第４章　わかる授業の実践
第１節　わかる授業のための教材研究
１－１　小学校と中学校の接続

小学校算数から中学校数学への接続を考える

上　田　喜　彦

天理大学人間学部総合教育研究センター

目　次

要　約

小学校と中学校の接続の問題については，これまでも，いわゆる「中１ギャップ」として注目され，教育課程や学習内容に関する課題，小学校と中学校の授業構成や指導方法の差異などの観点から様々な研究が行われてきた。

本稿では，まず，先行研究をもとに小学校と中学校の壁となっていると思われる「証明」と「変数」の指導改善について述べた。その上で，小中学校の接続を意識して実践された小学校算数科の授業を紹介した。続いて，筆者の観察した小中学校の授業の比較をおこない，小中一貫教育モデル校での児童生徒の意識調査等から小中のスムーズな接続について考察した。その上で，小中学校の双方がそれぞれの指導法のよさを生かして授業構成をすること及び指導観や

授業観及び目標の共有化等がその重要な視点であることについて述べた。

キーワード　小中接続　証明　変数　指導改善

1．はじめに

本研究では，校種間の接続については中学校と高等学校の接続を中心に研究を進めてきたが，本稿では，小学校算数から中学校数学へのよりスムーズな接続について考えてみたい。

これまでも，小学校と中学校の接続については，いわゆる「中１ギャップ」として注目され，教育課程や学習内容に関する課題，小学校と中学校の授業構成や指導方法の差異，教員の指導観の差異などの観点から様々に論じられてきたところではある。

学習内容やその取り扱いで，小中学校の間の壁となっているものとして，「変数」と「証明」があると考えている。私自身，小学校の現場で，中学校に入学した子どもたちが，数学における「変数」や「証明」の壁にぶつかる場面に何度となく遭遇してきた。「変数」と「証明」は，小学校の算数にはない中学校の数学の大きな特徴であると同時に指導上の大きな壁でもあるといえるだろう。

本稿では，「論証」「証明」の小中接続に関する研究及び小中一貫教育校における実践等をもとに，小学校算数と中学校数学の接続について改善すべき視点について提案できればと考えている。

2．評価を生かした指導の改善

教育評価について，梶田[2007]は，「教育評価とは，教育活動の中で，どのような学びがなされたのか，どのような育ちが実現したのかの確かめであり，その結果の教育的な活用である。したがって，教育における評価活動とは，学びと育ちの状況を見てとり，何らかの基準でそれを判断し，次のステップに向けてそれを生かすことである。「事実に即した（エビデント・ベイスド)」着実な教育のための不可欠な要素となるものが教育評価なのである。」と述べている。

教育評価は，学習者にとっては，学習のペースメーカとしての役割や自己認識の機会としての役割あるいは自分の期待されている方向を明確にする役割などがある。一方，指導者にとっては，指導の対象をよりよく理解するためのものであり，教育目標の実現に向けた新たな手立てを考える根拠となるものであるといえる。すなわち，評価結果に基づいた指導の改善あるいは「わかる授業」の構築が教育評価の目的・意義であるといえる。

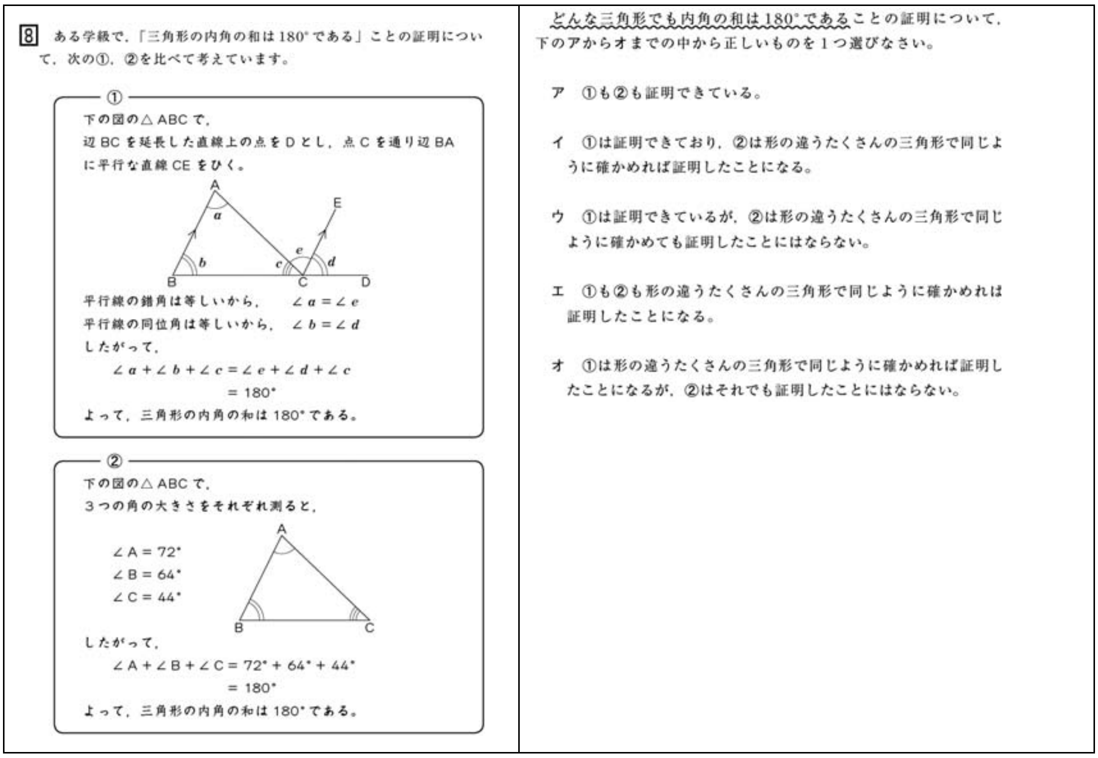
また，2000 年 12 月 4 日に出された文部省教育課程審議会答申「児童生徒の学習と教育課程の実施状況の評価の在り方について(答申)」においても，「学校の

教育活動は，計画，実践，評価という一連の活動が繰り返されながら，児童生徒のよりよい成長を目指した指導が展開されている。すなわち，指導と評価とは別物ではなく，評価の結果によって後の指導を改善し，さらに新しい指導の成果を再度評価するという，指導に生かす評価を充実させることが重要である（いわゆる指導と評価の一体化)。」とされている。これも，これまで述べてきたことと同様，評価のための評価に終わらせることなく，指導の改善のために評価を行うものであることを強調しているものであるといえる。

(1)　「証明」の指導の改善

過去３回にわたって実施された全国学力学習状況調査[文部科学省・国立教育政策研究所]は，マスコミの報道等では，全国各都道府県の順位に注目が集まり，教育関係者等はそのことに一喜一憂しているようである。しかし，いわゆる「指導と評価の一体化」あるいは教育評価の目的からいえば，調査の結果を指導改善に生かし，児童生徒の学力向上や授業改善等を通して教育の質の向上にこそ生かすべきものであろう。

勝美（2009）は，平成 21 年度の全国学力･学習状況調査における，中学校数学 A のうち最も正答率の低かった「証明の意義」に関する問題の調査結果（文部科学省・国立教育政策研究所，2009）から，小学校，中学校の指導についていくつかの提案をおこなっている。勝美が取り上げた「証明の意義」に関する問題（図 1）とその解答類型及び反応率（表１）等は次のとおりである。


8　ある学級で，「三角形の内角の和は180°である」ことの証明について，次の①，②を比べて考えています。

①
下の図の△ABC で，
辺 BC を延長した直線上の点を D とし，点 C を通り辺 BA に平行な直線 CE をひく。

平行線の錯角は等しいから，　$\angle a = \angle e$
平行線の同位角は等しいから，　$\angle b = \angle d$
したがって，
$\angle a + \angle b + \angle c = \angle e + \angle d + \angle c$
$= 180°$
よって，三角形の内角の和は 180° である。

②
下の図の△ABC で，
３つの角の大きさをそれぞれ測ると，
$\angle A = 72°$
$\angle B = 64°$
$\angle C = 44°$
したがって，
$\angle A + \angle B + \angle C = 72° + 64° + 44°$
$= 180°$
よって，三角形の内角の和は 180° である。

どんな三角形でも内角の和は 180° であることの証明について，下のアからオまでの中から正しいものを１つ選びなさい。

ア　①も②も証明できている。

イ　①は証明できており，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

ウ　①は証明できているが，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめても証明したことにはならない。

エ　①も②も形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

オ　①は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになるが，②はそれでも証明したことにはならない。

図１　「証明の意義」に関する調査問題（平成２１年度全国学力学習状況調査問題）

表１　図１の調査問題の解答類型と反応率

問題番号			解　答　類　型	反応率 (%)	正答
8		1	ア　　と解答しているもの	22.9	
		2	イ　　と解答しているもの	32.6	
		3	ウ　　と解答しているもの	29.7	◎
		4	エ　　と解答しているもの	7.9	
		5	オ　　と解答しているもの	5.6	
		9	上記以外の解答	0.0	
		0	無解答	1.2	

○　結果の考察

この問題は，三角形の内角の和について，実測を用いた帰納的な方法による説明と演繹的な推論による証明の違いを問うことによって,証明の意義を理解しているかどうかを調査しようとしたものである。正答率は，29.7%であり，大きな課題があると言わざるを得ない。

勝美(2009)は，この結果等から指導の改善の視点として，中学校における指導の改善の要点として,「①小学校算数で学習した実測などによる帰納的な説明と，平行線を用いた証明を比較することによって，演繹的な証明の必要性を今まで以上に積極的に指導する。②演繹的な証明の必要性がより理解されやすい整数に関する問題と比較することによって，三角形の内角の和のような図形に関する命題についての理解を図る。」の 2 点を挙げている。また，小学校算数における指導の改善としては,「２つの内角を残りの１つの角の両側に集める操作によって証明で使う平行線を出現させ，平行な直線で学習したことをもとにして３つの内角の和が１８０°になることを説明するなどの学習活動が考えられる。このような学習によって，中学校における証明の学習との段差を緩やかにすることができる。」と小学校と中学校の接続に関わる指摘をしている。

また，國本（1997）は，初等段階における「論理性育成」のための方法論として,「操作的証明」「幾何的具象化による証明」「パラダイムによる証明（1 つ，あるいは少数の代表例による証明)」をあげ，①行動的，図的水準での証明②パラダイムによる証明を取り入れることを提案している。

○　教科書の記述から

具体的に教科書の記述から考えてみよう。先の問題について取り扱っている小中学校の教科書[『小学算数 5 年上』(図２）平成 16 年検定済,『中学数学２』（図 3）平成 17 年検定済：日本文教出版(大阪書籍)版]の記述は，次のようなものとなっている。

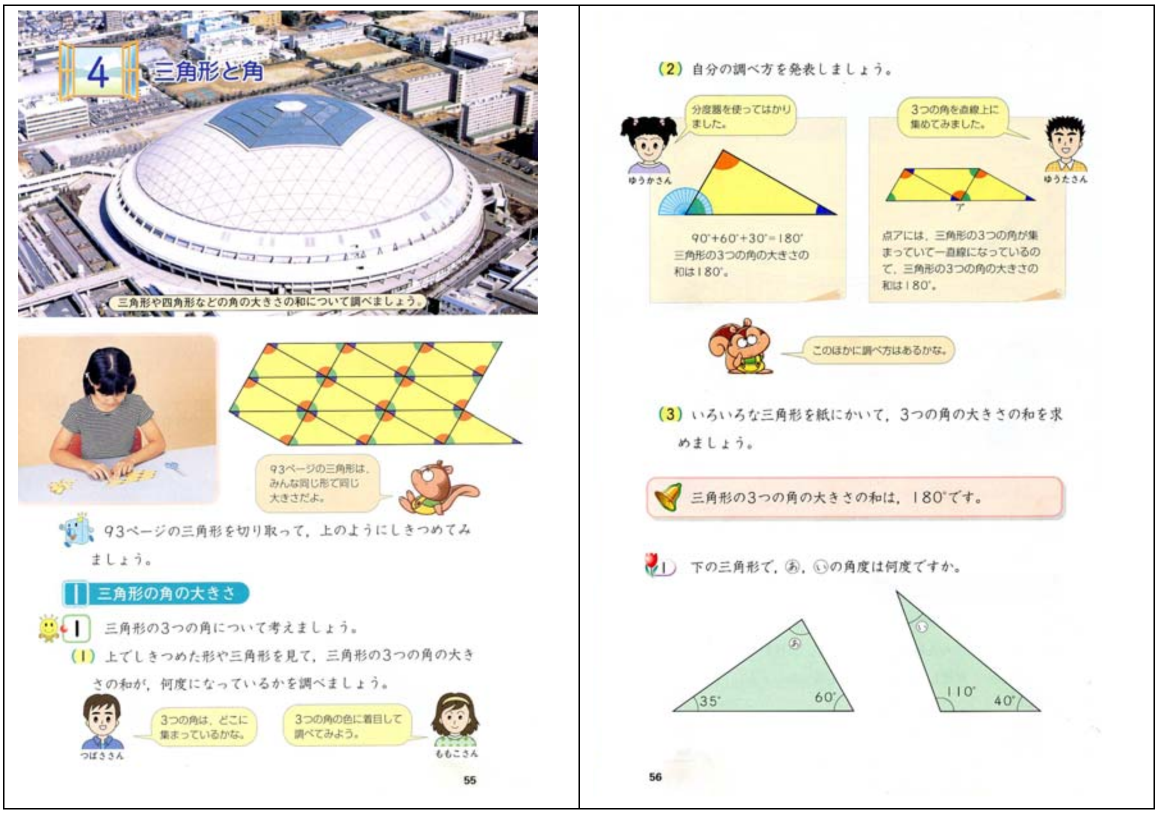


図２　『小学算数５年上』pp. 55-56

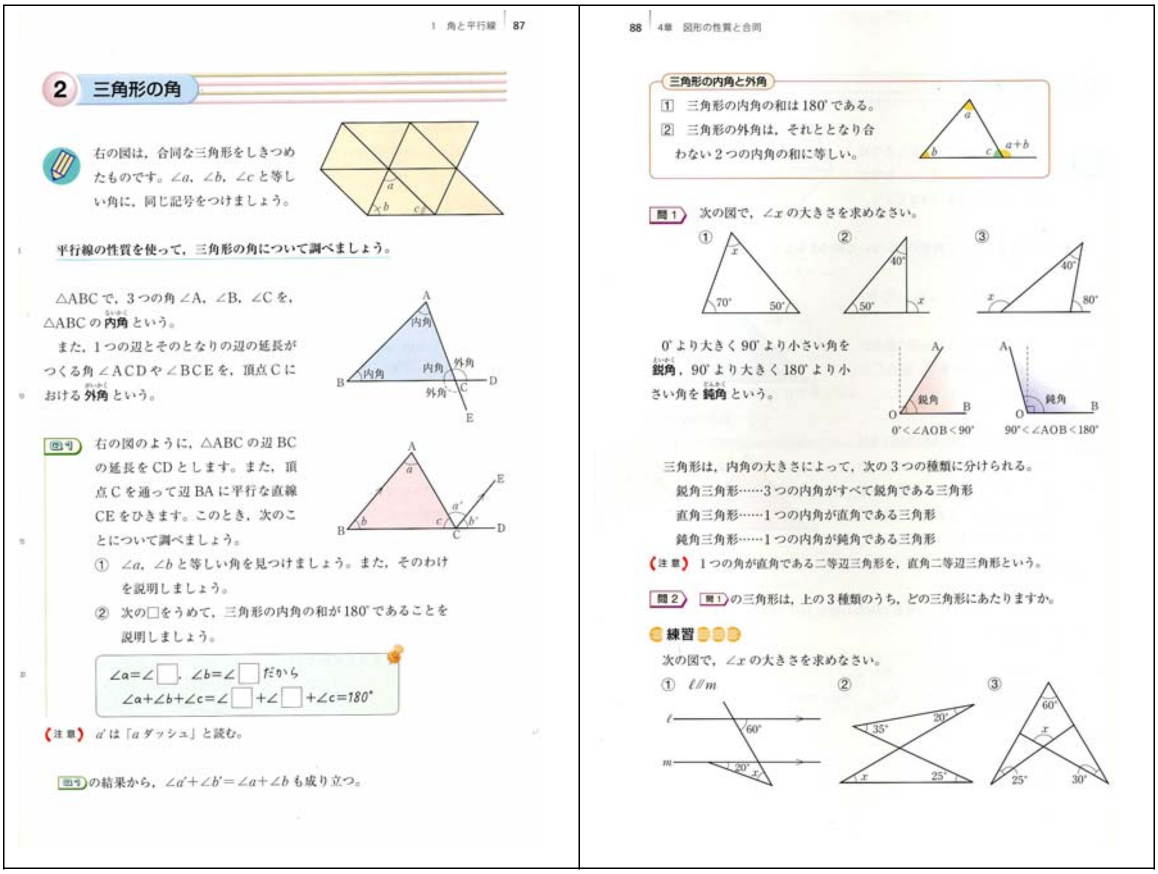


図３　『中学数学２』pp. 87-88

小学校教科書では，算数的活動をともなった問題解決型の授業を想定して，「図形のしきつめ」という具体的な操作活動から，三角形の内角の和に注目させ,「実測による」調べ方と「３つの角を一点に集める」調べ方が示され，いくつかの三角形で同じことが確認されることから，三角形の内角の和が 180° であるとしている。

しかし，ここで最初のしきつめの図形(p55)を振り返って，どのような三角形を敷き詰めても，辺がなす直線が平行であることに着目させれば，平行な直線で学習した事柄や性質をもとにして３つの内角の和が１８０°になることを説明するなどの学習活動が展開できるであろう。

また，中学校教科書では，三角形をしきつめた図形について，平行線の性質を使って三角形の内角の和や外角について調べ説明する活動が示されている。証明については，これより後に学習するため，ここでは,「証明の書き方」についての学習はおこなわれないが，この説明によって小学校のときに学習した事実が，一般的に成り立つ性質であることが示されているということを強調するとともに，後の「証明」の指導の際に，振り返ってきちんとした証明の形を学習するための例とするなどして,「証明」の意義についてきちんと「わかる」授業を構成することができるであろう。

このほかにも，全国学力学習状況調査の結果について，関連する小学校の内容の結果と中学校の問題の結果を関連づけて分析したり，出題の趣旨に着目して関連づけて分析したりするなどして，小学校から中学校を，逆に中学校から小学校を，学校種をこえた系統性や指導方法等について検討し，小中学校の連携・接続について考察して整理・理解しておくことは，小中の接続をスムーズにするために重要であろうと考える。

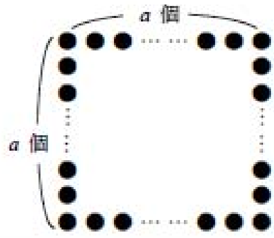
また，ここではＡ問題について取り上げたが，Ｂ問題については，その問題作成の趣旨に着目して，どのような算数･数学の力が求められているのかを把握し，同趣旨の問題の結果から，小学校中学校を見通した算数･数学の力の系統を考察し，指導に生かすことで，義務教育段階での指導のスムーズな接続に役立つものであると考える。

(2) 小中を接続する試み―「変数」の指導改善に向けて―

教育課程実施状況調査に次のような問題がある。この問題は平成６年度（Ａ６(1)），平成13年度（Ｂ４(1)），平成15年度（Ｂ４(1)）において共通の問題として出題している。この問題は「事象の中の数量の関係を文字を用いて表現することができる」かを見る問題である。（図4）

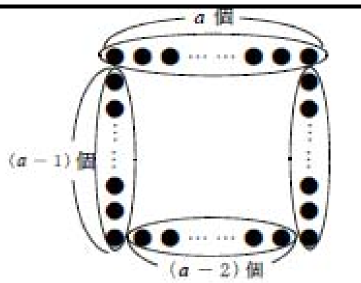
【調査問題】

右の図のように，碁石を正方形状に並べます。正方形の１辺に並べる碁石の個数が a 個のときの，碁石全部の個数を求める式をつくろうと思います。



明子さんは，この問題を次のように考えました。

> 右の図で，一番上のひとまとまりは a 個，左右にそれぞれ $(a-1)$ 個ずつ，一番下のひとまとまりは $(a-2)$ 個になるので，考え方を表す式は，
>
> $a+(a-1)\times 2+(a-2)$
>
> です。



次の各問いに答えなさい。

（１）正男さんは，右の図のように◯で囲んで考えました。正男さんの考え方を表す式を $\boxed{\quad}$ の中に書きなさい。

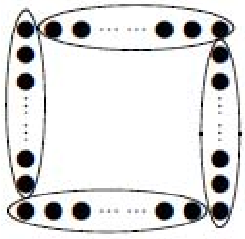


図４　教育課程実施状況調査問題（平成6・13・15年度出題）

この問題の通過率と解答類型は，次の表２である。

表２　図４の調査問題の通過率と解答類型　　　　　　　　　　　　　　　　　　(%)

