる知識や技能の直観的な体得を促す活動をあまねく数学的活動という言葉で括っている。新学習指導要領の中で言及されている三つの数学的活動はその中の典型的なものである。例えば、既習事項を繋ぎ合わせる「糊代」の顕在化は数学的活動の結果の一つである。教科書は内容別、項目別に整理され、学習するのに必要なことは必ず前に配置されるように工夫されている。しかし、それらを統合する様々な視点は与えられていない。それにひきかえ、数学的活動を通して、掴み取った基礎・基本は使える。そのような基礎・基本には「糊代」がついているからである。

かくして数学的活動を経て直観的に体得した新しい知識や有効な手法を、より確かに、より一般的な理論にまで深めようという行為が人間のもつ知的な欲求にも一致するのである。数学的活動では、活動している本人はまだ、そこに数学的構造を見出すことはできていない。数学的構造を掴み取った時点で、その活動の内容は数学における一つの例になってしまう。

5 数学の発展

先に述べたように数学という学問は抽象化の繰り返しであり、土台から完全に積み上げられ、完成された立派な理論などは初めからあるものではない。いろいろ思考錯誤の結果、必要に応じて基礎の見直しや改造をしながら次第に望まれる理論へとたどりついて得られたものである。かかる自己増殖のスタイルこそが「発展する数学」の本質である。これは一人の人間が子どもから大人へと成長しながら数学を学んでいく過程でもある。

そのような意味からすると、数学を学ぶということは、建築物を建てるというよりは大木を育てると例えたほうが的確である。地中から養分を吸収し（数学的活動を省み）、枝葉が茂り（個々の数学事象が顕在化し）、根を張り（確かな根拠を基に論理的に考察する）、幹が枝葉を支える（数学の構造を掴み取る）ことがそれぞれ呼応して大木へと成長していくのである。大木が繁茂する肥沃な土壌を構成しているものが豊かな数学的活動といえよう。基礎・基本はそれのみをひたすら学んで身に付けるものではなく、新しいものを学ぶ過程において、不確かになったり、不安に思えたりした既習事項を常に振り返ることにより得られる知識である。抽象化に伴うメタ認知が、それまでの学習を俯瞰的に見ることを可能とし、結果として既習事項のより確かな認識に至るのである。

小学校が小学校の課程で、中学校が中学校の課程で完成するものではなく、小学校での学習は中学校で再編を強いられることにより新たな数学へと生まれ変わるのである。数学の学習では「連続的な成長」というよりは「脱皮」を繰り返しながらの成長といえよう。

6. 数学的活動の大域化

学年間や学校段階間を超えての数学的活動の役割というものが「数学的活動の大域化」ということに対応する。中学においては、新たな知識を建物の素材のように与えるのではなく、小学校での算数的活動に根付いた知識を振り返りながら、その知識がどのように発展していくか、生徒のその後の数学的体験に応じて、展開されるのが理想的である。

例えば、現行では3割削減の影響もあって、中学校で学習する三角形の決定条件と合同条件がその違いに言及されることなく、あいまいな記述に終始している。その要因は小学校での算数的活動の不足という指摘もある。

小中の連携は単なる「繰り返し学習」ではない。学齢が進むに従い、体験した数学的活動等の影響もあり、顕在化こそしていないが、知的レベルは上昇している。以前の数学的活動が生徒の記憶の中で発酵し、変容しているのである。的確な一言でそれまでの疑問が解決することもある。分数と数直線の対応に気づいた瞬間に量としての分数が理解できたという生徒もいた。比としての合成に分数の積の構造を見出すこともあるだろう。これは、「学び直し」の一つの新たな機会になることが期待される。「数」一つを例にとってもわかるように、小学校、中学校ではその扱う構造は格段に広がっている。

7. 数学的活動の局所化

数学的活動の局所的側面については、「中学校学習指導要領(平成10年12月)解説一数学編一」で、「数学的活動と数学学習の意義」においても言及されている。「体得を促す」というこの数学的活動は人間形成における数学的思考や数学的方法の運用能力の育成という役割も担うことが期待されている。さらに、「新しい時代の算数・数学教育を目指して一算数・数学科学習指導要領改訂についての要望一」[2006年(平成18年)7月, 社団法人 日本数学教育学会, 教育課程委員会]では、数学的活動のもつ様々な側面に注目し、その具体的様相に言及している。そこでの分類①～④の視点で、ここでの数学的活動を見直すと、以下のような側面が浮かび上がってくる。