解答類型	H6 調査	H13 調査 公立	H13 調査 全体
$(a-1)\times 4$　と解答しているもの	51.6	42.8	46.1
$(a-1)+(a-1)+(a-1)+(a-1)$ と解答しているもの	1.3	1.3	1.3
$a\times 4$　と解答しているもの	12.9	12.3	11.8
$(a-2)\times 4$　と解答しているもの	0.3	0.4	0.4
上記以外の解答	22.6	21.8	20.7
無解答	11.2	21.3	19.8
通過率	52.9	44.1	47.3

平成６年度（平成７年２月調査）の結果と平成13年度調査（平成14年２月調査）を比較すると，通過率が約10ポイント減り，無解答が約10ポイント増えている。

この問題場面については，具体的な数の場合については小学校段階でも解決可能な問題であり，具体的な事象について文字を使用して表現したり，一般化したりすることに課題があると考えられる。この問題を分析した『平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書－中学校数学－』では，学習指導上の改善の方向として，① 具体的な場面の数量の関係を文字式で表現するために，言葉の式や図を利用できるようにすること　②「具体から抽象へ」と「抽象から具体へ」の両面の活動を重視することがあげられている。具体的な場面に含まれる数量の関係を，まず，言葉の式や図で表現し，次に文字式で表現するなど，具体的な場面から抽象的な場面あるいは一般化する方向へと段階的に表現するようにするような指導場面の重要性を指摘している。

また，平成20年度全国学力学習状況調査では，「文字式の意味を具体的な事象と関連付けて読み取れるかどうか」をみる問題（数学Ａ２(5)）（図５）が取り上げられている。調査問題（図５）及び解答類型と反応率（表３）は次の通りである。

（5）下のアからエの中に，$3a+4b$ という式で表されるものがあります。それを１つ選びなさい。

ア　１辺 a cm の正三角形と１辺 b cm の正方形を，それぞれ針金で１個ずつ作ったときの針金の全体の長さ(cm)

イ　３人が a 円ずつ出し合ったお金で，b 円のりんごを４個買ったときの残った金額(円)

ウ　３g の袋に a g の品物を入れ，４g の袋に b g の品物を入れたときの全体の重さ(g)

エ　３分間に a ℓ の割合で水が出る蛇口（じゃぐち）と，４分間に b ℓ の割合で水が出る蛇口から，水を同時に１分間出したときの水の量(ℓ)

図５　「文字式の意味を具体的な事象と関連付けて読み取れるかどうか」をみる問題（平成20年度全国学力学習状況調査）

表３　図５の調査問題の解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率(%)	正答
2	(5)	1	ア　と解答しているもの	32.7	◎
		2	イ　と解答しているもの	13.7	
		3	ウ　と解答しているもの	36.4	
		4	エ　と解答しているもの	16.3	
		9	上記以外の解答	0.1	
		0	無解答	0.8	

図５の調査問題の分析として，「文字式から事象の数量やその関係･法則を読み取ることは，文字の役割を理解したり，そのよさを感得したり，様々な問題解決の場面で文字式を利用したりする際に必要である。正答率は，32.7％であり，与えられた文字式を具体的な事象と関連づけ，その意味を読み取ることに課題がある。」（平成20年度全国学力学習状況調査【中学校】報告書）と指摘している。

①　中学校での指導の改善

数学における文字は，任意の数を表す場合，未知の定数を表す場合，変数を表す場合など様々である。このことが文字を学習する生徒にとって文字をわかりづらくしている要因の一つであると考えられる。

中学校第１学年文字の式では，数量を文字で表すこと，文字の式を書くときの約束，式の値などの順に学習するが，それぞれ具体的な事象と表す式などとの関連を明確にして，その意味を理解できるようにすることが大切であるといわれている。

先にあげた調査問題の結果から，具体的な場面から一般化して文字を使った式で表現したり，文字式を読み取って，具体的な事象と関連づけたりすることに課題がある。具体的な改善としては，

○　文字の形式的な計算や式変形だけができることを重視するだけではなく，日常の生活や具体的な場面を取り上げ，具体的な数，ことばの式，あるいは線分図などの図的表現を仲介して，文字や式で表わす活動を多く取り入れる。その上で，生徒のもっている算数（算術）的な方法から数学的な方法を生みだすことを強く意識した指導を行うこと。

○　中学校では，一般にある学習内容について集中的に学習することが多い。文字の使用などの生徒にとって困難といわれる課題では，具体的，帰納的に考えたことを抽象的，一般的に考えるという活動を重視すること。その上で，具体から抽象，抽象から具体の往復を，いろいろな単元や場面でスパイラルに取り扱う工夫を行うこと。

の二点があげられると考える。

②　小学校での指導の改善

ア　文字の意味を発展的に扱う

先にも述べたとおり，数学において文字は，①プレースホルダーとしての文字②定数としての文字③未知数としての文字④変数としての文字など様々な場面で用いられるが，小学校算数においては，単に□や△の代わりとしてa, xなどの文字を使用して（プレースホルダーとして）式に表現することを指

導するが，変数としての取り扱いをすることはほとんどない。

小学校の算数と中学校の数学とのなだらかな接続という観点からいえば，算数で公式であらわしたり，言葉の式でまとめたりすることの発展として，まとめたものを文字式で表したり，それを計算して変形したりする学習場面を設定し，スパイラルな教育課程を編成することで，小学校と中学校のスムーズな接続ができるのではないかと考えられる。

イ　線分図やことばの式などを問題解決に使える形で定着させる工夫の必要性

もう一点は，中学校で文字を導入する際に使用する「ことばの式」や「線分図などの図的表現」が，問題解決のツールとして使える状況で定着させることができているかということである。確かに，小学校では，図形の面積や体積の求め方を公式などに表わしたり，文章題を解決するときにことばの式で数量の関係を表現したりする。また，文章題の解決過程を説明するときに，線分図や対応数直線で表現して説明することは，低学年から何度も学習する。

しかし，高学年になっても，文章題の構造を線分図で表現したり，ことばの式で表現したりすることが苦手な児童が多いように思われる。線分図やことばの式が問題解決のツールとして使える形では定着していない現状があると思われる。中学校での問題解決のスタートとして線分図やことばの式がツールとして使える形で定着しているかどうかについて検証することが重要であろう。例えば，加藤(2009)は，ある児童の数直線を使った問題解決場面を提示し，それを説明させたのち，調査対象の児童に問題を解決させ，問題解決に数直線が役だったかどうかを問うことや算数の学習で数直線をどの程度使用するかどのような場面で使うかなどの調査を行っている〔註１〕。

問題解決のスタートとして線分図やことばの式がツールとして使える形で定着しているかどうかについての検証の方法としては，小学校の最終段階や中学校の初期の段階で，加藤(2009)が,実施したような子どもへのアンケート調査をおこなうことや小学校の実際の授業場面における問題解決過程での数直線の活用状況を観察したりすることなどと，数直線や線分図を用いて問題解決を行う調査問題の結果などを関連づけて分析するなどして検証していくことが考えられる。

指導の改善としては，線分図を使ってよりよく問題解決ができた経験を多く積み重ねることで，図を使って解くことのよさを感得させ，「図にかくと，よくわかる」とか「図でかくと，問題が解ける」といった肯定的なメタ認知を意識させることが大切であると考えられる。また，ことばの式についても，問題解決の見通しをもたせるために，いくつかの数量の関係を捉えたり，数量の関係を整理したりする際に積極的に指導に生かしていくことが大切ではないかと考える。さらに，数量の関係などを一般化して表現する場合に，プ

レースホルダーとして積極的に文字や□，△などを積極的に用いて，文字などの使用に慣れさせることを意識した指導することが重要になると考える。

③　小中学校の接続を意識した授業実践

具体的には，小学校第６学年の３学期に「算数のまとめ」を行う教材がある。ここで紹介する実践は，小学校教員と中学校教員のＴＴにより，具体的な場面を一般化して文字で表わすことのよさを感得させようとしたものである。

文字を使うよさを感じることができれば，中学校数学で文字を学ぶことに期待感を以て望めるであろうし，小学校でチャレンジした内容に再挑戦してよりよくわかるという効果も期待できると考えられる。

少し長くなるが，授業実践の記録〔註２〕から紹介する。実践されたのは2001年の1月であるから，文字と式については既習である。

○　単元　算数のまとめ（第６学年　３学期教材）

○　題材「ご石のならべかた」

○　目標

１　ご石の並び方の規則性に注目して、能率よく個数を数える方法を考えることができる。

２　６番目、１０番目を求めたことから何番目でも求められそうなことを類推する。

３　一般式ができそうなことを理解し、中学校数学への展望をもつ。

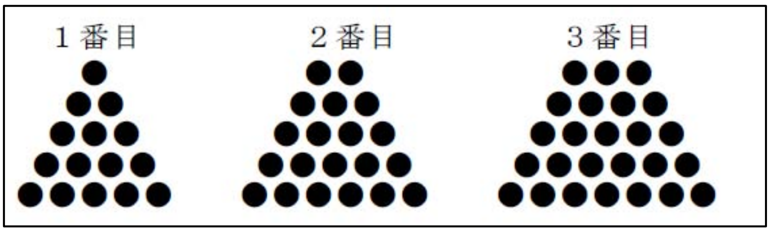
○　授業の概要

T1:小学校教員　　T2：中学校教員

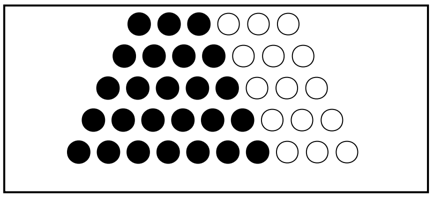
①学習課題の提示

ご石の並び方の規則性に着目して、全部の個数を工夫して数える方法を考える。

「ご石ならべ」



T1「ご石をあるきまりで並べています。このきまりにしたがって並べていくと６番目は，どのような図になるでしょう。プリントの図のつづきにかきましょう。」



T1「今日は，この①6番目の数の求め方について考えてもらうのだけど，……次の４つの式をみて，どのように考えたのか(数えたのか)説明してもらおうと思います。……」

【４つの式を提示】

① ６＋７＋８＋９＋１０＝４０

② （６＋１０）×５÷２＝４０

③ （６＋２）×５＝４０

④ １５＋５×５＝４０

T1「プリントを使って，自分のしやすい方法からしましょう。」

【児童の自力解決】(ほとんどの児童が最低１つは説明できる状態)

T1「①について説明できる人」

C 「上から順番に足していく」

T1「上の段から順番に個数を足していくんだね。」〈板書 1〉

【板書 1】

各だんの数をたす

① ６＋７＋８＋９＋１０＝４０

T1「台形の面積の仕方」〈板書２〉

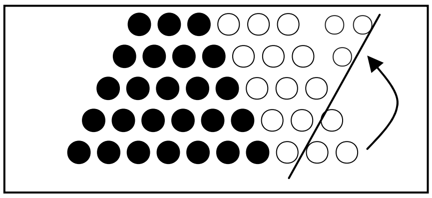
【板書 2】

台形の面積

（上底＋下底）×高さ÷２

② （６＋１０）×５÷２＝４０

T１「じゃあ悩んでいた③」



【板書 3】

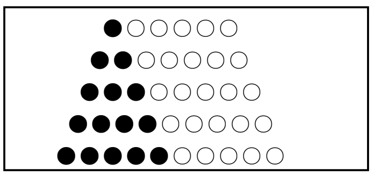
平行四辺形に

上へあげる

③ （６＋２）×５＝４０

c「右下の 3 つを右上にもっていって，平行四辺形の面積を求める仕方でする。」T1 復唱しながら〈板書 3〉

T1「じゃあ最後に④」



【板書 4】

１５＋平行四辺形

④ １５＋５×５＝４０

ｃ「白いところが平行四辺形だから，底辺×高さをして５×５で，黒の三角形のところは１５コだから１５＋５×５になる。」

T1「なるほど，(復唱)」〈板書 4〉

【T2 と交代】―（略）―

T2「それでは，今，○○君のいってくれた②10 番目の数をこれまでに見つけた 4 つの方法で求めてみたいと思います。

T2「10 番目の図思い浮かべられますか?」ｃ「(数名）はい。(頷く子多数)」

T2「じゃあ，一番上の段は，いくつですか」

ｃ「10 個」T2「すばらしい。それじゃあ 2 段目は？」ｃ「11 個」

T2「では，一番下の段は？」ｃ「15 個」T2「それでいい？」ｃ「14 個」

T2「それではそれぞれの方法でご石の数を求めてみてください」

【各自，計算してプリントに記入】

T2「①番の仕方ではどのようになりますか」

ｃ「10＋11＋12＋13＋14＝60」【板書１の下に式を板書】

T2「②のしかたではどうなりますか」

ｃ「(10＋14) ×5÷2＝60」【板書２の下に式を板書】

T2「③のしかたでは？」

ｃ「(10＋2) ×５＝60」【板書３の下に板書】

T2「④ではどうですか？」

ｃ「15＋5×9＝60」【板書４の下に板書】

ここまでの学習で，具体的な場面については，多用な方法で解決できる状況であることがうかがえる。

いよいよ，一般化である。以下，中学校の教員(T2)が指導をおこなっている。

T2「もう何番目でもいけますか？」

ｃ「100 番目」T2「いきなり 100 番目か。……20 番目はいけますか？」

T2「それじゃあ，4 つのうちで③の仕方で③20 番目の数を求めてみましょう」

【各自計算】

ｃ「(20＋2) ×5＝110」

T2「③番目の式で，④30 番目を考えたらどうなるか」

ｃ「(30＋2) ×5」T2「計算大変だから式だけでいいわ。」

T2「もう何番目でもいけますか？」

ｃ「100 番目」「100 番目」

T2「100 番目もやりたいが，ここで，まとめよう。何番目でも求められる式にしたいのだが，できるかな？」

T2「⑤6 番目，10 番目，20 番目，30 番目」といいながら，
式中の 6，10，20，30 を赤丸で囲む。

c「⑦あっ，わかった」

T2「⑧なにか，うまいものを使って式に表せないかな」

c「x を使う」

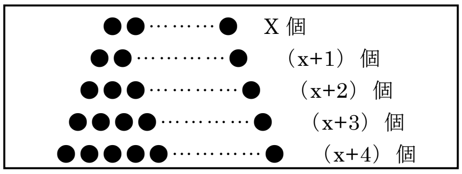
T2「じゃあ，x を使ったらどんな式で書けるかな」

c「(x ＋2) ×5」

T2「この式を使えば，100 番目だろうと 1000 番目だろうと x をかえたらいいだけだろ。(ア)なっ，便利や」

T2「他の①，②，④も同じように表せますか?」

【図 1】



黒板に図 1 をヒントとして提示。

（このあと，各自解決した後，①～④を x を使った式で表わす活動。）

T2「これで，何番目でも求められる式ができた。100 番目でも，1000 番目でも，1 億番目でも数が出る。」

T1「じゃあ，行きますよ。100 番目」T2「510 個」

T1「1000 番目」T2「5010 個」T1「1211 番目」（笑）T2「5565 個」

T1「1 億番目」T2「5 億 10 個」

T2「このみんなが考えた 4 つの式の x に，たとえば，1 億を入れて計算すれば，1 億でも，どんな数でも求められるわけだ。(あ)でも，先生は，中学校の先生だから，もっと簡単な式を実は知っている。」

c「(い)教えてください」

T2「(う)5 × x ＋10」c「えっ？」「えっ」

T2「確かめてみようか。x に 6 を入れたら 40．10 だったら 60。ねっ。」

c「ほんとだ」

T2「(イ)数学もなかなかいいやろ。」

T2（このあと①を x で著した式を変形して 5 × x ＋10 を説明した後，順に④までの式を変形して説明。）

T2「まあ，(ウ)中学校へきたら，こういう風になるということをちゃんと教えてもらえるということ。」

T1「すごいなあ。4 つとも別々の考え方だったけど。1 つの式で書けるんだ。

これまで，x なんてこんな風に計算したりできるとは思ってなかっ

たでしょ。こんなことをわかるようになるように，あと２ヶ月先生と一緒に算数がんばろうな。」

（算数のまとめを書いて終わりにしましょう。）【授業終了 60 分間の授業】

平成 20 年３月に公示された学習指導要領では，小学校第６学年で「文字と式」として，式にｘ，ａなどの文字を使用することを学習する。この授業事例は，今後，小学校での文字指導の発展として参考になる事例である。

この授業の前半は，小学校の教員が主たる指導者として，目標の１，２について学習を進めている。下線部①，②で，６番目，１０番目の碁石の数を能率的に求める方法を求めている。ここまでの授業の展開は，これまでも小学校の授業の中でしばしば実践されてきた内容であるといえる。

後半は，中学校の教員が主たる指導者として目標の２，３について学習を進めている。文字を使った一般化については，後半の部分で取り上げられている。授業の記録の下線部③から⑧で，６番目，１０番目の４つの求め方から，より能率的に計算できるであろうと考えられる③の式（求め方）に着目し，下線部③，④で 20 番目，30 番目を求めた後，⑤で変数にあたる数値と定数にあたる数値に着目させる教師の発言がある。T2 の下線部⑤の後の多くの児童のつぶやき「あっわかった」（下線部⑥）を見ると，下線部⑤は，子どもたちに，同じように見える数値の中から変数にあたるものと定数にあたるものがあることを発見させることに効果的であったと思われる。その後文字を使った式で表わし，下線部⑥で，文字式のよさに触れている。

さらに，T1 の問いに対して，次々と 100 番目，1000 番目，1211 番目，1 億番目についてまるで速算術のように言い当てた後，下線部（あ）で，中学校の先生であるからできることを強調し，子どもたちにもっと学びたいという意欲をかき立てている。

そして，示されたのが自分たちが考えていた 4 つの式とはちがう「５×ｘ＋１０」（下線部（う））という式である。この式を見たときの子どもたちの反応「えっ」（下線部（う））は，これまでに考えたどの式ともちがう簡潔でエレガントともいえる式に対する子どもたちの素直な「驚き」や「意外さ」を端的に表わしているといえる。下線部（ア）（イ）はで「数学のよさ」にふれている部分であるが，下線部（イ）では，５×ｘ＋１０という式のよさについて再度強調し，その後これまで考えていた 4 つの式がすべて「５×ｘ＋１０」に帰着できることを式の変形によって示すことで，文字が計算の対象であることにもふれさせるとともに，子どもたちの考えてきた４つの式がどれも「５×ｘ＋１０」に帰着され一般化されることを鮮やかに説明している。

その上で,「中学校へきたら,こういう風になるということをちゃんと教えてもらえるということ」(下線部(ウ))と中学校数学の学習への期待観を高める働きかけをしている。この授業では,小学校での学習を基礎として,子どもたちを数学の世界へとうまく導いている一例であるといえる。

この実践は,小学校教員と中学校教員のＴＴで実践されたが,もちろん,小学校の教師だけでも実践可能であろう。あえて,中学校教員とのＴＴで実践したのは,「子どもたちの中学校数学への期待感を高めたかったからである」と指導者が述べている。確かに,中学校教員に指導してもらうことは,小学校の児童にとっては,新鮮であろうし,60 分間という授業時間を考えても,途中で,指導者が交代したことが,児童の授業への集中力を持続させるという効果もあったのであろうと考えられる。

３　小学校･中学校のそれぞれのよさを生かした指導の改善

(1) 小学校と中学校の授業

本研究でおこなった教員の意識調査の結果や筆者がこれまでに参観した算数･数学の授業等から小学校と中学校の授業について簡単に整理してみると次のようなものになると考えている。

表４　小学校算数と中学校数学の授業の比較

	小学校	中学校
教員	●　数学の歴史や学習内容の数学的な背景についての取り上げられることはあまりみられない。 ●　児童の学習状況についての把握は,比較的よくできており,指導がていねいであることが多い	●　数学に関する専門性が高く,学習内容の数学の歴史や学習内容の数学的な背景について意識して取り上げられることがある。 ●　生徒の学習状況は理解しているもののそれが細かな指導に生かされていないことがある。
授業の形態や指導方法	●　いわゆる問題解決型(課題提示・自力解決・集団討議・まとめと適用)の授業が多い。 ●　集団での話し合いや討議を重視している授業が多い。 ●　具体的な操作活動や実験・実測等の活動を多く取り入れている授業が多い。 ●　学ぶ楽しさやおもしろさを強く意識した指導が多い。 ●　一斉学習やグループ学習,ペア学習など様々な学習形態が取り入れられた授業が多い。	●　教師の説明や問題演習などを組み合わせた理解や知識技能の獲得に重点点をおいた授業が多い。 ●　教師と生徒の一問一答の繰り返しによる授業進行が多い。 ●　具体的な操作活動や実験･実測等の活動は少ない。 ●　直観的な理解を促したり,概念を説明したりするための教具を工夫した授業が多い。 ●　一斉学習による授業が多い。
学習課題等	●　より日常的な事例や児童の生活,興味・関心に配慮した学習課題が設定されることが多い ●　学習したことの日常生活における有	●　生徒の生活や興味関心よりは,数学的な面白さや数学的な価値に重点をおいた学習課題が設定されることが多い。

	用性などがより強調される場合が多い。	● 日常生活への適用などについては，あまり触れられないことが多い。

これらは，算数と数学の学習内容に依存する部分も多いと考えられるし，それぞれの学校への社会的な要請の違いもあると思われる。しかし，それぞれの指導方法や授業の形態等のよさを双方向に生かしながら，よりよい指導方法を検討したり，よりわかりやすい授業構成を検討したりすることは，「わかる授業」の構築や小中のスムーズな接続を考える上では，重要な視点となると考える。

(2) 小中一貫教育モデル校での児童生徒への意識調査から

平成１６年度から小中一貫教育を実施している奈良市立田原小･中学校では，小学校教員のきめ細かなていねいな指導と中学校教員の専門性をいかすために，第５学年，第６学年（小学校５年６年）のすべての算数授業で，小学校教員と中学校教員によるＴＴ(ティームティーチング)による授業がおこなわれている。この実践では，小学校の教員は「小学校の学習内容が中学校の数学にどのようにつながっているかがよくわかるようになったし，説明に困るような質問にも適切に答えてもらえる。また，数学の先生に発展的な適用問題を出してもらえることで，子どもたちの集中度も増すし，発展的な学習もできる。」とその成果について述べている。また，中学校教員は，「はじめは，すっきり説明してあげた方がよくわかるのではないかと思いながら，授業に参加していたが，いろいろと手をかえ品を変えてていねいに考えさせることの大切さに気づかされた。中学校での授業でも，小学校での学習内容を生かすように心がけている。」と語っている。また，この実践では，児童生徒にアンケート調査を実施し，次のような結果が示されている。[平成 19 年度奈良市小中一貫教育推進委員会報告書，奈良市教育委員会]

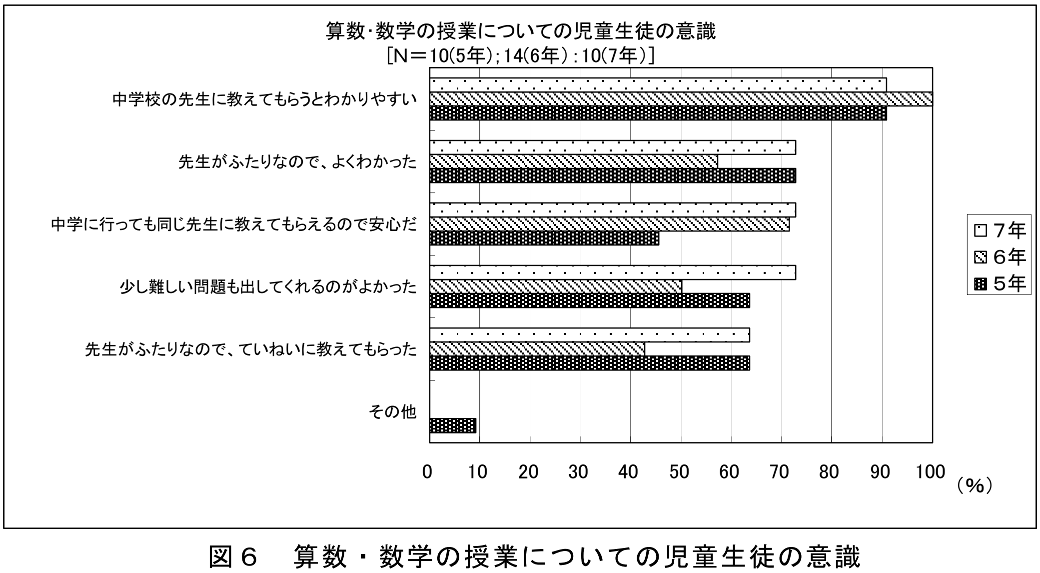


図６　算数・数学の授業についての児童生徒の意識
（平成 19 年度奈良市小中一貫教育推進委員会報告書，奈良市教育委員会）

標本数は少ないものの，この結果とインタビューから小中のスムーズな接続や「わかる授業」の構築について，小学校教員と中学校教員の協働による授業では，次のような効果があることがうかがえる。

① 中学校の教員がその専門性を生かして適切な指導を行なうことができる。

② 授業構築の中で，小学校と中学校の学習内容の系統や接続について強く意識した指導をすることができる。

③ 小学校と中学校の指導方法のよさを取り入れて指導することでことができる。

④ めざす子ども像や目標を共有化することができる。

⑤ 中学校へ進む上で，子どもたちの安心感が高まる。

(3) 指導観・授業観及び目標の共有化

小中学校の接続を考えるとき，小学校と中学校の指導体制や指導方法の変化や学習内容の変化などが，いわゆる「中１ギャップ」が子どもたちにとって単なる壁となるのではなく，小学校から中学校への段差が「意味あるもの」となることが重要である。

また，中学校卒業時までにどのような力を身に付けた生徒を育てるのかという目標（いわゆる「めざす子ども像」）を義務教育に関わるすべての教員が意識して共有することも重要である。

先にあげた教師へのインタビューからもわかるとおり，小中一貫教育モデル校では，小中の教員のＴＴによる実践によって，小学校の教員が学習内容の中学校への発展を意識し，中学校の教員が小学校のきめ細かな指導や児童の話し合いを重視した問題解決型の授業等の授業構成を意識するようになったことがわかる。すなわち小中学校双方の教員の算数･数学の指導観や授業観に大きな影響を与え，変化を与えたといえる。

このような指導観や授業観の変革は，小学校における小中学校教員のコラボレーション（協働）から，小中の教員が双方にそのよさを学び合おうとする姿勢が生み出されたことから実現したものである。小中学校教員の協働が，小中のスムーズな接続に効果を発揮したと考えられる。小中接続を考えるとき，教員同士の協働ということがひとつのキーワードになるといえる。

また，田原小・中学校では，９年間を４年間の前期，３年間の中期，２年間の後期と分け，それぞれに目標を定め，それぞれのブロックごとに子どもの発達に応じたプログラムを工夫している。これらのプログラムを企画運営する中で，目標に対する教員の理解が深まり，共通の目標に向かって，よりよい指導を探究することにつながっていったと考えられる。特に中期では，先に述べた小・中学校の教員の協働によって，ブロックの運営が行われる。そのような中

で，共通の目標を明確に意識することによって，小中学校を見通して，「今何を為すべきか」ということを問いながら小中の教員が指導観・授業観及び教育目標を共有化しながら教育実践が行われたのであろうと推察される。

小中一貫教育モデル校での成果は，学校の規模の問題や校舎の立地の状況（一体型，隣接型，離散型等）の問題なども含め，さらに慎重に検証を進めなければならない内容を多く含んではいるが，一般の小中学校における小中接続に大きな示唆を与えるものではないかと考える。

4　おわりに

小中の接続を考えるとき，カリキュラムや学習内容の課題，指導方法や授業構成に関する課題，教員の指導観や授業観に関する課題など様々な観点からの検討が必要である。

本稿では，次にあげるようなことが，小中接続を考察する際の重要な視点であることが示唆されたのではないかと考えている。

(1) 評価を生かした指導改善の視点

- 校種をこえた系統性の確かな理解に支えられた授業の構築
- 学習内容だけではなく指導方法にも着目した小中の系統性の確保
- 評価の結果を生かした具体的な指導改善の方向性

(2) 教員の指導観・授業観の変革の視点

- 小学校・中学校の双方の授業・指導法のよさを学び合う姿勢の重要性
- 小中教員が協働する授業実践による指導観・授業観の変革

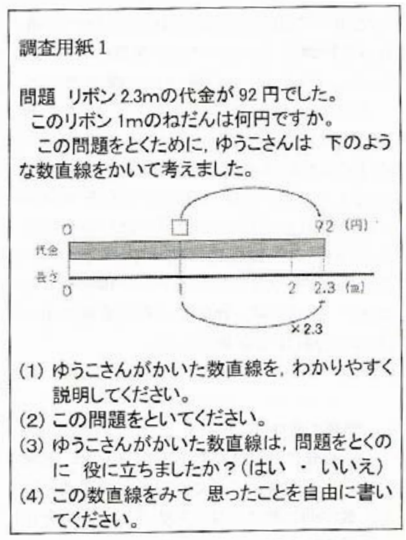
特に，教員の指導観や授業観の変革が，指導の改善に及ぼす影響が大きいと考えられるため，小中の接続をよりスムーズにするために，小学校教員と中学校教員の協働する授業の設定や形式的ではない交流が今後一層すすんでいくことが望まれる。

また，評価を生かして小学校と中学校の接続という観点から個々の学習内容に関する指導改善の方法について研究を進めることも重要であると考える。

小中の接続をよりスムーズにするためには，児童生徒を対象とした，情意面も含めたさらに精緻な調査研究やカリキュラム，指導方法とその効果の測定等についての研究し，整理することなどが必要であろうと考える。

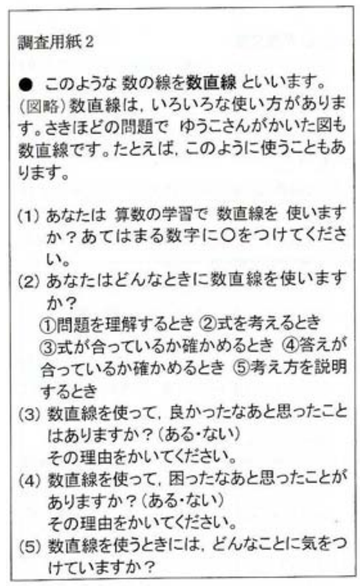
註及び引用・参考文献

【註 1】 加藤は,『数学教育における数直線の利用とメタ認知』(2009) において,次のような調査問題を小学校 5・6 年正の児童に実施し，数直線を理解しており，立式もできているにもかかわらず,「数直線をよく使う」児童は少なく,「あまり使用しない児童」が少なからずいることを指摘している。


調査用紙 1

問題　リボン 2.3mの代金が 92 円でした。
このリボン 1mのねだんは何円ですか。
この問題をとくために，ゆうこさんは　下のような数直線をかいて考えました。

(1) ゆうこさんがかいた数直線を，わかりやすく説明してください。
(2) この問題をといてください。
(3) ゆうこさんがかいた数直線は，問題をとくのに　役に立ちましたか？（はい ・ いいえ）
(4) この数直線をみて　思ったことを自由に書いてください。


調査用紙 2

● このような 数の線を**数直線** といいます。
(図略) 数直線は，いろいろな使い方があります。さきほどの問題で　ゆうこさんがかいた図も数直線です。たとえば，このように使うこともあります。

(1) あなたは 算数の学習で 数直線を 使いますか？あてはまる数字に○をつけてください。
(2) あなたはどんなときに数直線を使いますか？
①問題を理解するとき ②式を考えるとき ③式が合っているか確かめるとき ④答えが合っているか確かめるとき ⑤考え方を説明するとき
(3) 数直線を使って，良かったなあと思ったことはありますか？（ある・ない）
その理由をかいてください。
(4) 数直線を使って，困ったなあと思ったことがありますか？（ある・ない）
その理由をかいてください。
(5) 数直線を使うときには，どんなことに気をつけていますか？

【註２】 授業「ご石の数を求めよう」については，2001 年 1 月 19 日，生駒市立生駒台小学校第 6 学年での生駒有喜子教諭他の授業実践を記録したビデオから筆者がその概要を記述したものである。教師や児童の発言は，できるだけ原文のままの逐語録としたが，一部わかりやすいように筆者が修正している部分がある（修正部分は特記していない)。

【参考・引用文献並びに註】

(1) 梶田叡一，2007,『教育評価入門　学びと育ちの確かめのために』，共同出版

(2) 勝美芳雄, 2009,『再考―証明の意義の指導～演繹的な証明の必要性～』第 46 回近畿数学教育学会発表資料

(3) 加藤久恵，2009,『数学教育における数直線の利用とメタ認知』第 42 回数学教育論文発表会論文集，pp. 235-240

(4) 國本景亀, 1997,『数学教育における証明指導』,「数学教育学のパースペクティブ」聖文社，pp. 335-354

(5) 文部科学省，平成１７年,『小学校算数・中学校数学・高等学校数学 指導資料ーPISA2003（数学的リテラシー）及び TIMSS2003（算数・数学）結果の分析と指導改善の方向ー』pp.134-135
(6) 文部科学省・国立教育政策研究所，平成 20 年,『平成 20 年度全国学力学習状況調査【中学校】報告書』pp.198-205
(7) 文部科学省・国立教育政策研究所平成21年12月『平成２１年度 全国学力・学習状況調査【 中学校 】報告書』文部科学省・国立教育政策研究所,pp.266-267
(8) 中原忠男他，平成 20 年，文部科学省検定教科書『小学算数 5 年上』平成 16 年検定済，大阪書籍，pp.55-56
(9) 奈良市教育委員会・奈良市小中一貫教育推進委員会，平成 19 年『平成 19 年度奈良市小中一貫教育推進委員会報告書』
(10)日本数学教育学会，1997,『日本の算数･数学教育 1997　学校数学の授業構成を問い直す』，産業図書
(11) 重松敬一他，平成 20 年，文部科学省検定教科書『中学数学２』平成 17 年検定済，大阪書籍，pp.87-88

小学校と中学校との接続について
～「数量関係」と「資料の活用」の領域～

藤本　禎男
和歌山市立野崎小学校

1　はじめに

（１）教育基本法と学校教育法

平成 18 年 12 月に約 60 年ぶりに改正された教育基本法では，第５条に「国民は，その保護する子に，別に法律で定めるところにより，普通教育を受けさせる義務を負う。」と述べ，小・中学校の教育が義務教育として今まで以上に小学校と中学校の関連や連携が強調された。また，義務教育の最終段階である中学校の役割が重視され，学習指導要領の実施状況を確認するための到達度評価が必要となってくる。

さらに，同年６月に，「学校教育法等の一部を改正する法律」，「地方教育行政の組織及び運営に関する法律の一部を改正する法律」，「教育職員免許法及び教育公務員特例法の一部を改正する法律」の３つの法律が公布された。

学校教育法では学校段階の目的や目標規定が改められるとともに，新たに義務教育の目標等が定められた。第 21 条に１～ 10 までの目標が掲げられ，義務教育段階においてそのすべてを達成することが求められているのである。算数・数学科について言えば，６に書かれている「生活に必要な数量的な関係を正しく理解し，処理する基礎的な能力を養うこと。」が児童生徒に身に付けさせなければならない内容であると考える。

（２）指導時間数の増加

今回の学習指導要領の改訂において，次ページに示したとおり小学校では 45 分を１単位時間，中学校では 50 分を１単位時間と違いはあるものの，各教科別での増減単位時間を調べてみると，国語科，算数・数学科，理科と外国語活動・外国語が 100 単位時間を超える増加となっている。とりわけその中でも，算数・数学科は 212 単位時間と今回の改訂で最も学習時間が増加された教科なのである。我々，

小・中学校各教科等の授業時数の増減表

教科等	小学校	中学校	合計増減時間
国　語	84	35	119
社　会	20	55	75
算数・数学	**142**	**70**	**212**
理　科	55	95	150
音　楽	0	0	0
図工・美術	0	0	0
体育・保体	57	45	102
家庭・技家	0	0	1
外活・外国語	70	105	175
道　徳	0	0	0
特別活動	0	0	0
総合的な学習の時間	-150	-20	-170

算数・数学に関わる者にとってはたいへん喜ばしいことではあるが，その反面世の中の人々から,算数・数学科への大きな期待がかけられていることなのである。

全国学力・学習状況調査やＰＩＳＡ調査などの結果をみると，読解力や記述式の問題に課題があることから，その基礎となる国語科の授業時数が増えるとともに，グローバル化が一層進む中で英語がコミュニケーションの道具として重要であることから外国語の時間が増加されたものと考える。先進国をみても 2005 年に韓国が，2007 年にあの母国語を大切にするフランスまでもが英語を必修としたのである。それから考えると日本の取組はやや弱いものと思える。

また，学力の低下が懸念される中，体力の低下も心配されることから，体力の向上など健やかな心身の育成について指導の充実を図ることから体育・保健体育の授業時数の増加がされたものと考える。

なお,「総合的な学習の時間」が 170 単位時間削減されたものの，その趣旨やねらいは継承され，各教科において身に付けさせることが重要であると考える。

２　新しい学習指導要領における改善点

（１）今回の学習指導要領の改訂において

平成 19 年 11 月に中央教育審議会から出された「教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ」において，次に示す２つのことが内容事項として加えられることが適当であると述べられている。

①　社会の変化や科学技術の進展等に伴い，社会的な自立等の観点から子どもたちに指導することが必要な知識・技能 ②　確実な習得を図る上で，学校や学年間等であえて反復（スパイラル）することが効果的な知識・技能

①で示された内容の一つとして，今回新しく新設された「資料の活用」の領域が上げられる。イギリス，オーストラリアやニュジーランドにおいては，算数・数学と平行して統計の学習がされている。また，アメリカでは数学の中で統計の学習が行われ，ともに小学校３年生程度から高等学校まで系統立てて実施されている。

こうした状況から今回の学習指導要領の改訂で,「資料の活用」領域がどのように小学校段階から改善されたのかをみていきたい。

（２）　小学校「数量関係」と中学校「資料の活用」と高等学校の接続について

①小学校低学年への「数量関係」領域の導入

現行の学習指導要領においては，小学校第３学年から「数量関係」の領域が入っているが，次表に示したように，今回の改訂から「数量関係」の領域が小学校第１学年から学習することとなった。

学習内容については，従来「数と計算」の領域で学習していた「加法及び減法

が用いられる場面を式にしたり，式を読み取ったりすることができるようにする。」が「数量関係」の領域に移行してきたのである。また，増加した内容としては，「ものの個数を絵や図などを用いて表したり読み取ったりすることができるようにする。」であり，児童の身近な生活と関連付けて，事象を簡単に整理して数が多いか少ないかを判断する内容である。

小学校「数量関係」と中学校「資料の活用」と高等学校の学習内容

学　年	学　習　内　容
小学校第１学年 「数量関係」	ものの個数を絵や図などを用いて表したり読み取ったりすることができるようにする。
小学校第２学年 「数量関係」	身の回りにある数量を分類整理し，簡単な表やグラフを用いて表したり読み取ったりすることができるようにする。
小学校第３学年 「数量関係」	資料を分類整理し，表やグラフを用いて分かりやすく表したり読み取ったりすることができるようにする。
小学校第４学年 「数量関係」	目的に応じて資料を集めて分類整理し，表やグラフを用いて分かりやすく表したり，特徴を調べたりすることができるようにする。
小学校第５学年 「数量関係」	目的に応じて資料を集めて分類整理し，円グラフや帯グラフを用いて表したり，特徴を調べたりすることができるようにする。
小学校第６学年 「数量関係」	資料の平均や散らばりを調べ，統計的に考察したり表現したりすることができるようにする。 具体的な事柄について，起こり得る場合を順序よく整理して調べることができるようにする。
中学校第１学年 「資料の活用」	目的に応じて資料を収集し，コンピュータを用いるなどして表やグラフに整理し，代表値や資料の散らばりに着目してその資料の傾向をよみとることができるようにする。
中学校第２学年 「資料の活用」	不確定な事象についての観察や実験などの活動を通して，確率について理解し，それを用いて考察し表現することができるようにする。
中学校第３学年 「資料の活用」	コンピュータを用いるなどして，母集団から標本を取り出し，標本の傾向を調べることで，母集団の傾向が読み取れることを理解できるようにする。
高等学校 数学Ⅰ 「データの分析」	統計の基本的な考えを理解するとともに，それを用いてデータを整理・分析し傾向を把握できるようにする。
高等学校 数学Ａ 「場合の数と確率」	場合の数を求めるときの基本的な考え方や確率についての理解を深め，それらを事象の考察に活用できるようにする。
高等学校 数学Ｂ 「確率分布と統計的な推測」	確率変数とその分布，統計的な推測について理解し，それらを不確定な事象の考察に活用できるようにする。
高等学校 数学活用 「社会生活における数理的な考察」	社会生活において数学が活用されている場面や身近な事象を数理的に考察するとともに，それらの活動を通して数学の社会的有用性について認識を深める。