数学的活動を通して数学的構造を認知する(「③現実事象の数学的な問題解決」)には見えないものを観る,すなわち,言葉で体験を概念化して(「①数学的な表現」)経験とする必要がある。数学的活動を振り返り(「②数学的な推論」),おぼろげながら認知した数学的知識を自らの言葉で記述し(「数学的な表現」),語りながら認識を確かなものにしていく(「④数学的に伝え合うこと」)ことが期待される。アウトプットが必要な所以である。局所的側面に注目するといえども、数学的活動と「数学という活動」はしかと区別すべきである。そうでないと、本来の意図し

た目的がぼけてしまう。

8. 体験から経験への変容

数学の理解のためにはやらなければならない行為というものがある。そういうものを経ずして、数学の理解はありえないと考えている。例で説明しよう。

コンパス、あるいは端点を固定した紐などを用いて丸を描いた経験があるからこそ、円の定義「ある1点から等距離にある点の集合(あつまり)」が受け入れられるのである。また、様々な条件で三角形を描くという行為が三角形の決定条件を受け入れるのである。それらに比べて、比較的軽視されている行為に「2乗したら3に近い小数を探そう」がある。

分数(有理数)しか知らない子供にとって「2乗したら3になる数」など存在しない。だが、電卓を用いて、2乗したらいくらでも3に近い数を探すことは比較的簡単にできる。このような操作を経て、「2乗したら3になる数」の存在を意識し始めるのである。実は、この意識が $p3$ の概念を支えている。このことは数学的に保証されている。

では、体験と経験の違いは何で、体験から経験への変容はどのように起こるのか。「自分の言葉」で語る事が何故、体験を経験に変容させるのか。

数学的活動では何故、「主体的」や「自分の言葉で語る」ということが取沙汰されるのか。「言語化」の果たす役割について考えてみよう。

学んで欲しい、即ち教えたい数学的事実が内包された「活動」を生徒にしてもらう。それらは、外的な活動の場合が多いが、内的な場合も当然あり得る。例えば、「～を考えてみよう」等がそれにあたる。活動に対する生徒の関わりが主体的であると、各個人の頭のなかにあるイメージが構築される。指示の鸚鵡返しでは内容のイメージなど覚束無い。

言葉や数式だけの指示では思考の対象とするイメージを描くのは容易ではない。それ故、外的活動としての数学的活動が必要となる。

このイメージを意識下に置くのに既習事項が必要である。学習は「足し算」ではなく、「掛け算」であるからだ。

子どもの頭を引き出しに見立て、新しい知識を何の脈絡もなく、頭の引き出しに放りこんでいく「足し算」教育から、子どもの既習を十分に考慮し、過去の知識では何が不足なのかを十分知らせ、新しい知識を構築する教育にシフトする。知識は、自己増殖的に増えていく。これが「掛け算」教育。

さて、出来上がったイメージだけでは自らの体験を表現し得ていないことに気付く。即ち、「活動」を言葉や記号で記述すると記述しきれないものが必ずのこる。

そこで、多様な「さ迷い」が生まれる。同じ体験を経た仲間の「さ迷い」を聞

いて、それらを補完する活動を経て、自らの構築したイメージが変容し始める。この変容したイメージを体系化された情報にするべく、言語化が必要になる。かくして体験は経験に変容するのである。自分の言葉で語る。言葉はある意味で客観的なものである。従って、“自分”の言葉というものは、自分の世界と外の世界を結ぶパイプとしての役割を担っていることになる。イメージの普遍化のためには言語の普遍化を借りる必要がある。ここに、体験を自分の言葉で語る必要性が生まれる。

このような一連の作業が繰り返されると、数学的活動の階層構造が生まれる。ある体験を経て、その行為を振り返り、一つの経験とする。その過程で得られた体験を基礎として新たな体験が加わる。それらの複合した体験を振り返り、あらためて一つの経験とする。「言語によるイメージの変容」となると、言葉が自分のイメージに作用し得るか否か。得手な生徒もいれば、不得手な生徒もいるだろう。その改善策はさておいて、いずれにしても、当面の問題のイメージを描くことが肝要である。