低学年へ「数量関係」の領域が導入されたことについては,「関数の考え」,「式の表現と意味」や「資料の整理と読み」の考え方や自分の考えをまとめ他の児童に伝えるといった表現力を伸ばすという観点からであると考えられる。

これらは，平成 20 年 1 月 17 日に中央教育審議会から出された「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」(P83)において「根拠を明らかにし筋道立てて体系的に考えることや，言葉や数，式，図，表，グラフなどの相互の関連を理解し，それらを適切に用いて問題を解決したり，自分の考えを分かりやすく説明したり，互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。」と述べられていることを受けている。

②小学校第 5 学年の算数的活動

新しい学習指導要領においても現行の内容と同様に，小学校第 3 学年で棒グラフ，小学校第 4 学年で折れ線グラフ，小学校第 5 学年では円グラフや帯グラフを学習する。ただ，学習内容は同じであるが小学校第 5 学年の算数的活動の中で「目的に応じて表やグラフを選び，活用する活動」と明記されている。このことは，従前ではグラフのかき方や読み方を学習するだけであったが，今回の改訂では既習したグラフの中からどのグラフを用いるかを選択したり，どのグラフとどのグラフをかね合わせれば分かりやすく表現したりすることができることを求めているのである。また，教師側からすれば，学習内容にこのような場面を設定することが大切である。

③小学校第 6 学年と中学校第 1 学年の接続

小学校第 6 学年の「数量関係」の学習内容では,「資料の平均や散らばりを調べ，統計的に考察したり表現したりすることができるようにする。」と書かれてあり，中学校第 1 学年の「資料の活用」の学習内容「目的に応じて資料を収集し，コンピュータを用いるなどして表やグラフに整理し，代表値や資料の散らばりに着目してその資料の傾向をよみとることができるようにする。」と一見変わらないように見える。このことは，今回の学習指導要領の改訂で重要とされる一つであり，学習内容をなだらかに発展させたり，学び直しの機会を設けたりするなど，発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による学習が進められるようにと考えられたものである。

同様に,「数量関係」の領域で言えば小学校第 6 学年で学習する「比例と反比例」,「文字を用いた式」や「起こり得る場合」がある。このことは，いわゆる「中 1 ギャップ」といわれている中学校第 1 学年でのつまずきや数学を嫌いになってしまうことへの対応として，小学校と中学校の学習の円滑な接続を図ったのであると考えられる。また，学習内容だけではなく，中学校第 1 学年で数学を時間をかけて学ぶことができるように，現行の 105 単位時間から 140 単位時間と増加されたことも重要である。

ただ，中学校では，学習度数分布表に整理する場合，階級の幅や階級の個数を自ら考えたり，階級の幅が異なるとヒストグラムから読み取ることができる傾向が異なったりすることを学習する。

小学校と中学校で学習する平均値は，資料の特徴を一つの数値で簡潔に表すことができることから，代表値として多く用いられている。しかし，中学校では平均値が資料の特徴を表す代表値としてふさわしくない場合もあることを学習する。例えば，分布が非対称であったり，極端にかけ離れた値があれば平均値はその値に大きく左右されてしまうことも理解し，他の代表値として最頻値（モード）や中央値（メジアン）を学習するのである。

このように，小学校で学習してきた内容について再度学び直すとともに，中学校においては，その既習内容を発展させたり，深化させたりするなどの工夫が，今回の学習指導要領では随所において行われている。小学校と中学校の学習内容の連携を図ることで，生徒に興味・関心をもたせることで学習意欲を喚起させるとともに，学習内容を確実に定着させるようにしているのである。

④中学校と高等学校との接続

現行の学習指導要領においては，統計は高等学校の「数学Ｃ」の学習内容であり，必修でないため履修する生徒が限られているのが現状である。しかし，今回の学習指導要領の改訂に当たっては，小学校，中学校と高等学校の連携を重視したことから高等学校「数学Ｉ」，に「データの分析」として，「統計の基本的な考えを理解するとともに，それを用いてデータを整理・分析し傾向を把握できるようにする。」と述べられ，必修となった。学習内容については，四分位偏差，分散や標準偏差などからデータの傾向を把握し，説明することと述べられている。

また，中学校段階では少し難しいのではないかと考えられた散布図や相関関係を学習することにより，二つのデータの相関を把握し，説明できることを目的としている。

３．おわりに

今までの学習指導要領においては，小学校と中学校，また，中学校と高等学校との接続を重視してきたが，今回の学習指導要領の改訂では，学習内容の学び直し，既習事項からの発展や進歩といったような流れがスムーズに学校段階で実施できるように配慮されていると考えられる。

現在の社会情勢を見てみると，科学技術系の職業をはじめ多くの仕事では，統計を活用する能力の必要性が高まっている。一方社会では，統計的なデータを不適切に利用して巧妙に人をだますような事件も起きている。そうした事件に巻き込まれないための判断力を高める意味でも「資料の活用」の領域を学習することで，「だまされない日本人」を育てていくことが大切なのである。

また，今回の学習指導要領において重要視された一つとして、コミュニケーションや感性・情緒、知的活動の基盤である言語活動の充実を図ることが述べられ

た。この面からも，児童・生徒に思考・判断し、表現する能力を育成するにあたり、基礎的・基本的な知識及び技能を習得するとともに、自ら課題を見付け、その課題を解決するための資料を収集し、既習事項を活用して整理し、分析して他の児童・生徒に分かりやすく説明するために工夫を凝らす「資料の活用」の領域の学習は、今日を生き抜くためにおいて重要性の高い学習内容であると考えられる。

引用・参考文献

・幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善につい　て（答申）中央教育審議会

・小学校学習指導要領解説算数編　平成 20 年 8 月　文部科学省

・中学校学習指導要領解説数学編　平成 20 年 9 月　文部科学省

・高等学校学習指導要領解説数学編　平成 20 年 12 月　文部科学省

１－２　中学校と高等学校の接続

数学科における中学校と高等学校の接続について

新学習指導要領を基にわかる授業の在り方を考える

永田 潤一郎
国立教育政策研究所

目　次

要　約

数学科においても，中学校と高等学校の接続が求められるようになって久しい。しかし，学校間の接続を図るに当たって具体的にどのような指導の改善を図っていけばよいのかについては具体的な指摘が少ない。ここでは，新学習指導要領に示した中・高等学校の内容構成と，今後一層の充実が求められている数学的活動をもとに，わかる授業の構築を見据えて，中学校と高等学校の接続に関わる指導の在り方について考える。

キーワード　中高の接続　学習指導要領　数学的活動

１．はじめに

中学校と高等学校の接続に関して「連携」が求められるようになって久しい。その背景としては，生徒一人一人の能力や適性，興味・関心，将来の進路などが多様化している現状があり，全国各地でこれまでの中学校と高等学校の在り方を見直し，学校段階間の接続を改善し柔軟な対応ができるようにするための様々な試みが進められている。文部科学省でも，従来の中学校や高等学校の制度に加えて，生徒や保護者が６年間の一貫した教育課程や学習環境の下で学ぶ機会をも選択できるようにすることにより，中等教育の一層の多様化を推進し，生徒一人一人の個性をより重視した教育の実現を目指すものとして，中央教育審議会第二次答申（平成９年６月）の提言を受けて，「学校教育法等の一部を改正する法律」を平成１０年６月に成立させ，平成１１

年４月より，中高一貫教育を選択的に導入することを可能にしている。

しかし，こうした状況に対して課題を指摘する声もある。例えば「学校間の接続を図るに当たって授業をどのようにしたらよいのか，そもそも学校間の接続を図ることと授業の接続を図ることとをいかに結び付けていくか，といったことについては，余り手が付けられてこなかった」（天笠，2007）という見解はそのひとつである。

ここでは，数学科における中学校と高等学校の接続と指導の在り方について，新学習指導要領に示した内容の構成と，今後一層の充実を求めている数学的活動を基に考える。

２．数学科における中・高接続についての課題

数学科における中学校と高等学校の接続の在り方については，これまでにもいくつかの課題が上げられている。ここではそのうち，生徒の学習の状況を把握するために実施された国内及び国際調査の結果に基づく報告を中心にその課題を確認しておくことにする。

平成１５年７月に高等学校第１学年の生徒約 4700 人を対象に実施された OECD の PISA2003 調査（世界では４１カ国／地域が参加）の結果に基づく指導資料では，学習指導の改善に向けて次のことが求められている（文部科学省，2006）。

> …小学校，中学校，高等学校で繰り返し指導されている内容やある内容に関連した内容については，異なる学校種間でどのような指導がなされているかを互いに把握し，導入場面や発展場面などで適宜取り上げ，生徒の理解を容易にしたり，興味や関心を高めたりすることが大切である。特にここでは，指導内容，指導方法に関する連携を積極的に行うよう強調しておきたい。最近，小・中連携，中・高連携は以前より盛んになってきているが，まだ児童生徒に関する情報交換が大半で，指導内容，指導方法に関する連携は十分には行われていない。また，小・中・高の連携はあまり耳にしない。小・中間，中・高間，小・中・高間で算数・数学科での内容の扱い方，指導方法などについて意見を交換し合い，子どもの現状についての理解を進めるとともに，各学校種間での指導のギャップを小さくし，よりよい指導となる工夫を積極的に行いたい。

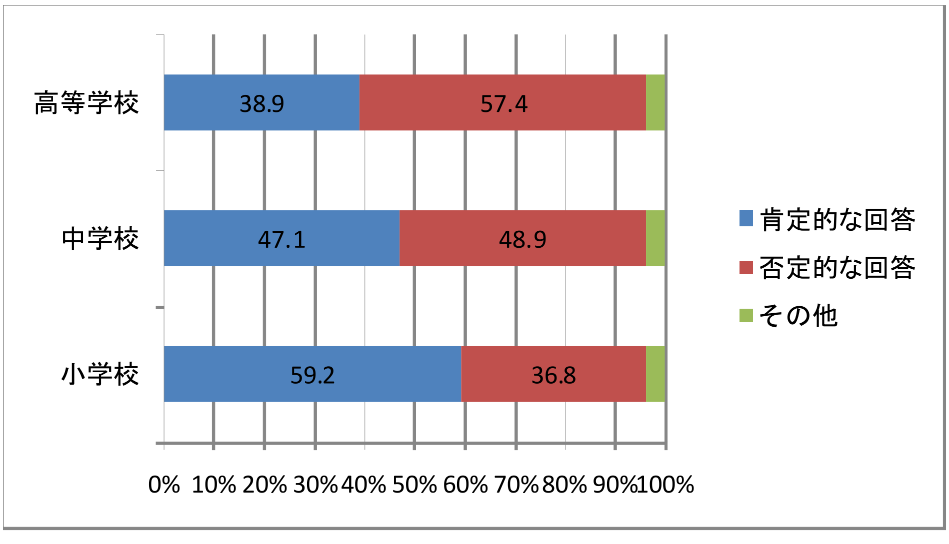
このうち，「まだ児童生徒に関する情報交換が大半で，指導内容，指導方法に関する連携は十分には行われていない」という指摘は，１で述べた学校教育全般としての中学校と高等学校の接続の課題に通じる。指導内容に関する連携には教育課程についての理解を相互に深めることが必要であり，また，指導方法に関する連携には互いに重視している授業づくりの考え方，例えば数学的活動の充実の方策の共有等が必要である。

平成１６年１～２月に中学校第１～３学年の生徒約 240000 人を対象に実施された国立教育政策研究所の平成１５年度教育課程実施状況調査の結果報告書には，指導上の改善点として，高等学校との関連を図ることの必要性が次のように示されている。（国立教育政策研究所，2005）

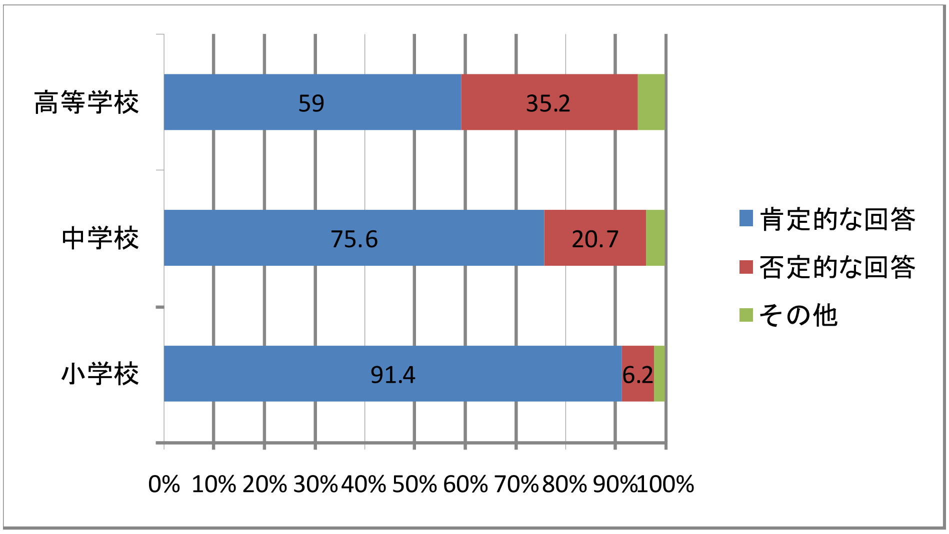
> …また，高等学校に進学した生徒で数学の勉強をできればやりたくないと思っている生徒が少なからずいる状況があるといわれる。中学校で数学を勉強したことにより，さらに発展した数学を勉強してみたいと思う生徒が増えるよう指導の改善をすることが求められている。中学校の学習では，将来の学習への発展のきっかけを見出せるようにするとともに，それに関心をもち意欲的に探究できるよう導きたい。高等学校の指導では，中学校までの学習で培われた素地を的確にとらえ，生徒の学習状況に応じて適切に対応できるよう工夫する必要がある。

このうち，「高等学校に進学した生徒で数学の勉強をできればやりたくないと思っている生徒が少なからずいる状況があるといわれる」ことについては，国立教育政策研究所が実施した，平成１７年高等学校教育課程実施状況調査（「数学Ｉ」を履修する生徒約 30000 人が対象）と，平成１５年度小中学校教育課程実施状況調査（小学校の児童約 210000 人，中学校の生徒約 240000 人が対象）における児童生徒質問紙調査の分析が参考になる（国立教育政策研究所，2005，2007）。それによると，「数学（小学校では「算数」）の勉強が好きだ」及び「数学（小学校では「算数」）の勉強は大切だ」に対する回答の状況は次の通りである。なお，小学校は第６学年の児童，中学校は第３学年の生徒のデータを用いた。

「数学の勉強が好きだ」



「数学の勉強は大切だ」



「数学の勉強が好きだ」については，小学校で肯定的な回答（「そう思う」または「どちらかといえばそう思う」という回答）をした児童生徒の割合が６０％程度，中学校で５０％程度，高等学校で４０％程度と，学校段階が上がるごとに１０ポイント程度減少している。一方，「数学の勉強は大切だ」に対する回答の状況については，肯定的な回答をした児童生徒の割合は小学校で９０％，中学校では７５％程度であるのに対し，高等学校は６０％程度に止まっている。

算数・数学を学習することに対する好き・嫌いについては，どの学校段階においても肯定的な回答が少ないことに課題があり，算数・数学を学習することに価値を見いだしているかどうかについては，各学校段階間に比較的大きな差があることに課題がある。後者については，中学校と高等学校における肯定的な回答を増やすとともに，その差を少なくするための方策を検討する必要がある。なお，小学校と中学校については，平成１９年度から毎年度実施されている全国学力・学習状況調査の児童生徒質問紙調査に，同じ質問項目を設けて調査を行っている（文部科学省・国立教育政策研究所，2009）。その結果によると，「数学の勉強が好きだ」に対し肯定的に回答している児童生徒の割合は，小学校で８５％程度，中学校で５０％程度で過去３回の調査で大きな変化はない。また，「数学の勉強は大切だ」に対し肯定的に回答している児童生徒の割合は，小学校で９０％程度，中学校で８０％程度で，こちらも過去３回の調査で大きな変化はない。以上の調査結果から，数学科における中学校と高等学校の接続の在り方について考える場合，その共通のテーマとして，なぜ数学を学習するのかをどうやって生徒に伝えていくのかを設定し，授業研究等を深めることも必要である。

前述した平成１７年高等学校教育課程実施状況調査の結果報告書では，現行学習指導要領の改訂に際し中学校から高等学校へ移行されたた基礎的な内容の理解が十分でない状況がみられたことを踏まえ，指導上の改善点として中学校と高等学校の連携に

ついて次のように述べている。

…こうした結果から，中学校との接続を考慮したり，数学的活動を一層充実させたりすることにより，基礎・基本の確実な定着を図る必要がある。特に数学的活動を充実させることに関しては，生徒自身が数学を創りあげる授業を重視したい。定理や性質に関する一般的な説明からはじめるのではなく，具体例を重視し，具体例を基に成り立つ数学的な関係や性質を推測させ考察させた後，それらの関係や性質の一般性について考察させるといった授業の工夫である。たとえば，余弦定理の指導においては，いきなり余弦定理の証明から始めるのではなく，二辺の長さとその間の角の大きさが分かっているいくつかの三角形について，三平方の定理を繰り返して残りの辺の長さを求める活動の後，余弦定理へとつなげることなどが考えられよう。

学習指導要領の改訂に伴う内容の移行をきっかけに，中学校と高等学校の接続を見直すことは有効であろう。また，このことに関連して，現行学習指導要領の改訂に際しても，数学的活動を充実させる必要があることが指摘されている点も興味深い。以下，数学科における中学校と高等学校の接続を，わかる授業を構築するための指導の在り方という視点から見直すために，新学習指導要領に示した内容の構成と，今後一層の充実が求められている数学的活動をもとに考える。

３．教育課程における接続

新学習指導要領においては, 中学校と高等学校の接続をより一層重視する観点から，教育課程上の配慮がなされている。特に，中学校で指導する内容と，高等学校で共通必履修科目となった「数学Ⅰ」については，その内容構成をそろえ，指導内容の系統性が一層明らかになるようにしている。また，現行学習指導要領で中学校数学科が重視してきた「課題学習」を位置付け，数学的活動が実現される場にしようとしている。この点について，「高等学校学習指導要領解説　数学編」（以下「高等学校解説」とする）では次のように述べられている（文部科学省，2009(1)）。

…また，円滑に学習を進めることができるよう中学校数学が「A数と式」,「B図形」,「C関数」,「D資料の活用」の４領域で構成されていることも踏まえ，次の①から④までの内容で構成するとともに，課題学習を内容に位置付けることとした。
① 数と式　② 図形と計量　③ 二次関数　④ データの分析　［課題学習］

なお，中学校で指導する内容と，高等学校の「数学Ⅰ」の内容の関係は，**表１**のようにまとめることができる。数学的活動については次項で触れることにして，ここでは，数と式に関わるいくつかの指導内容を取り上げ，指導上の関連を考えることで，

数学科における中学校と高等学校の接続について確認することにする。

中学校における「Ａ数と式」と高等学校「数学Ⅰ」における「① 数と式」の関係を見ると，中学校第３学年において，数を拡張していく過程に関連して「有理数，無理数」という用語を扱い，これを高等学校において実数としてまとめ，数の体系についての理解を深めることができるようにしている。用語の指導は，単にそれを記憶させることに意味があるのではない。小学校・中学校・高等学校の指導を見通し，数の範囲の拡張とその概念のとらえ直しという視点を大切にした指導が求められる。

また，中学校では第２学年を中心に，「Ｂ図形」においていろいろな図形の性質を証明することについて指導しているが，高等学校「数学Ⅰ」では，「① 数と式」で集合と命題を学習することにより，事象を論理的に表現する際の基礎となる知識や技能を身に付けるとともに，いろいろな事象や数学の諸概念を多面的に見たり統合的に見たりすることができるようにしている。中学校では「命題」という用語は一般に指導されていないが，数や図形の性質などを「～ならば，…である。」といった表現で的確に表すことの重要性は変わらない。高等学校における学習の素地となる指導に配慮する必要がある。

中学校では第３学年で「Ａ数と式」において式の展開と因数分解を指導している。その内容は，簡単な一次式の乗法や，次のような乗法公式を用いる簡単な式の展開及び因数分解である。

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

高等学校「数学Ⅰ」でも「① 数と式」で式の展開及び因数分解を扱うが，乗法公式と因数分解の公式は二次までにとどめ，三次の乗法公式は「数学Ⅱ」で扱うことにしている。すなわち，「数学Ⅰ」で扱う新たな公式は次にあげるもののみであり，一つの文字に着目して式を整理したり，一つの文字に置き換え複雑な式を簡単な式に帰着させるなど，式の見方を豊かにすることの指導を重視している。