次に、「主体的な係り」というものが問題となった。イメージを描かずにただ単に指示を繰り返しているのでは頭を働かせていることにはならない。逆に、なんらかのイメージで捉えて行動しているなら、教えられた通りのことを繰り返しても同じものにはならないのである。加えて、生徒個人の思考や言語化にはそれなりの癖がある。それ故、グループでの議論はより普遍化したいという方向に向かう。

「掴ませたいと意図された数学的構造」を宿した活動を生徒がそれなりの指示に従って行い、その活動を自らの言葉で記述し、伝え合い、ひとつの普遍的な理解に至る。これで、一つの学びの過程が終了する。確かに、教師が意図した概念は生徒に伝わったのである。しかし、数学的活動で意図する狙いはこれだけではない。生徒は、記述された周辺にはまだ記述しきれないものがあることを意識し始める。自分で書き終わってそう感じることもあるだろう。友人と語りあうことで感じることもあるだろう。言葉や記号では語りきれない事柄の存在を意識することも一つの狙いである。認識の彼方にまだ知られざる数学的構造がありそうだと「数学研究のロマン」を感じてもらいたい。さらに、数学的活動から一つの数学的事実を掴む活動の過程には、「捨象」という具体から抽象に至るに付随した重要な行為が潜んでいる。これは「活用」や「論理の組み立て」に際しては不可欠な行為である。

9. 体験から経験への階層的構造の例

上述した「体験から経験への階層的構造」即ち、反復(スパイラル)についていくつかの典型的な例を紹介しよう。以下では、相似というテーマで小・中・高の

理解の変容をみてみよう。

円，正三角形，正方形，一般に正多角形に対しては，その大きさが異なろうと形が同じであることは，論を俟たない。では，長方形はどうだろう。様々な長方形の広告や案内を集めて比べてみよう。大きさは異なるが形が似ていると思われるものがその中に見出されるであろう。そこで，同じ形と思われる大きさの異なる長方形を一つの角(カド)を共有するよに重ねてみよう。対角線の存在が浮かび上がってくる。一番大きな長方形に対角線を描き，その対角線に角(カド)がのる長方形の集まりが同じ形という集合を形成する。

ここで，自分の感覚に頼っていた判断が対角線というものを利用することにより，より確かな判断へと変容したのである。

ここから，二つの方向に話は発展していく。曲線で囲まれた図形の形を考察するには「相似の位置」へと発展するであろう。これは後半とし，ここでは「対角線の利用」を数学的に扱うことを考えよう。様々な資料としての長方形を同じ形をした長方形で整理する必要性から，「傾き」を数値化することになる。以下の三つが考えられよう。①「傾き」を角度で捉える。②縦と横の比として捉える。③縦と横の比の値すなわち，傾きの正接を考える。

傾きを角度で捉えると加法性が見えてくる。即ち $20^\circ + 30^\circ$ は 50° である。

しかし，傾きの正接に加法性はない。 $\frac{b}{a}$ と $\frac{d}{c}$ の傾きを加えると傾きは $\frac{bc+ad}{ac-bd}$ となる。

これが加法定理である。ちなみに，複素数を用いると $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$ となる。傾きという属性を媒介として辺の比と角度の関係に気付き始める。この数値化された二つの傾きの関係を顕在化したものが将に三角比である。更に，三角比の角度が動き始め一般角へと拡張され，弧長をパラメーターとする単位円上の点の運動を記述する三角関数となる。

以上の考察では曲線で囲まれた図形に対して，「形が同じ」という判断の拠り所が得られない。

そこで，一般にどのような状況のとき我々は二つの図形を形が同じというのか。辺りを観察してみよう。まず，スライド(枠付きの透明陽画)の映写，次に影絵遊び，そしてピンホールカメラにおける結像等が考えられる。さらには，パンタグラフによる拡大図，縮図の作成など良い例である。これらの例より，形が同じであると思われる二つの図形の背後には「相似の位置」とよばれる位置関係があることを見いだすことができる。そこで，A4の用紙(210 × 297)を2枚用意し，一つを折って半分(148.5 × 210)にする。元々の用紙を左手で持ち，半分にしたものを右手で持つ。半分にしたものを，それらが元の用紙に重なるように配置すると，目と左手を結ぶ線分をおよそ 2 : 1 に内分していることに気付く。これは，既習の新たな視点での確認であり，内分比 $1 : \sqrt{2} - 1$ の素地体験となっている。