$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

高等学校「数学Ⅰ」のこうした考え方は，今回の学習指導要領改訂で中学校数学科が重視している学び直しの機会を設けることとも関連して重要である。今後は，こうした教育課程上の配慮を生かし，「いつまでに，何がどのようにできるようになればよいのか」を中学校と高等学校における指導を見通して考えることが一層重視されるべきである。

４．義務教育段階での学習内容の確実な定着

中学校と高等学校における指導を見通して考えることに関連して，数学科の指導か

らは少し離れるが，新しい高等学校学習指導要領「第１章　総則」の「第５款　教育課程の編成・実施に当たって配慮すべき事項」に新たに示された３(3)について触れておきたい（文部科学省，2009(2)）。

(3) 学校や生徒の実態等に応じ，必要がある場合には，例えば次のような工夫を行い，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るようにすること。

ア　各教科・科目の指導に当たり，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための学習機会を設けること。

イ　義務教育段階での学習内容の確実な定着を図りながら，必履修教科・科目の内容を十分に習得させることができるよう，その単位数を標準単位数の標準の限度を超えて増加して配当すること。

ウ　義務教育段階での学習内容の確実な定着を図ることを目標とした学校設定科目等を履修させた後に，必履修教科・科目を履修させるようにすること。

もちろん，こうした指導が求められるのは，学校や生徒の実態等に応じて必要があると判断されろ場合であり，全ての生徒に対して必ず実施しなければならないものではない。しかし，指導計画の作成に当たった配慮すべき事項として，義務教育段階の学習内容の確実な定着を図るための指導を行うことを新たに示し，高等学校段階の学習に円滑に移行できるようにすることを重視していることは，高等学校の教師はもとより中学校で指導に携わる教師も十分に理解する必要がある。「高等学校解説」では，このことに関わる数学科の指導について次のように述べている。

例えば，「数学Ⅰ」では，指導において関連する中学校の内容を適宜取り入れ復習をした上で学習を進めたり，新たに学習した視点で中学校の内容を見直したりすることが考えられる。また，生徒の実態等を踏まえ，標準単位数の標準の限度を超えて単位数を配当し，それぞれの内容に関連する中学校の内容を時間をかけて確実な定着を図る機会を設けることも考えられる。さらに，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図ることを目標とした学校設定科目を設けて履修させ，その後「数学Ⅰ」を履修させることも考えられる。

この中で，「指導において関連する中学校の内容を適宜取り入れ復習をした上で学習を進め」ることや，「新たに学習した視点で中学校の内容を見直したりすること」は，中学校と高等学校の接続を考える上での視点として大切にする必要がある。

５．数学的活動を通しての連携

周知の通り，新学習指導要領における小学校，中学校，高等学校にける教科の目標

は以下の通りである。

「小学校算数科」
　算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。
「中学校数学科」
　数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。
「高等学校数学科」
　数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

　すべての学校段階において，教科の目標の冒頭に「数学的活動（または算数的活動）を通して」と示すことで，中教審の答申においても指摘されている「算数的活動・数学的活動を一層充実させ，基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け，数学的な思考力・表現力を育て，学ぶ意欲を高めるようにする」ことを明らかにしている。また，中学校と高等学校で「数学のよさ」を示しているのは，2で指摘したように数学を学習することに価値を見いだせない生徒が少なからずいる現状に対応することの必要性を明らかにするためである。中学校と高等学校の接続を考えるとき，教科としての目標の共通部分に着目し，その共通理解を深めることで指導を見直して連携を図ることも重要である。

　なお，中学校数学科の教科目標には，その冒頭部分以外に「数学的活動の楽しさ」を実感することが記されている（文部科学省，2008(1)）。これについて「中学校学習指導要領解説　数学編」（以下「中学校解説」とする）では，「数学的活動の楽しさについては，単に楽しく活動をするという側面だけではなく，それによって生徒にどのような知的成長がもたらされるかという質的側面にも目を向ける必要がある」と説明している（文部科学省，2008(2)）。論理的，抽象的な思考が次第にできるようになる中学生の発達の段階では，具体物を操作する活動だけでなく，考えたり説明したりする活動を目的に応じて活発に行えるようにすることが重要であり，これを引き継ぐ高等学校においても，その重要性は変わらない。その意味で，高等学校で「数学Ⅰ」

及び「数学Ａ」に，従来から中学校で大切にしてきた課題学習が位置付けられたことの意味は大きい。例えば，「数学Ｉ」において，課題学習は新学習指導要領の「２　内容」及び「３　内容の取扱い」に次のように示されている。

２　内容
〔課題学習〕
(1)，(2)，(3)及び(4)の内容（注：「数学Ｉ」の内容）又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにする。

３　内容の取扱い
(3) 課題学習については，それぞれの内容との関連を踏まえ，学習効果を高めるよう適切な時期や場面に実施するとともに，実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする。

数学的活動の実現される場としていることや，学習した内容を相互に関連付けるなどして見いだした課題を解決する学習であるとしている点で，課題学習は中学校と高等学校において同一の概念であり，指導の過程の適切な場面に位置付けることが必要である。今後高等学校において課題学習を具体化していく過程では，これまでに中学校において蓄積してきた実践の素材及び指導方法等を参考にすることで，中学校と高等学校の接続を考える際のひとつの端緒とすることが考えられる。

新学習指導要領においては，数学的活動について次の**表２**のように，中学校では３つの活動の例を，高等学校では３つの配慮事項を示している。

中学校第１学年	中学校第２，３学年	高等学校
既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだす活動	既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだし，発展させる活動	自ら課題を見いだし，解決するための構想を立て，考察・処理し，その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり，それを発展させたりすること。
日常生活で，数学を利用する活動	日常生活や社会で，数学を利用する活動	学習した内容を生活と関連付け，具体的な事象の考察に活用すること。

数学的な表現を用いて，自分なりに説明し伝え合う活動	数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動	自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり，議論したりすること。

表２：中学校と高等学校における数学的活動

今後，中学校と高等学校において数学的活動を具体化していく際には，指導内容や子どもの発達の段階等を踏まえ，その共通点と相違点を明らかにしていくことが必要である。また，数学科における中学校と高等学校の接続を基に指導の改善を考えていく際には，こうした検討を踏まえ，中学校と高等学校を通して数学的活動の質をどのように高めていくのかを明らかにしていくことが不可欠である。

引用文献，参考文献

１．天笠茂，2007,「学校段階の連携と授業の開発」,「中等教育資料」平成 19 年 12 月号，pp.10-13
２．文部科学省，2006,「小学校算数・中学校数学・高等学校数学　指導資料　～PISA2003（数学的リテラシー）及び TIMSS2003（算数・数学）結果の分析と指導改善の方向～」，東洋館出版社出版社
３．国立教育政策研究所教育課程研究センター，2005,「平成 15 年度小・中学校教育課程実施状況調査　結果の概要及び教科別分析」
４．国立教育政策研究所教育課程研究センター，2007,「平成 17 年度教育課程実施状況調査（高等学校）結果概要・集計表　数学」
５．文部科学省・国立教育政策研究所，2009,「平成 21 年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書」
６．文部科学省，2009(1),「高等学校学習指導要領解説　数学編」
７．文部科学省，2009(2),「高等学校学習指導要領（平成 21 年３月告示)」
８．文部科学省，2008(1),「中学校学習指導要領（平成 20 年３月告示)」
９．文部科学省，2008(2),「中学校学習指導要領解説　数学編」

	中学校・第１学年	中学校・第２学年	中学校・第３学年		高等学校「数学Ｉ」
Ａ 数 と 式	**正の数，負の数** ア　正の数と負の数の必要'住と意味 イ　正の数と負の数の四則計算の意味 ウ　正の数と負の数の四則計算 エ　正の数と負の数を用いること **文字を用いた式** ア　文字を用いることの必要性と意味 イ　乗法と除法の表し方 ウ　一次式の加法と減法の計算 エ　文字を用いた式に表すこと **一元一次方程式** ア　方程式の必要性と意味及びその解の意味 イ　等式の性質と方程式の解き方 ウ　一次方程式を解くことと活用すること	**文字を用いた式の四則計算** ア　簡単な整式の加減及び単項式の乗除の計算 イ　文字を用いた式で表したり読み取ったりすること ウ　目的に応じた式変形 **連立二元一次方程式** ア　ニ元一次方程式の必要性と意味及びその解の意味 イ　連立方程式とその解の意味 ウ　連立方程式を解くことと活用すること	**平方根** ア　平方根の必要Ｉ住と意味 イ　平方根を含む式の計算 ウ　平方根を用いること **式の展開と因数分解** ア　単項式と多項式の乗法と除法の計算 イ　簡単な式の展開や因数分解 ウ　文字を用いた式でとらえ説明すること **二次方程式** ア　二次方程式の必要'住と意味及びその解の意味 イ　因数分解や平方完成して二次方程式を解くこと ウ　解の公式を用いて二次方程式を解くこと エ　二次方程式を活用すること	１ 数 と 式	**ア　数と集合** (ｱ) 数の実数までの拡張と，無理数の四則計算 (ｲ) 集合と命題及びその事象の考察への活用 **イ　式** (ｱ) 二次式の展開と因数分解 (ｲ) 一次不等式を解くことと事象の考察への活用
Ｂ 図 形	**平面図形** ア　基本的な作図の方法とその活用 イ　図形の移動 **空間図形** ア　直線や平面の位置関係 イ　空間図形の構成と平面上の表現 ウ　基本的な図形の計量	**基本的な平面図形と平行線の性質** ア　平行線や角の'性質 イ　多角形の角についての性質 **図形の合同** ア　平面図形の合同と三角形の合同条件 イ　証明の必要性と意味及びその方法 ウ　三角形や平行四辺形の基本的な'住質	**図形の相似** ア　平面図形の相似と三角形の相似条件 イ　図形の基本的な性質 ウ　平行線と線分の比 エ　相似な図形の相似比と面積比及び体積比の関係 オ　相似な図形の性質を活用すること **円周角と中心角** ア　円周角と中心角の関係とその証明 イ　円周角と中心角の関係を活用すること 三平方の定理 ア　三平方の定理とその証明 イ　三平方の定理を活用すること	２ 図 形 と 計 量	**ア　三角比** (ｱ) 鋭角の三角比の意味と相互関係 (ｲ) 三角比の鈍角までの拡張とその値を求めること (ｳ) 正弦定理・余弦定理 **イ　三角比を活用した図形の計量**
Ｃ 関 数	**比例，反比例** ア　関数関係の意味 イ　比例，反比例の意味 ウ　座標の意味 エ　比例，反比例の表，式，グラフ オ　比例，反比例を用いること	**一次関数** ア　事象と一次関数 イ　一次関数の表，式，グラフ ウ　ニ元一次方程式と関数 エ　一次関数を用いること	**関数 $y=ax^2$** ア　事象と関数 $y=ax^2$ イ　関数 $y=ax^2$ の表，式，グラフ ウ　関数 $y=ax^2$ を用いること エ　いろいろな事象と関数	３ 二 次 関 数	**ア　二次関数とそのグラフ** **イ　二次関数の値の変化** (ｱ) 二次関数の値の変化と最大値，最小値 (ｲ) 二次方程式・二次不等式と二次関数のグラフ
Ｄ 資 料 の 活 用	資料の散らばりと代表値 ア　ヒストグラムや代表値の必要性と意味 イ　ヒストグラムや代表値を用いること	**確率** ア　確率の必要性と意味及び確率の求め方 イ　確率を用いること	**標本調査** ア　標本調査の必要性と意味 イ　標本調査を行うこと	４ デ ー タ の 分 析	**ア　四分位偏差，分散及び標準偏差などの意味とデータの散らばり** **イ　散布図や相関係数の意味とデータの相関**
数 学 的 活 動	各領域の学習やそれらを相互に関連付けた学習において，次のような数学的活動に取り組む機会を設けること ア既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだす活動 イ日常生活で数学を利用する活動 ウ数学的な表現を用いて，自分なりに説明し伝え合う活動	各領域の学習やそれらを相互に関連付けた学習において，次のような数学的活動に取り組む機会を設けること ア既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだし，発展させる活動 イ日常生活や社会で数学を利用する活動 ウ数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動		数 学 的 活 動	指導に当たっては，各科目の特質に応じ数学的活動を重視し，数学を学習する意義などを実感できるようにするとともに，次の事項に配慮するものとする。 (1) 自ら課題を見いだし，解決するための構想を立て，考察・処理し，その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり，それを発展させたりすること。 (2) 学習した内容を生活と関連付け，具体的な事象の考察に活用すること。 (3) 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり，議論したりすること。

表１：中学校数学科と高等学校「数学Ｉ」の内容構成

１－３　教材開発

渡邊　公夫

早稲田大学教育・総合科学学術院

概　要

１．懸垂曲線についての疑問

鎖などを吊り下げて出来る曲線(懸垂曲線)って 2 乗に比例する関数のグラフではないの？さあ、先生は何と答えますか。

２．角度から三角比

「三角関数に慣れること」と「三角関数がわかること」。何が違うのか。自らの知識を再構築してみよう。行き詰ったら、やはりわかっていないということだ。投げられるボールが受け止められるだけでは、新しい投げ方には気付かない。

３．　三角比から角度

角度って何？。それの値はどのようにして求めるの？角という図形、角の大きさ、角度の違いは何だろう。

４．　n 倍角の公式

2 倍角の公式や 3 倍角の公式のみを知って、加法公式がわかったつもり？チェビシェフの多項式など個性ある多項式を忘れていませんか。

５．常用対数

$\log_{10} 2$ の値を信じるか、2^{20} の値を信じるか？

６．ピタゴラス数と複素数

ピタゴラス数は如何なる処に現れるか？

７．内積の解釈

内積の幾何学的意味を考えてみよう。

８．無理数乗

$3^{\sqrt{2}}$ や 2^{π} の定義とその値はいかに求めるか。そこに新たな数学が眠っている。

９．　対数関数

その定義は指数関数の逆関数というのが専らであるが、積分や傾きとはどのような関係にあるか？。一寸した工夫が新しい数学を拓く。

10．関数マンダラ

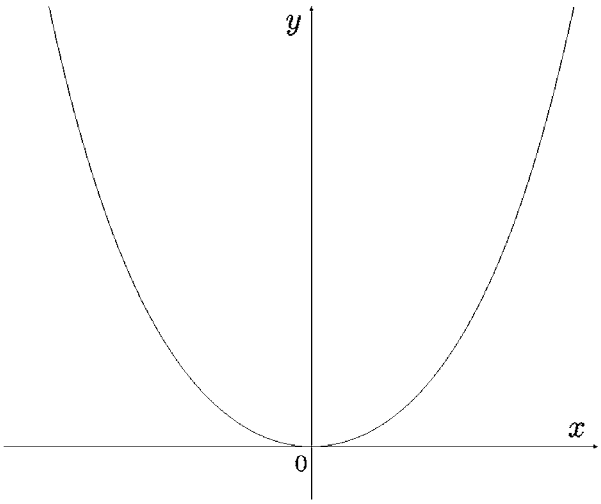
二次曲線と三角関数、指数関数、対数関数等の初等超越関数との間に潜む数学的構造。大学の微分積分学の一つの終点でもある。

1　懸垂曲線についての疑問

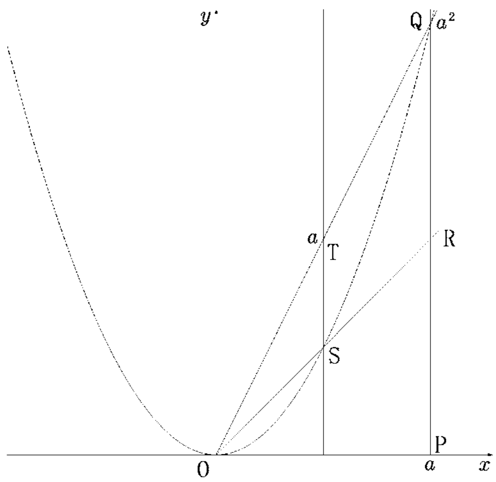
1.1　2 乗に比例する関数のグラフ

2 乗に比例する関数か

下記のグラフは 2 乗に比例する関数のグラフか。



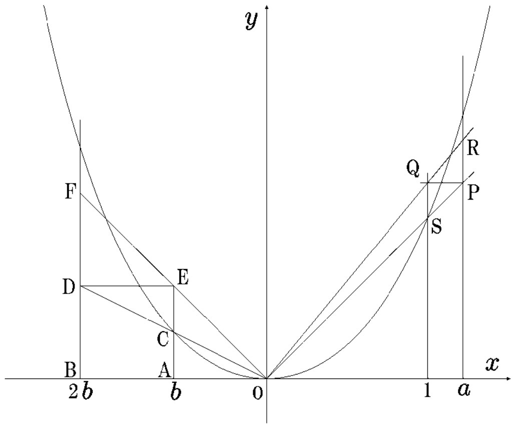
まず、放物線の場合を確かめてみよう。
【放物線の図】



座標軸はあるのだが、座標の入っていない図において $y=x^2$ のグラフが与えられたとき、どのような活動をすると、このグラフが $y=x^2$ であることが納得されるか、という問いを考えてみた。数個の点をとって、曲線で結ぶ。これが関数 $y=x^2$ のグラフであると教え込んでい

るし、我々もそうだと信じ込んでいる。パソコンでグラフを書いたりして、そのソフトを作った人はそれなりの認識をもっているだろう。x 軸上に点 P をとり、線分 OP の長さを a としよう。点 P から x 軸にたいして垂線を立て、グラフ $y=x^2$ との交点を Q とする。積を求めるには 1 の長さを見出さなければならない。直交する軸がなす角の二等分線を作れば、その交点の座標が $(1,1)$ となる。この二等分線と線分 PQ の交点を R とし、直線 $x=1$ との交点を T とすると、その座標は $(1,a)$ となる。結果として、二点 OT を通る直線は Q を通る。これは、線分 PQ の長さが a^2 どあることを意味する。

一般には、計測して長さを求め、その値から $y=x^2$ のグラフであると確かめる。この行為と上記の活動と比較してみよう。



３年の授業で２乗に比例する関数の授業をひとまず終えたとしよう。先生は「何か質問はないかな」と形式的にも話すだろう。そのとき、一人の生徒が、ポケットから鎖を取り出しながら、両端を左右の手で持ちながら下に垂れ下がった形を作り、おもむろに先生に聞いてみた。「先生、この形は２乗に比例する関数のグラフですか」。先生はここぞとばかり、様々な懸垂線の形を描いた用紙を提示し、「君の作った形はどれと同じかな」と問いかけた。生徒は、自分の作った形に似ている用紙を選び、垂れ下げた鎖を用紙の図形に重ねてみた。「先生、これがよく合っています」。そこで、先生は、その用紙を人数分コピーし、生徒に渡した。

さて、こからが問題である。

関数 $y=ax^2$ のグラフは、直線 $y=x$ の交点の座標を改めて $(1,1)$ とすれば、その座標でのそのグラフの式は $v=u^2$ となる。即ち、どんな放物線も相似ということが実感できる。

このグラフが 2 乗に比例する関数のグラフであるとしよう。そこで、直線 $y=x$ との交点の座標を $(1,1)$ とすると、 $a>1$ となる a をとり、a の 2 乗を作図してみよう。 $y=x$ の直線との $x=a$ の直線の交点を P とし、 $x=1$ と $y=a$ の直線の交点、すなわち $(1,a)$ を Q とする。さて、原点と Q を結び、その延長と $x=a$ の直線との交点 R の座標は (a,a^2) しかし、これは曲線上ではない。

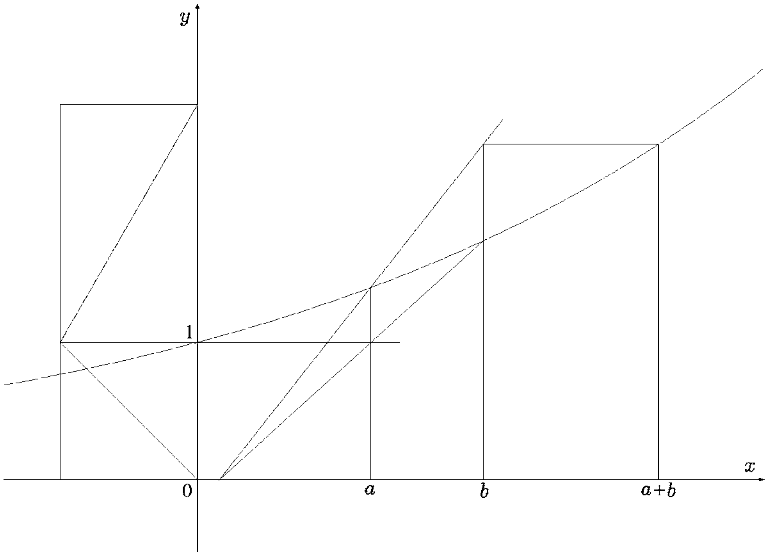
x 軸上の点 $(b,0)$ を A、$(2b,0)$ を B とする。直線 $x=b$ と当該曲線との交点を C とし、線分 OC の延長と直線 $x=2b$ との交点を D とする。$BD=2AC$。

さらに、D を通り x 軸に平行な直線と直線 $x=b$ の交点を E とする。線分 OE の延長と直線 $x=2b$ の交点を F とすると $BF=4AC$ で、明らかに F は曲線上にはない。従って 2 乗に比例する関数のグラフではない。

もっと簡単な方法があった。2 乗に比例する関数 $Y = ax^2$ においては x の値が 2 倍になれば y の値は 4 倍になる。これを確かめればよい。

直角を夾む 2 辺の長さが 1 と x である三角形は決定条件より斜辺が確定し、その長さ y 決まる。従って、y は x の関数になる。これが無理関数 $y = \sqrt{1+x^2}$ だからといって除外される。x から y が決まる根拠が実に数学的である。

更に、加法が乗法に変換される関数 (指数関数) のグラフの存在なども、下記の図でその素地的体験をすることができる。これは、実数の加法 $a+b$ や 乗法 $a \times b$ の意味を振りえる機会を提供する教材である。



2　角度から三角比

三角関数

$$x = \cos 35°, \quad y = \sin 35°, \quad \frac{y}{x} = \tan 35°$$

の値を求めよ。

2.1　三角比

電卓を利用して、以下の角度の正弦・余弦の値を求めて欲しい：

$$23°, 24°, 25°, 26°, 27°, 28°, 29°, 31°, 32°, 33°, 34°, 35°, 37°, 38°, 39°, 40°, 41°, 42°, 43°, 44°.$$

この用紙を選択した君は 23° の正弦・余弦の値を以下に述べる方法で求めること。

持参した電卓の種類により、方法が異なる。商用電卓を持参した場合は 1.1 に、関数電卓を持参した場合には 1.2 に進む。

2.1.1　商用電卓を持参した場合

手本として、その方法を 30° の場合に示す。30° の正弦は正三角形を利用して、0.5 であることが知られているので、以下に述べる方法で求めた値と真の値とのズレの程度が分かる。従って、求めた正弦の値がおおよそどのくらいの精度であるかを知ることができる。

まず、与えられた角度を 1° より小さくなるまで、次々に半分にしていく。

$$30°,\ 15°,\ 7.5°,\ 3.75°,\ 1.875°,\ 0.9375°$$

1° より小さくなったら、それを radian に置き換える。円周率は $\pi = 3.14159265358979\cdots$ を必要に応じて用いてよい：

$$\theta := 0.9375° = 0.01636246173_{[12]}.$$

そこで、$\theta \sim 0$ なので $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ を用いる。数学的に評価すれば誤差の範囲が分かる。実は、高校生でも容易に理解できるよい不等式がある：

$$\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} < \sin\theta < \theta, \qquad (\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\ ).$$

各自、証明を与えること [1)]。証明は求値が済んでから行うことを勧める。

以後は、当該の角 30° を目指し、倍角の公式で順次値を求めていく：

$$\sin\phi = a \quad \curvearrowright \quad \sin 2\phi = 2a\sqrt{1-a^2},$$

を利用する。時間が許すなら、三角関数の加法定理を用いないで、上記倍角の公式を示して欲しい[2)]。

具体的には、電卓で、以下のような作業を行なう：$a \mapsto \sqrt{-a^2+1} \times a \times 2$, i.e.,

$\boxed{\mathrm{a}}$、$\boxed{\times}$、$\boxed{=}$、$\boxed{+/-}$、$\boxed{+}$、$\boxed{1}$、$\boxed{=}$、$\boxed{\sqrt{\ }}$、$\boxed{\times}$、$\boxed{\mathrm{a}}$、$\boxed{=}$、$\boxed{\times}$、$\boxed{2}$、$\boxed{=}$、

一連の操作の結果、入力した値が a のとき、$2a\sqrt{1-a^2}$ の値がディスプレイに表示される。以下、この一連の操作を繰り返す：

$$
\begin{aligned}
&0.0163602718_{[12]} < \sin 0.9375^\circ < 0.01636246173_{[12]},\\
&0.03271616434_{[12]} < \sin 1.875^\circ < 0.03272054244_{[12]},\\
&0.06539730164_{[12]} < \sin 3.75^\circ < 0.06540604376_{[12]},\\
&0.13051461146_{[12]} < \sin 7.5^\circ < 0.1305319838_{[12]},\\
&0.25879647968_{[12]} < \sin 15^\circ < 0.2588303301_{[12]},\\
&0.49995953636_{[12]} < \sin 30^\circ < 0.50002023558_{[12]}.
\end{aligned}
$$

この結果より、以上の方法で求められた正弦の値[3)]は、小数点以下 3 桁位までは正しそうであることが分かる。これは君の選択した角度について、精度の目安の根拠となる。

2.2　関数電卓を持参した場合

まず、次の式を証明せよ[1)]：

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n = \cos\theta + i\sin\theta.
$$

さて、関数電卓を用いての $\cos\frac{\pi}{6}$、$\sin\frac{\pi}{6}$ の値の求め方を示す。

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{\pi}{6}}{n}i\right)^n = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0.8660254\cdots + 0.5\times i
$$

であることを考慮にいれ、n をいかほどにすると、小数点以下 4 桁ほどまで正確に値を求めることができるかを調べる[2)]。

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{\frac{\pi}{6}}{1024}i\right)^{1024} &= 0.866141365_{[10]} + 0.500066897_{[10]}i,\\
\left(1+\frac{\frac{\pi}{6}}{2048}i\right)^{2048} &= 0.866083377_{[10]} + 0.500033457_{[10]}i,\\
\left(1+\frac{\frac{\pi}{6}}{4096}i\right)^{4096} &= 0.866054389_{[10]} + 0.500016731_{[10]}i,\\
\left(1+\frac{\frac{\pi}{6}}{8192}i\right)^{8192} &= 0.866039896_{[10]} + 0.500008366_{[10]}i.
\end{aligned}
$$

$n = 2048$ ほどになると、小数点以下 3 桁ほどまで正確であることが予想される。

2.3　作業の意義

この作業に如何なる数学的意義、あるいは数学教育的意義を見出すことができるか。

3　三角比から角度

逆三角関数

$$\tan\theta = \frac{7}{10}$$

となる。θ の値を求めよ。

3.1　電卓の操作

電卓の操作では、$\boxed{\text{M+}}$、$\boxed{\text{MR}}$、$\boxed{\text{MC}}$ 等の機能を十分理解し、手間や入力ミスを極力減らすように工夫する。また、それらとは異なる機能が装備されている場合に、それなりの対応が望まれる。

3.2　相性

角度と三角比は実に相性がわるい。有名な直角三角形である頂角がそれぞれ、「30°、60°、90° である三角形」や、「45°、45°、90° である三角形」の辺の長さには無理数が現れる。一方、各辺の長さが整数である直角三角形、即ちピタゴラス数を辺の長さとする直角三角形においては、直角以外は、「きれいな」角度にならない。例えば、各辺の長さが 3、4、5 である直角三角形おいて、直角以外の角度などはその典型である。しかしながら、困らない。それは何故か[1)]。

3.2.1　正接から角度

前節では、電卓を利用して、以下の角度

$$23°, 24°, 25°, 26°, 27°, 28°, 29°, 31°, 32°, 33°, 34°, 35°, 37°, 38°, 39°, 40°, 41°, 42°, 43°, 44°.$$

の正弦・余弦の値を求めた。今回は、その「逆」をやってみよう。正接から角度を求める。

まず、方眼紙に (座標軸を適当にとり)、原点を始点とし x 軸の正の方向に対し与えられた角度 ($d°$ としよう) をもつ半直線 ℓ を描く。方眼紙の範囲内で、半直線 ℓ に最も近いと思われる格子点 (x 座標も y 座標も整数の点) を探す。その座標を (a, b) とするとき、

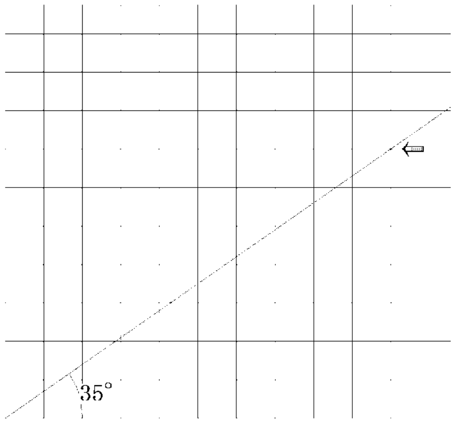
$$\arctan\frac{b}{a} \fallingdotseq d°,\quad \text{i.e.,}\quad \tan d° \fallingdotseq \frac{b}{a}$$

となることを電卓を用いて確かめよ。

この用紙を選択した君は **44°** の半直線を描き、その傾きを正接とする角度が、与えられた角度に近いことを電卓で確かめよ。

3.2.2 例

手本として、その方法を傾き 35° の場合に示す。下図



において、左下の角を原点とする半直線に最も近いと思われる格子点の座標は $(10,7)$ である。

$$\tan\theta = \frac{7}{10}$$

とすると、倍角の公式：

$$\tan\phi = \frac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}$$

より

$$\tan\phi = d$$

のとき

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{d^2+1}-1}{d} \quad {}^{2)}$$

であるから、

$$\tan\frac{\theta}{2} = 0.31522223081_{[12]}$$

となる。この計算は、電卓では以下のようにすればよい。まず、

$\boxed{7}$、$\boxed{\div}$、$\boxed{10}$、$\boxed{=}$、$\boxed{\mathrm{M+}}$

で、$\dfrac{7}{10}$ の値を電卓のメモリーに格納する。ディスプレイに値 0.7 が表示されている。次の操作は

$\boxed{\times}$、$\boxed{=}$、$\boxed{+}$、$\boxed{1}$、$\boxed{=}$、$\boxed{\sqrt{\ }}$、$\boxed{-}$、$\boxed{1}$、$\boxed{=}$、$\boxed{\div}$、$\boxed{\mathrm{MR}}$、$\boxed{=}$、

ここで、上記の値は求められたが、以後の操作のために前のメモリーを消去し、新たな値をメモリーに格納し直す：

$\boxed{\mathrm{MC}}$、$\boxed{\mathrm{M+}}$

さらにこの操作を繰り返す：

$$\tan\frac{\theta}{2^2} = 0.15387907792_{[12]}$$

$$\tan\frac{\theta}{2^3} = 0.07648939432_{[12]}$$

$$\tan\frac{\theta}{2^4} = 0.03818892130_{[12]}$$

$$\tan\frac{\theta}{2^5} = 0.01908764943_{[12]}$$

値が $0.017453292\cdots$ より小さくなるまで、上記の操作を行う：

$$\tan\frac{\theta}{2^6} = 0.00954295554_{[12]} < 0.017453292\cdots = \frac{\pi}{180}$$

次に関係式

$$\sin\phi < \phi < \tan\phi$$

より、$\pi = 3.14159265358979\cdots$ を用いて、

$$0.00954252104_{[12]} < \frac{\theta}{2^6} < 0.00954295554_{[12]}$$ [3)]

$$0.00954252104_{[12]} \times \frac{180}{\pi} \times 2^6 < \theta_{degree} < 0.00954295554_{[12]} \times \frac{180}{\pi} \times 2^6$$

$$(34.9880502624_{[12]})^\circ < \theta_{\mathrm{degree}} < (34.9933488972_{[12]})^\circ$$

値

$$\theta_{\mathrm{degree}} = (34.9\cdots)^\circ$$

が電卓で得られる。確かに、35° に近い。

3.3　補遺

実際の値は、

$$\arctan\frac{7}{10} = (34.992020198558662106\cdots)^\circ$$

$$\tan 35^\circ = 0.70020753820970977945\cdots$$

候補の点としては $(3,2)$, $(7,5)$, $(10,7)$, $(477,334)$ などが考えられる。これらの値の出方にも数学的秘密がある。

4　n 倍角の公式

正弦関数の n 倍角の公式

$$\sin n\theta = f(\sin\theta)$$

を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

4.1　個性豊かな多項式たち

三角関数の加法定理を用いると，自然数 n に対して，$\cos n\theta$，$\sin n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表したり，$\sin\theta$ の多項式で表したりすることができる．ここでは，このようにしてできる多項式について考察する．

$\cos nx$ を $\cos x$ の多項式で $\cos nx = F_n(\cos x)$ と表したときに出てくる多項式 $F_n(y)$ はチェビシェフの多項式として知られている[1]．それを計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
F_1(y) &= y \\
F_2(y) &= 2y^2 - 1 \\
F_3(y) &= 4y^3 - 3y \\
F_4(y) &= 8y^4 - 8y^2 + 1 \\
F_5(y) &= 16y^5 - 20y^3 + 5y \\
F_6(y) &= 32y^6 - 48y^2 + 18y^2 - 1 \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

このような多項式を計算するときは，つぎのような方針でやるとよい．三角関数の加法定理により，

$$\begin{aligned}
\cos(n+2)x &= \cos((n+1)x + x) \\
&= \cos(n+1)x\cos x - \sin(n+1)x\sin x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos nx &= \cos((n+1)x - x) \\
&= \cos(n+1)x\cos x + \sin(n+1)x\sin x
\end{aligned}$$

である．この 2 つの式を辺々加えると，

$$\cos(n+2)x + \cos nx = 2\cos(n+1)x\cos x$$

[1] もちろん，そのような多項式 $F_n(y)$ は，各 n について，ただ一通りに定まる．なぜなら，他に $F'_n(y)$ があったとすれば，$-1 \leqq y \leqq 1$ のとき，$y = \cos x$ なる x をとれて，$F_n(y) = F_n(\cos x) = \cos nx = F'_n(\cos x) = F'_n(y)$ となる．よって無限個の値 y で $F_n(y) = F'_n(y)$ となるから，多項式 $F_n(y)$ と多項式 $F'_n(y)$ の係数は一致しなければならない．

となる．これを，$\cos nx = F_n(\cos x)$ によって書き換え，移項すると，

$$F_{n+2}(\cos x) = 2F_{n+1}(\cos x)\cos x - F_n(\cos x)$$

となる．ここで $\cos x$ を変数 y に書き換えると，

$$F_{n+2}(y) = 2yF_{n+1}(y) - F_n(y)$$

となって[2]，$F_n(y)$ の漸化式が得られる．これを用いれば，$F_1(y)$ と $F_2(y)$ とから機械的に $F_3(y), F_4(y), \ldots$ を求めていくことができる．

さて，このチェビシェフの多項式が実は，$\cos nx$ や $\sin nx$ を $\sin x$ で表したときに出現する多項式と関係している．その関係は後に述べることにして，$\cos nx$ や $\sin nx$ を $\sin x$ の多項式で表してみよう．

まず，$\sin nx$ を $\sin x$ で表すことを考えてみよう．この場合は，$\sin nx$ を $\sin x$ の多項式で完全に表せるのは n が奇数の場合で，偶数の場合は $\cos x$ という余計な因子が現れる．$\sin x = y$ とおけば，

$$\begin{aligned}
\sin x &= y \\
\sin 2x &= 2y\cos x \\
\sin 3x &= -4y^3 + 3y \\
\sin 4x &= (4y - 8y^3)\cos x \\
\sin 5x &= 16y^5 - 20y^3 + 5y \\
\sin 6x &= (32y^5 - 32y^3 + 6y)\cos x
\end{aligned}$$

となる．

さて，n が偶数の場合はとりあえず後で考えることにして，n が奇数の場合の係数を考察してみよう．n が奇数のとき，$\sin nx$ を $\sin x$ で表した多項式の m 次の係数を $f_m(n)$ とおくことにしよう．$f_m(n)$ は，上の計算例からもわかるように，m が偶数のときは 0 になる．したがって m が奇数のときを考えればよい．

ここで，$f_m(n)$ が n の多項式になると仮定して，その多項式が何になるかを推測してみよう．たとえば $m = 1$ の場合を考える．上の計算例で，$y(= \sin x)$ の係数を見ていくことで，

$$f_1(1) = 1,\ f_1(3) = 3,\ f_1(5) = 5$$

が分かる．この結果は，一般に $f_1(n) = n$ であることを強く期待させるものである．

次に $m = 3$ の場合を考える．$y^3(= \sin^3 x)$ の係数を上の計算例で見ていくことで，

$$f_3(1) = 0,\ f_3(3) = -4,\ f_3(5) = -20$$

を得る．まず，$f_3(1) = 0$ から，$f_3(n)$ が因数として $n-1$ をもつことが分かる（因数定理）．これだけでは，$f_3(n)$ についての情報は十分でない．もう少し，手がかりが必要である．そこで大胆にも我々は，n が正の奇数である場合以外も考察してみることにしたい．

[2]実際にはこの書き換えの正当化には，まえの脚注で述べた一意性を使っている．($\sharp$) の左辺の多項式 $f(y)$ と右辺の多項式 $g(y)$ が，$f(\cos x) = g(\cos x) = \cos(n+2)x$ を（すべての x について）満たすことから，左辺 $f(y)$ と右辺 $g(y)$ が多項式として等しいことが結論されたのである．

例えば，$n=0$ のときであるが，このとき $\sin 0x=0$ であるから，$\sin 0x$ を $\sin x$ の多項式で表したときに現れる多項式はすべての係数が 0 であると考えられる．よって，一般に $f_m(0)$ の値は 0 と考えることができる．よって，一般に $m=3$ に限らず $f_m(n)$ は因数として n をもつことが分かる．

次に n が負の奇数の場合であるが，$\sin nx=-\sin(-n)x$ であって，$-n$ が正の奇数となることにまず注意する．$\sin nx$ を $\sin x$ の多項式で表すには，まず $\sin(-n)x$ を $\sin x$ の多項式で表し，その係数の符号をすべて変えればよい．したがって，一般の m について $f_m(n)=-f_m(-n)$ が成り立つ．よって，とくに，$f_m(n)=0$ と $f_m(-n)=0$ とは同値となる．$m=3$ のときは，$f_3(1)=0$ だったから，$f_3(-1)=0$ がいえ，したがって，$f_3(n)$ は $n+1$ を因数にもつ．

さて，以上の考察から，$f_3(n)$ は $n-1$ の他に n と $n+1$ とを因数にもつことがわかる．そこで，大胆にも $f_3(n)$ は $n(n-1)(n+1)=n(n^2-1)$ の定数倍であると推測してみる．

そこで，$f_3(n)=kn(n^2-1)$ としてみると，$f_3(3)=-4$ より，$24k=-4$ がわかる．よって，$k=-1/6$ であることが分かり，次の推測が立った：

$$f_3(n)=-\frac{n(n^2-1)}{6}$$

これは他の n についても正しい．例えば，$f_3(5)$ を上の式で計算すると，$-5\cdot(5^2-1)/6=-20$ となり，確かに正しい結果になる．

この調子で $f_5(n)$ がどうなるかを推測してみると，$f_5(n)$ は n，$n+1$，$n-1$，$n+3$，$n-3$ を因数にもつことが分かり，$f_5(n)=kn(n^2-1)(n^2-3^2)$ と考えられ，$f_5(5)=16$ から $k\cdot5\cdot24\cdot16=16$ となり，$k=1/120$ が分かる．これは他の n についても正しく，

$$f_5(n)=\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{120}$$

がわかる．

更に $f_7(n)$ はどうなるかといえば，

$$f_7(n)=-\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{5040}$$

である．こうしてみると，分母に現れる 6 とか 120 とか 5040 が気になってくるが，組み合わせで階乗の計算を経験した人ならば，

$$6=3!,120=5!,5040=7!$$

であることに気づくだろう．また，最初の符号は $+$ と $-$ とが交互に現れているようである．こうして，$f_m(n)$ の一般形が次のようになることが想像できる．

$$f_m(n)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\cdots(n^2-(m-2)^2)}{m!}$$

こうして，n が奇数のとき，$\sin nx$ を $y=\sin x$ の多項式として表したものが以下の様になることが分かった．

$$\begin{aligned}\sin nx&=f_1(n)y+f_3(n)y^3+f_5(n)y^5+f_7(n)y^7+\cdots\\&=ny-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}y^3+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}y^5\\&\quad-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{7!}y^7+\cdots\end{aligned}$$

さて，これは一見無限に続く多項式であるように見えるが，実際には n が奇数なので，ある項から先の係数がすべて 0 となり，有限のところで終わりになっている．では，n が偶数のときはどうなるか？　一見これは無意味なことのようである．n が偶数のとき，$\sin nx$ は $\sin x$ の多項式で書けないのだから，$\sin nx$ を $\sin x$ の多項式で表した係数である $f_1(n)$，$f_3(n)$，$f_5(n)$，$\cdots$ に意味があるはずがない．

しかし，あえてそういうことを考えず，機械的に n を偶数とおくと，上の $(\flat)$ は本当に無限に続く多項式,「無限級数」となる．無限級数は，有限の多項式で書けない $\sin x$ や $\cos x$，e^x などの関数を，無限に続く多項式で表してしまう方法として知られている．この無限級数は，どんな関数を表しているのだろうか.