ここに至って、いままでの感覚的な「形が同じ」という判断が「相似の位置」にあると云う、より確かな判断基準に置きかえられる。これが認識の深化の一つの例である。では、この定義のご利益は何か。例えば、総ての放物線が相似であると云う予想だにできなかった事実を知ることができる。当然ながら、大きさの異なる二つの円や正三角形や正方形が相似であることを確かめることができ、新しい定義が従来の「形が同じ」と云うものを拡張したものであることがわかる。ここに、定義を拡張する典型がみられる。

しかし、一般の図形にあっては、二つの図形を相似の位置に置けるか否かの判定は容易ではない。だが、多角形のように有限個の線分で囲まれた図形にあっては、辺の比や角度の相当のみで上記の「相似の位置」に置くことができることを学ぶ。その最たるものが三角形の三つの相似条件である。

さて、高校に移ると座標幾何のもとでの相似が議論される。そこでは、形というよりは、相似変換そのものに考察の対象が移っていく。 $u = ax + by, v = cx + dy$ はどのようなとき相似変換になるか。これは線型変換であるから直線を直線に移す。そこで、線分の比が変わらないという条件もよいだろうが、角度を変えないという条件から、上記の一次変換は $u = ax - by, v = bx + ay$ となる。これは複素数で表される： $u + iv = (a + bi)(x + iy)$ 。等角写像は正則写像であった。

10 . 幾何教育の四段階

彌永昌吉氏は彼の著書「数学の学び方」(筑摩学芸文庫, 筑摩書房)の中の「V 理論体系を1つの一貫したものとして眺めてみることのおすすめ」という章で以下のように言及している。

幾何学の4段階

数学教育のベテランのEさんは、Dさんもお存じかと思いますが、たしか1955年ごろの数学教育の雑誌に、づぎのような意見を述べられておられました。

“幾何には4つの段階がある。それは、

1. 直感的・経験的段階
2. 局所的論証の段階 (ターレスの段階)
3. 体系的論証の段階 (ユークリッドの段階)
4. 公理的段階 (ヒルベルトの段階)

これは、幾何の歴史の通ってきた段階でもあるが、幾何教育にもこれにあてはめて考えることができる。わが国では、これがちょうど小学校、中学校高等学校、大学の教育にそれぞれあたっている”

これは「数理科学, 創刊号」(1963年7月)から10回にわたって連載をまとめたものである。

私がかつて、数学的活動の階層的構造と題して、

1. 経験的段階
2. 局所的段階
3. 大域的段階
4. 公理的段階

を述べ、「経験的段階」を体験として、これが「局所的段階」という経験になり、ここでの「局所的段階」としての体験が「大域的段階」の経験に変容し、この「大域的段階」の体験が経験と変容して「公理的段階」になることを述べた。その1つの具体例がまさに上記の幾何学の発展であった。この4段階は「関数」について、「解析」についても、はたまた「数」についても当てはまる。更には、「文字式の利用から座標幾何学」にも当てはまる。

11. 文字式と座標幾何の四段階

- (1) 現実を幾何学的に捉える
- (2) 局所的に、文字式と座標幾何を使い始める
- (3) 大域的に、文字式と座標幾何を使い始める
- (4) 座標空間がむしろ実体になり、現実は一つのモデルにすぎない。

例えば、「ベクトルの内積」の指導。まず、レオナルド・ダ・ヴィンチによる三平方の定理の証明が余弦定理の証明に自然に発展し、ベクトルの内積の幾何学的解釈が与えられる。次には、この過程を座標幾何(解析幾何とよばれることも多々あり)で見直すと、新たな幾何学的解釈が見出される。これがまさに(2)段階ら(3)段階に移行するときに見られる様々な知的発展なのである。最終的には、そこから図形が消え、数学の命題は「単なる文字列」に変容する。私が大学で基礎論を学び始めたころ、仲間が盛んに「文字列」、「単なる文字列」と口走っていたことを思い出した。

以上を端的に云えば、「図形的な解釈に文字式を用いることによる確認」があらたな数学的事象に気づかせてくれたというスパイラル学習の典型といえよう。