簡単のため，$n = 2$ の場合を考えよう．

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

であるが，この $\cos x$ は x の絶対値が十分小さいときは正の値をとる．そこで，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を考えると，$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ となる．よって $y = \sin x$ とおけば,

$$\sin 2x = 2y\sqrt{1-y^2}$$

となる．よって

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{\sin 2x}{2y}$$

となる訳だが，この右辺を，式 $(\flat)$ の n に 2 を代入する（！）ことで計算してみると，

$$\begin{aligned}\sqrt{1-y^2} = 1 &- \frac{2^2-1^2}{3!}y^2 + \frac{(2^2-1^2)(2^2-3^2)}{5!}y^4 \\ &- \frac{(2^2-1^2)(2^2-3^2)(2^2-5^2)}{7!}y^6 + \cdots\end{aligned}$$

という式が得られる．実は，この式は正しいことが知られている．我々は $\sqrt{1-y^2}$ の無限級数による表示を得たのである．

この $(\star)$ が正しいことの「状況証拠」は他にもある．二項定理によれば，正の整数 n に対して

$$\begin{aligned}(1-y^2)^n = 1 - ny^2 &+ \frac{n(n-1)}{2!}y^4 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^6 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}y^8 + \cdots\end{aligned}$$

となる．一見この式は無限に続いているのであるが，n はいま正の整数と仮定しているので，ある所から先の項はすべて 0 となり，実際には有限で止まっている．ここで，あえてルールを破って，$n = 1/2$ を代入してみよう．すると左辺は $(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$，つまり $\sqrt{1-y^2}$ となる．右辺は無限につづく無限級数となる：

$$\begin{aligned}\sqrt{1-y^2} = 1 - \frac{1}{2}y^2 &+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}y^6 \\ &+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}y^8 - \cdots\end{aligned}$$

である．$(\star)$ の右辺と $(\star\star)$ の右辺とが実は等しいことを示そう．そのためには，各項の係数が等しいことを示せばいいから，正の整数 m に対して

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-(m-1))}{m!}=\frac{(2^2-1^2)(2^2-3^2)\cdots(2^2-(2m-1)^2)}{(2m+1)!}$$

を証明することになる．これを数学的帰納法で示そう．まず，$m=1$ のときは両辺とも $1/2$ になるから，正しい．$k \geqq 1$ として，$m=k$ のときに上の式が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-(k-1))(\frac{1}{2}-k)}{(k+1)!}\\
&=\frac{(2^2-1^2)(2^2-3^2)\cdots(2^2-(2k-1)^2)}{(2k+1)!}\cdot\frac{\frac{1}{2}-k}{k+1}\\
&=\frac{(2^2-1^2)(2^2-3^2)\cdots(2^2-(2k-1)^2)}{(2k+1)!}\cdot\frac{(1-2k)(2k+3)}{(2k+2)(2k+3)}\\
&=\frac{(2^2-1^2)(2^2-3^2)\cdots(2^2-(2k-1)^2)(2-(2k+1))(2+(2k+1))}{(2k+3)!}\\
&=\frac{(2^2-1^2)(2^2-3^2)\cdots(2^2-(2k-1)^2)(2^2-(2k+1)^2)}{(2k+3)!}
\end{aligned}$$

となるから，$m=k+1$ のときも成り立つ．以上により，$(\star)$ の右辺と $(\star\star)$ の右辺とが等しいことが示された．

さて次に，$\cos nx$ を $\sin x$ の多項式で表すことを考える．実は，これを完全に実行することは n が偶数のときは不可能である．例えば，n が 2 のときは，$\cos 2x = 2\sin x\cos x$ となって，$\cos x$ という余計な因子が現れる．しかし，既にやったように，x の絶対値が十分に小さければ，$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ と表されるから，平方根も使ってよいことにすれば $\cos nx$ を $\sin x$ のみで表すことができる．これを踏まえ，$\sin x = y$ とおくことにすると，

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sqrt{1-y^2}\\
\cos 2x &= 1-2y^2\\
\cos 3x &= (1-4y^2)\sqrt{1-y^2}\\
\cos 4x &= 8y^4-8y^2+1\\
\cos 5x &= (16y^4-12y^2+1)\sqrt{1-y^2}\\
\cos 6x &= -32y^6+48y^4-18y^2+1
\end{aligned}$$

となる．n が偶数のとき，$\cos nx$ は y の多項式で表されているが，その係数を n の式で表示すると，次のようになる．もちろん前と同様に，これは因数定理などから推測することができる．

$$\cos nx = 1-\frac{n^2}{2!}y^2+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}y^4-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}y^6+\cdots$$

ここで本来 n は偶数であるが，n を奇数とおいても，無限級数の意味で式が成り立つことも前と同様である．

ここで，三角関数の逆関数である arcsin と arccos とを導入する．まず，arcsin について述べる．関数 $y=\sin x$ は $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$ において狭義単調増加[3]であり，$x=-\pi/2$ のとき $y=-1$，

[3]関数 $f(x)$ が狭義単調増加とは，$x<x'$ のとき必ず $f(x)<f(x')$ が成り立つこと．また，角度は $360/2\pi$ 度を 1 として測る弧度法を用いて表している．以下も同様．

$x=\pi/2$ のとき $y=1$ であるから，逆に $-1 \leqq y \leqq 1$ となる y を任意に与えると，$\sin x = y$ となる x がただ一つに定まる．そこでこの x を $\arcsin y$ と表す．

次に arccos について述べる．関数 $y=\cos x$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ において単調減少であり，$x=0$ のとき $y=1$，$x=\pi$ のとき $y=-1$ となる．したがって，逆に $-1 \leqq y \leqq 1$ なる y を任意に与えると，$\sin x = y$ となる x がただ一つ定まる．そこでこの x を $\arccos y$ と表す．

このとき，$-1 \leqq y \leqq 1$ なる y に対して

$$\arcsin y + \arccos y = \pi/2$$

が成り立つ．実際，$-1 \leqq y \leqq 1$ に対して，$\alpha = \arcsin y$，$\beta = \arccos y$ とおくと，$\sin\alpha = \cos\beta = y$，$-\pi/2 \leqq \alpha \leqq \pi/2$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ である．このとき

$$\sin(\pi/2 - \beta) = \cos\beta = \sin\alpha$$

であり，$-\pi/2 \leqq \alpha, \pi/2-\beta \leqq \pi/2$ であるから，$\sin x$ が $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$ で狭義単調増加であることより $\pi/2-\beta=\alpha$ したがって $\alpha+\beta=\pi/2$ となり，式 (☆) が示された．

$\cos n\theta$ や $\sin n\theta$ を $\cos\theta$ や $\sin\theta$ で表すと，これら arccos や arcsin が現れることを説明しよう．たとえば，$\cos n\theta$ は最初に説明したように $\cos\theta$ の多項式として表すことができる．そこで $\cos n\theta = F_n(\cos\theta)$ と表されたとすると，$-1 \leqq y \leqq 1$ なる y に対して，θ に $\arccos y$ を代入することで，

$$\cos(n \arccos y) = F_n(\cos(\arccos y))$$

となる．よって，arccos の定義より，

$$\cos(n \arccos y) = F_n(y)$$

となり，$F_n(y)$ の表示が得られた．この他の場合にも同じような議論を行うと，次の結論が得られる：$\sin nx = G_n(\sin x)$，$\cos nx = H_n(\sin x)$，$\sin nx = K_n(\cos x)$ と表すと，

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \cos(n \arccos y)\\
G_n(y) &= \sin(n \arcsin y)\\
H_n(y) &= \cos(n \arcsin y)\\
K_n(y) &= \sin(n \arccos y)
\end{aligned}$$

さて，以上のことを用いて，$\cos nx$ を $\cos x$ で表したときに現れる多項式，つまりチェビシェフの多項式 $F_n(x)$ の係数が，実は $\sin nx$ を $\sin x$ で表した式 $G_n(y)$ の係数と $\cos nx$ を $\sin x$ で表した式 $H_n(y)$ の係数とが「交互に入り込んで」出来ていることを示そう．$G_n(y)$ と $H_n(y)$ の係数は式 (♭)，(♮) によって既に分かっているから，これによりチェビシェフの多項式 $F_n(x)$ の係数も分かることになる．

次のような計算をしてみる．$\arcsin y + \arccos y = \pi/2$ を思い出して，

$$
\begin{aligned}
F_n(y) &= \cos(n \arccos y) \\
&= \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{2} - n \arcsin y\right) \\
&= \cos\frac{n\pi}{2}\cos(n \arcsin y) + \sin\frac{n\pi}{2}\sin(m \arcsin y) \\
&= \cos\frac{n\pi}{2}H_n(y) + \sin\frac{n\pi}{2}G_n(y) \\
&= \begin{cases}
H_n(y) & (n = 4k \text{ のとき}) \\
G_n(y) & (n = 4k+1 \text{ のとき}) \\
-H_n(y) & (n = 4k+2 \text{ のとき}) \\
-G_n(y) & (n = 4k+3 \text{ のとき})
\end{cases}
\end{aligned}
$$

こうして，チェビシェフの多項式 $F_n(y)$ は符号を除けば $G_n(y)$ と $H_n(y)$ とが交互に現れることが分かった．$G_n(y)$ と $H_n(y)$ とについては，既に述べたように，($\flat$) と ($\natural$) で既に具体的な形が分かっているから，これで $F_n(y)$ の具体的な形も分かったことになる．

今回述べた $G_n(y), H_n(y)$ の係数についての観察は，整数論の大きな山場である「平方剰余の相互法則」の一つの証明のカギでもある．このことは，整数論という分野が sin，cos といった超越関数によって解明されていく一例であって興味深い．また，チェビシェフの多項式は「直交多項式」の一つとして解析学で重要な役割を果たす．数が数学の重要な対象であることはもちろんだが，多項式も非常に面白い．ぜひこの機会に，多項式に親しんで頂きたいと思う．

5　常用対数

え？

$$2^{13301} = 9.999362817\cdots \times 10^{4003}$$

$$2^{15437} = 1.0000991654\cdots \times 10^{4647}$$

5.1　不思議発見！

できる限り電卓で確かめながら、読み進めてみよう。まず、以下の数学的事実に着目する。

え？

$$2^{13301} = 9.999362817\cdots \times 10^{4003}$$

$$2^{15437} = 1.0000991654\cdots \times 10^{4647}$$

この事実から、$\log_{10} 2$ の近似値として

$$\log_{10} 2 = 0.30102999\cdots$$

が得られる。確かめてみよう。

$$2^{13301} = 9.999362817\cdots \times 10^{4003} = 0.9999362817\cdots \times 10^{4004} < 10^{4004}$$

$$2^{15437} = 1.0000991654\cdots \times 10^{4647} > 10^{4647}$$

これより

$$10^{4647} < 2^{15437}, \quad 2^{13301} < 10^{4004}$$

基準を 2 に合わせると、

$$10^{\frac{4647}{15437}} < 2 < 10^{\frac{4004}{13301}}, \text{i.e.,} 10^{\frac{4647}{15437}} < 10^{\log_{10} 2} < 10^{\frac{4004}{13301}}$$

より

$$0.301029992\cdots < \log_{10} 2 < 0.301029997\cdots$$

よって、$\log_{10} 2$ の近似値

$$\log_{10} 2 = 0.30102999 \cdots$$

が得られる。では、電卓で計算

$$2^{13301} = 9.999362817 \cdots \times 10^{4003}$$

が可能なのであろうか。

5.2　実習

前節の『不思議発見！』の 2 を 3 に替えて確認してみよう。
まず、以下の数学的事実が分かれば、

$$3^{2098} = 1.000903946 \cdots \times 10^{1001} > 10^{1001}$$

$$3^{2251} = 9.998719245 \cdots \times 10^{1073} = 0.9998719245 \cdots \times 10^{1074} < 10^{1074}$$

これより

$$10^{1001} < 3^{2098}, \quad 3^{2251} < 10^{1074}$$

基準を 3 に合わせると、

$$10^{\frac{1001}{2098}} < 3 < 10^{\frac{1074}{2251}}, i.e., 10^{\frac{1001}{2098}} < 10^{\log_{10} 3} < 10^{\frac{1074}{2251}}$$

より

$$0.4771210676 \cdots < \log_{10} 3 < 0.4771212794 \cdots$$

よって、$\log_{10} 3$ の近似値

$$\log_{10} 3 = 0.477121 \cdots$$

が得られる。では、電卓で計算

$$3^{2251} = 9.998719245 \cdots \times 10^{1073}$$

が可能なのであろうか。

『電卓で広がる数理の世界』

10 桁表示の電卓において、できるだけ大きい 2 の冪乗 2^n を計算したい。自然数 n を 1 から順次大きくしていったとき、n はいくつまで計算可能であるだろうか。

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	$2^{11} = 2048$	$2^{12} = 4096$
$2^{13} = 8192$	$2^{14} = 16384$	$2^{15} = 32768$	$2^{16} = 65536$
$2^{17} = 131072$	$2^{18} = 262144$	$2^{19} = 524288$	$2^{20} = 1048576$
$2^{21} = 2097152$	$2^{22} = 4194304$	$2^{23} = 8388608$	$2^{24} = 16777216$
$2^{25} = 33554432$	$2^{26} = 67108864$	$2^{27} = 134217728$	$2^{28} = 268435456$
$2^{29} = 536870912$	$2^{30} = 1073741824$	$2^{31} = 2147483648$	$2^{32} = 4294967296$
$2^{33} = 8589934592$	$2^{34} = 17179869184$		

特別の工夫をしない限り、10 桁表示の電卓において、2^n の計算は 2^{33} が限界である。そこで、桁数を無視して、数字の並び方のみに着目して、並べ変えてみよう。即ち、33 までの自然数 n に対して、2^n を浮動小数点表示

$$2^n = a_0.a_1a_2\cdots a_m \times 10^{\ell}, \quad 1 \leq a_0.a_1a_2\cdots a_m < 10$$

にしたとき、$a_0.a_1a_2\cdots a_m$ が最も 1 に近い場合と、最も 10 に近い場合を探してみよう。上記の表を以下のように並べ替えると、一目瞭然である。表

$2^{10} = 1024$	$2^{20} = 1048576$	$2^{30} = 1073741824$	$2^7 = 128$
$2^{17} = 131072$	$2^{27} = 134217728$	$2^4 = 16$	$2^{14} = 16384$
$2^{24} = 16777216$	$2^1 = 2$	$2^{11} = 2048$	$2^{21} = 2097152$
$2^{31} = 2147483648$	$2^8 = 256$	$2^{18} = 262144$	$2^{28} = 268435456$
$2^5 = 32$	$2^{15} = 32768$	$2^{25} = 33554432$	$2^2 = 4$
$2^{12} = 4096$	$2^{22} = 4194304$	$2^{32} = 4294967296$	$2^9 = 512$
$2^{19} = 524288$	$2^{29} = 536870912$	$2^6 = 64$	$2^{16} = 65536$
$2^{26} = 67108864$	$2^3 = 8$	$2^{13} = 8192$	$2^{23} = 8388608$
$2^{33} = 8589934592$			

より、まず、第一の候補として

$$①\begin{cases} 2^{10} &= 1024 = 1.024 \times 10^3 \\ 2^{33} &= 8589934592 = 8.589934592 \times 10^9 \end{cases}$$

が見つかる。さらに、10 や 1 に近いものを探してみよう。まず、これらを掛け合わせるとより条件に適したものが得られる。2^{10} と 2^{33} を掛け合わせてみよう。

$$2^{10+33} = 8.796093022_{(10)} = 8.796093022208 \times 10^{12}$$

ここで、$8.796093022_{(10)}$ は 10 桁表示の電卓の表示結果を表す。たしかに、2^{33} より 10 に近くなっている。この結果をさらに敷衍すればもっと 10 に近づいたものが得られる。そこで、

$$2^{10\times n+33}$$

を考え、ここにおいて、順次 n を増やしていき、初めて 1 を超えるまで続ける。

$$\begin{aligned}
2^{10\times 2+33} &= 9.007199254_{(10)} = 9.007199254740992\times 10^{15}\\
2^{10\times 3+33} &= 9.223372036_{(10)} = 9.223372036854775808\times 10^{18}\\
2^{10\times 4+33} &= 9.444732964_{(10)} = 9.444732965739290427 3\cdots\times 10^{21}\\
2^{10\times 5+33} &= 9.671406555_{(10)} = 9.6714065569170333976\cdots\times 10^{24}\\
2^{10\times 6+33} &= 9.903520312_{(10)} = 9.9035203142830421991\cdots\times 10^{27}\\
2^{10\times 7+33} &= 1.014120479_{(10)} = 1.0141204801825835211\cdots\times 10^{31}
\end{aligned}$$

従って、10 に近いものと、1 に近い次なる良い第二候補として、上記の最後二つを選んで

$$②\left\{\begin{array}{rcl}
2^{93} &=& 9.903520312_{(10)} = 9.9035203142830421991\cdots\times 10^{27}\\
2^{103} &=& 1.014120479_{(10)} = 1.0141204801825835211\cdots\times 10^{31}
\end{array}\right.$$

が得られる。再び、これら二つを掛け合わせると、1 より大きいので、さらに 2^{93} を掛けてみる。

$$\begin{aligned}
2^{93+103} &= 1.004336276_{(10)} = 1.0043362776618689222\cdots\times 10^{59}\\
2^{93\times 2+103} &= 9.946464709_{(10)} = 9.9464647281957328431\cdots\times 10^{86}
\end{aligned}$$

となるので第三番目の候補として

$$③\left\{\begin{array}{rcl}
2^{196} &=& 1.004336276_{(10)} = 1.0043362776618689222\cdots\times 10^{59}\\
2^{289} &=& 9.946464709_{(10)} = 9.9464647281957328431\cdots\times 10^{86}
\end{array}\right.$$

が得られる。これら二つを掛け合わせると

$$2^{196+289} = 2^{485} = 9.989595325_{(10)} = 9.9895953610111751404\cdots\times 10^{145}$$

結果は 10 より小さいので、さらに 2^{196} を掛け続けることができる。そこで、

$$2^{196\times n+289}$$

の n を順次大きくしていく。

$$2^{196\times 2+289} = 2^{681} = 1.003291296_{(10)} = 1.0032913020226237310\cdots\times 10^{205}$$

より第四候補として

$$④\left\{\begin{array}{rcl}
2^{485} &=& 9.989595325_{(10)} = 9.9895953610111751404\cdots\times 10^{145}\\
2^{681} &=& 1.003291296_{(10)} = 1.0032913020226237310\cdots\times 10^{205}
\end{array}\right.$$

両者を掛け合わせると 10 より大きいのでさらに 2^{485} を掛け続けることができる。

$$2^{485+681} = 2^{1166} = 1.002247404_{(10)} = 1.0022474136428063862\cdots\times 10^{351}$$

そこで

$$2^{485\times n+681}$$

において順次 n を大きくしていくと、

$$\begin{aligned}
2^{485\times 2+681} &= 1.001204598_{(10)} = 1.0012046113911627042\cdots\times 10^{497}\\
2^{485\times 3+681} &= 1.000162877_{(10)} = 1.0001628941376155308\cdots\times 10^{643}\\
2^{485\times 4+681} &= 9.991222400_{(10)} = 9.9912226075326351637\cdots\times 10^{788}
\end{aligned}$$

第五候補として

$$⑤\left\{\begin{array}{lcl}
2^{2136} &=& 1.000162877_{(10)} = 1.0001628941376155308\cdots\times 10^{643}\\
2^{2621} &=& 9.991222607_{(10)} = 9.9912226075326351637\cdots\times 10^{788}
\end{array}\right.$$

以上のような上記の操作をさらに続けると

$$2^{2136+2621} = 9.992849740_{(10)} = 9.9928501191230139881\cdots\times 10^{1431}$$

より

$$2^{2136\times n+2621}$$

において順次 n を大きくしていくと

$$\begin{aligned}
2^{2136\times 2+2621} &= 9.994477345_{(10)} = 9.9944778958254897866\cdots\times 10^{2074}\\
2^{2136\times 3+2621} &= 9.996105215_{(10)} = 9.9961059376832477655\cdots\times 10^{2717}\\
2^{2136\times 4+2621} &= 9.997733350_{(10)} = 9.9977342447394801659\cdots\times 10^{3360}\\
2^{2136\times 5+2621} &= 9.999361750_{(10)} = 9.9993628170373862646\cdots\times 10^{4003}\\
2^{2136\times 6+2621} &= 1.000099041_{(10)} = 1.0000991654620172375\cdots\times 10^{4647}
\end{aligned}$$

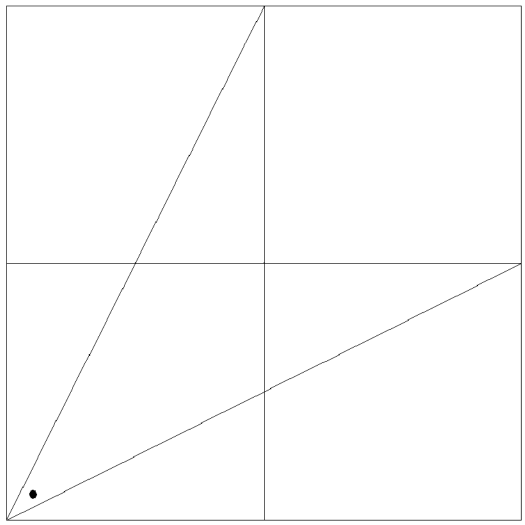
第六候補として

$$⑤\left\{\begin{array}{lcl}
2^{13301} &=& 9.999361750_{(10)} = 9.9993628170373862646\cdots\times 10^{4003}\\
2^{15437} &=& 1.000099041_{(10)} = 1.0000991654620172375\cdots\times 10^{4647}
\end{array}\right.$$

が得られる。これは求めるものであった。

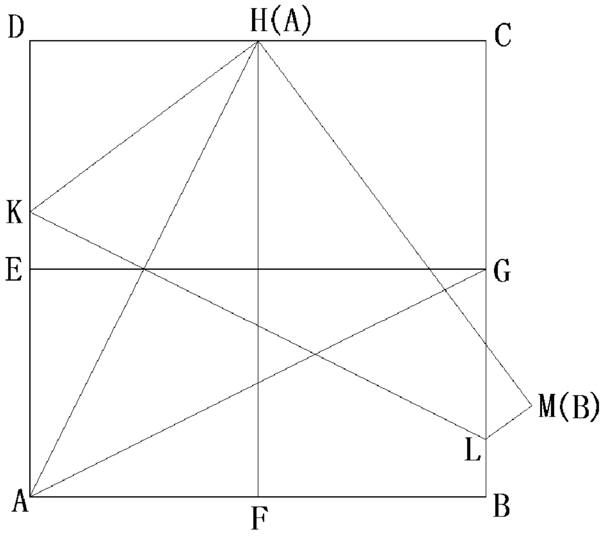
6　ピタゴラス数と複素数

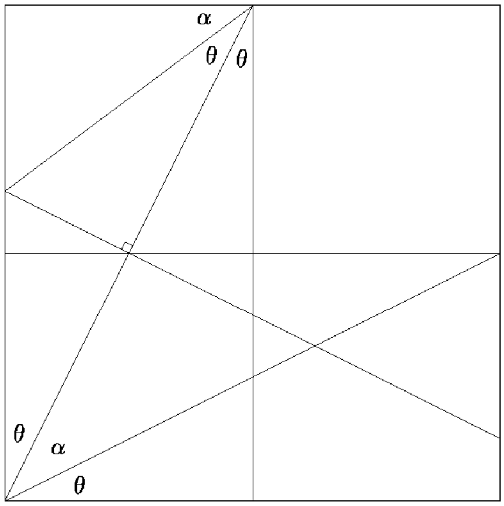
不等式



黒丸のついた角度なり三角比なりの情報を求めよ。

これと芳賀の定理を結びつけることができる。即ち、芳賀の定理の発展として位置づけることができる。





上記の図で、生徒が折り紙を重ねて知る行為を数学として証明することができる。
中学生では面積を使って証明するだろう。

$$4-(1+1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times h$$

より $h=\frac{3}{5}\sqrt{5}$ 。従って、$3:4:5$ となっていることが分かる。勿論、相似を使ってもよい。

高校生は加法定理を使って証明するだろう。

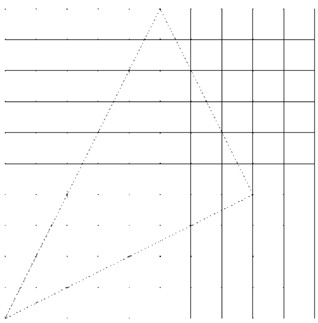
$$\tan\alpha=\tan\{(\alpha+\theta)-\theta\}=\frac{\tan(\alpha+\theta)-\tan\theta}{1+\tan(\alpha+\theta)\tan\theta}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

複素数を知っている高校性なら

$$\frac{1+2i}{2+i}=\frac{4+3i}{5}$$

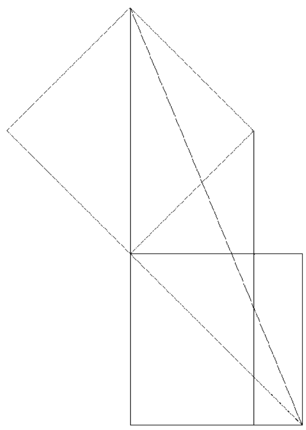
この解釈が格子点でできる。

$$4(2+i)+3i(2+i)=5(1+2i)$$



7　内積の解釈

内積って何？



7.1　生徒からの質問

ここでの考察の中心は、生徒からの質問に端を発した余弦定理の残余項の解釈である。

> 余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$ で、$2bc\cos A$ は図形的にどのような意味がありますか？

次に、ベクトル (a, b)、(c, d) の内積の導入での生徒の「食いつきの悪さ」であった。

> $$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$$
>
> にはどのような意味があるのか。

それにしても「余弦定理の残余項とは何か」という知的興味・関心は評価に値する。

さて、前回、図形的解釈は一様なされたのであるが、いまだそれだという解釈には至らなかった。その一つの要因は下記の式

$$2ab\cos\theta = 2\{(a\cos\theta)b\} = 2\{a(b\cos\theta)\} = (a\cos\theta)b + a(b\cos\theta)$$

のような多義性であった。いったい、$2ab\cos\theta$ は何なのか。

およそ対称性がないく、二つの成分の和という表現もまだ満足いくものではなかった。そんなとき、レオナルド・ダ・ヴィンチによる三平方の定理の証明に出会った。

7.2 レオナルド・ダ・ヴィンチによる証明

レオナルド・ダ・ヴィンチによる証明として流布している三平方の定理の証明に出会い、内積の一つの幾何学的解決がなされたので紹介しよう。

二つのベクトル $\overrightarrow{u} = (a, b)$、$\overrightarrow{v} = (c, d)$ から得られる２数の同等であること：

$$ac + bd = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cos\theta$$

が納得される。これはある段階での内積 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ の本質であった。余弦定理を学ぶことは(それが然るべく指導されるなら)ベクトルの内積の定義を受け入れる素地となる。

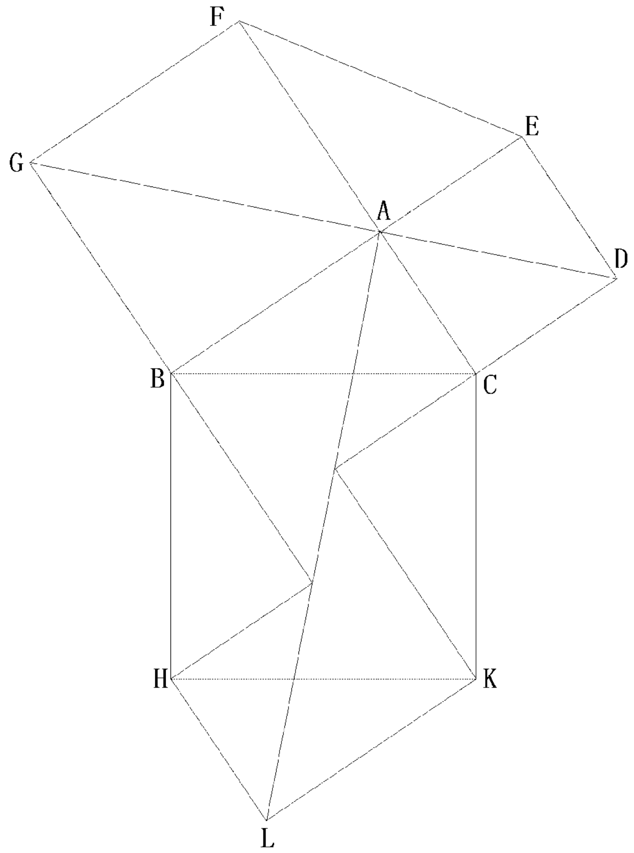
直角三角形 ABC についての三平方の定理のレオナルド・ダ・ヴィンチによるとして知られている証明を見て見よう。

そのまえに、三平方の定理の証明として一般に流布しているものを二つに分けておく。即ち「広さ」についての分解能をよくしようということである。広さには「属性としての広さ」と「数値化された広さ」がある。直角を挟む２辺をそれぞれ各一辺とする正方形の広さの「和」は、斜辺を一辺とする正方形の広さに等しいという広さに関する三平方の定理。次に、直角を挟む２辺の長さをそれぞれ a、b とし、斜辺の長さを c とすると関係式 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つという三平方の定理。

前々回の学習指導要領の改訂のあと、ある数学教育の研究会で上記のこについて言及し、「このあたりをしかと理解しようとすると、属性としての「広さ」と、値としての「広さ」、即ち面積を区別しないとより深い理解にはいたらない」と発表した。

そのき、会場にいらした一松信先生から「それは、学びやすくするために敢えてそう指導するようにしたのだ」という話を聞いたことがあった。私の不勉強であった。しかし、このこのような事実は三平方の定理の指導にあっては、教師はしかと捕まえておくべき事実である。さもないと、生徒の「理解の深まり」を見逃してしまうことになる。

では、レオナルド・ダ・ヴィンチによる三平方の定理の証明を概観してみよう。



まず、$\triangle ABC$ において、$\angle CAB =$ 直角 とする。三角形の外側に、三つの正方形をつくり、辺 KH の外側に $\triangle LKH$ を頂点の順が $\triangle ABC$ と同じになるようにつくる。

最初に

『３点 G、A、D が一直線上にある』

ことを確認しよう。

題意より

$$\angle EAC = 90^\circ$$

また、作図法より

$$\angle GAB = \angle CAD = 45^\circ$$

従って、

$$\angle GAD = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

なので、G、A、D は一直線上にある。

次に、

『$\triangle AFE$ は $\triangle ABC$ と合同である』

ことを確認する。

$$\angle FAE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle BAC, FA = BA, AE = AC$$

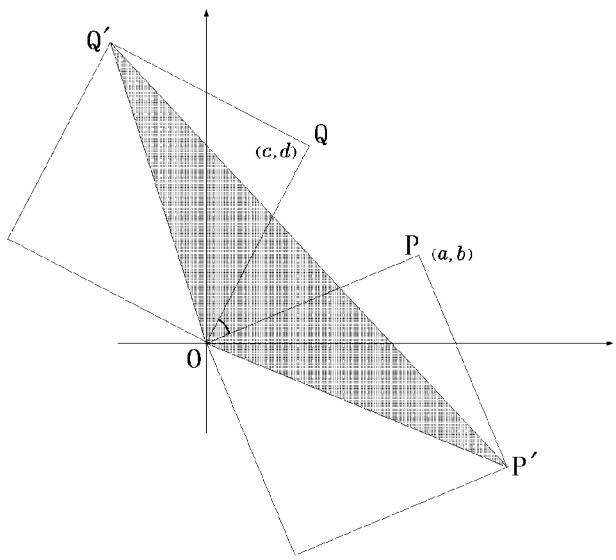
なので $\triangle FAE$ は $\triangle BAC$ と合同である。
三番目に
『六角形 ABHLKC と六角形 BCDEFG は広さが同じである』
ことを確認しよう。
六角形 BCDEFG は直線 GAD について対称であり、そのひろさ (面積) は四角形 GBCD の 2 個分に等しい。B を中心として四角形 GBDC を 90° 回転すると、これは四角形 ABHL と重なる。他方六角形 BHLKCA は正方形の中心に対して点対称であり、その広さは四角形 ABHL の広さの 2 個分に等しい。従って両六角形のひろさは等しい。
最後に
『$\square CBHK$ の広さは $\square ACDE$ と $\square BAFG$ の合併の広さに等しい（三平方の定理)』

$$六角形\, BCDEFG = \square BAFG + \square CAED + \triangle BCA + \triangle FAE$$

$$六角形\, BHLKCA = \square BCKH + \triangle BCA + \triangle KHL$$

この両者は広さが等しく、$\triangle BCA$、$\triangle FAE$、$\triangle KHL$ は互いに合同なので、2 個の三角形を引くと、$\square BCKH = \square BAFG + \square CAED$ を得る。

7.3 内積の「対称」な幾何学的表示

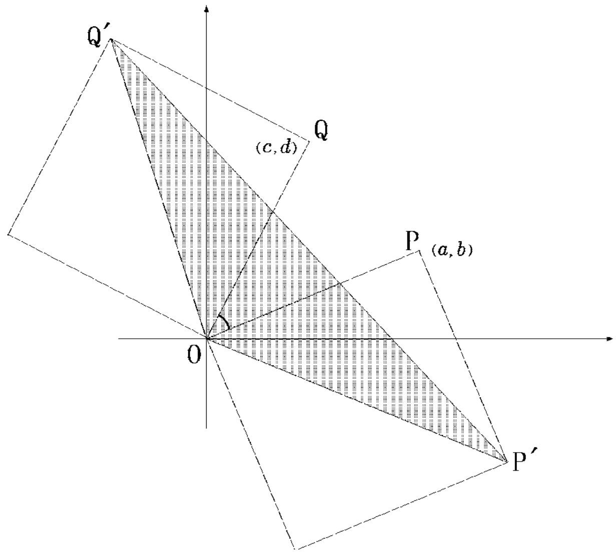


$$\triangle P'Q'O = \frac{1}{2}\{Q'O \cdot OP' \sin(\frac{\pi}{4} + \theta + \frac{\pi}{4})\} = \frac{1}{2}\{\sqrt{2}QO \cdot \sqrt{2}OP \cos\theta\} = QO \cdot OP \cos\theta$$

当然ながら、$\angle\theta > \frac{\pi}{2}$ のときは、面積は負となる。勿論、当該内積の値も負である。このことは、領域の周にそう積分の向きを考慮したガウス・ボンネの定理を理解するとよりその辺りの事情は了解され。この本質の奥は深い。その一端が以下の記述に現れている。

7.4　文字式による解釈

前章の考察を新たに、座標幾何の観点から見直してみよう。新たな事実が浮かび上がってくる。即ち、座標幾何は事象を記述する単なる「言語」ではない。



ベクトル $\overrightarrow{u}$ により原点 O は点 P に、ベクトル $\overrightarrow{v}$ により原点 O は点 Q に移動したとしよう。即ち、O を原点とする位置ベクトルとして $x-y$ 座標平面に具現する。点 P、Q の座標をそれぞ (a, b)、(c, d) とする。即ち、$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$、$P = (a, b)$、$Q = (c, d)$

さて、

$$(c + di)(1 + i) = (c - d) + (c + d)i$$

$$(a + bi)(1 - i) = (a + b) + (-a + b)i$$

より点 P' と点 Q' の座標は

$$P' = (a + b, -a + b), \quad Q' = (c - d, c + d)$$

となる。従って、$\triangle OP'Q'$ (これは正に正の向きである)。

$$\triangle OP'Q' = \frac{1}{2}\{(a + b)(c + d) - (-a + b)(c - d)\} = ac + bd$$

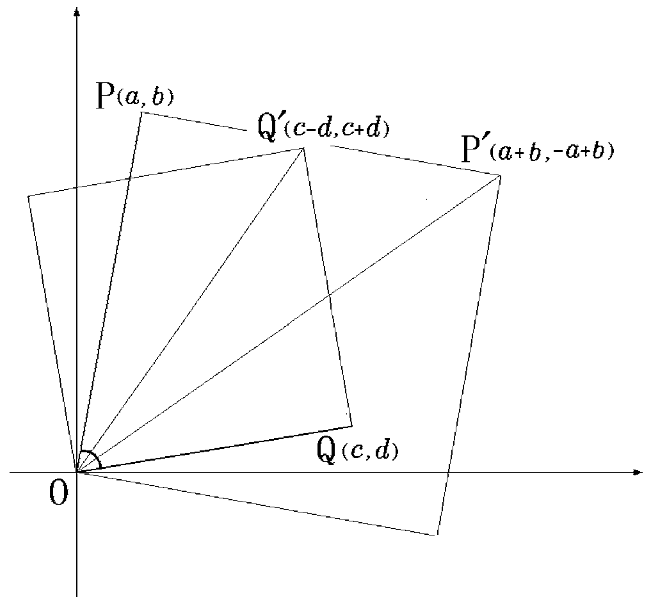
$\angle QOP$ が鈍角のときは、三角形 $\triangle OP'Q'$ の向きが逆になる。内積の値 $ac + bd$ が負ゆえにそれは当然のことである。

これが、ベクトルの内積の一つの解釈になるとまでは表立って書かれてはいないが、以上のことは既に一松信氏の本で既に言及されていることである。

さて、今回の話の本筋はこれからである。

これまでの話はレオナルド・ダ・ヴィンチの三平方の定理の証明が引き金になって、余弦定理の証明ができるというものであった。じっさい、「$\angle C$ が直角でないとき、どのように修正すれば余弦定理を証明することができるか」と問いかけている。

この解釈を「文字式」で行うと、この証明の相棒が現れてくる。ある数学的事象を数式で記述し、解釈したとしよう。そのとき、別の解釈が存在し、その解釈の具現までもが見つかることがある。



$$\arg(a,b) - \arg(c,d) = \theta$$

のとき、

$$\arg(c-d, c+d) = \arg(c,d) + \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(a+b, -a+b) = \arg(a,b) - \frac{\pi}{4}$$

であるから、

$$\arg(c-d, c+d) - \arg(a+b, -a+b) = -\theta + \frac{\pi}{4}$$

なる。従って、

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP'}| \cdot |\overrightarrow{OQ'}| \sin(-\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}|\overrightarrow{OP}| \cdot \sqrt{2}|\overrightarrow{OQ}| \cos\theta) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

7.5　幾何教育の四段階

彌永昌吉氏は彼の著書「数学の学び方」（筑摩学芸文庫、筑摩書房）の中の「V　理論体系を１つの一貫したものとして眺めてみることのおすすめ」という章で以下のように言及している。

幾何学の４段階

数学教育のベテランのＥさんは、Ｄさんもご存じかと思いますが、たしか 1955 年ごろの数学教育の雑誌に、づぎのような意見を述べられておられました。

“ 幾何には４つの段階がある。それは、

１．直感的・経験的段階
２．局所的論証の段階（ターレスの段階）
３．体系的論証の段階（ユークリッドの段階）
４．公理的段階（ヒルベルトの段階）

これは、幾何の歴史の通ってきた段階でもあるが、幾何教育にもこれにあてはめて考えることができる。わが国では、これがちょうど小学校、中学校高等学校、大学の教育にそれぞれあたっている”

これは「数理科学、創刊号」(1963年7月)から10回にわたっ連載をまとるたものである。

私がかつて、数学的活動の階層的構造と題して、

１．経験的段階
２．局所的段階
３．大域的段階
４．公理的段階

を述べ、「経験的段階」を体験として、これが「局所的段階」という経験になり、ここでの「局所的段階」としての体験が「大域的段階」の経験に変容し、この「大域的段階」の体験が経験と変容して「公理的段階」になることを述べた。その１つの具体例がまさに上記の幾何学の発展であった。この４段階は「関数」について、「解析」についても、はたまた「数」についても当てはまる。更には、「文字式の利用から座標幾何学」にも当てはまる。

7.6　文字式と座標幾何の四段階

(1) 現実を幾何学的に捉える
(2) 局所的に、文字式と座標幾何を使い始める
(3) 大域的に、文字式と座標幾何を使い始める
(4) 座標空間がむしろ実体になり、現実は一つのモデルにすぎない。

まず、

レオナルド・ダ・ヴィンチによる三平方の定理の証明が余弦定理の証明に自然に発展し、

ベクトルの内積の幾何学的解釈が与えられる。次には、この過程を座標幾何(解析幾何とよばれるこも多々あり)で見直すと、新たな幾何学的解釈が見出される。これがまさに(2)段階ら(3)段階に移行するときにみられる様々な知的発展なのである。最終的には、そこから図形が消え、数学の命題は「単なる文字列」に変容する。私が大学で基礎論を学び始めたころ、仲間が盛んに「文字列」、「単なる文字列」と口走っていたことを思い出した。

以上を端的に云えば、「図形的な解釈に文字式を用いることによる確認」があらたな数学的事象に気づかせてくれたというスパイラル学習の典型といえよう。

8 無理数乗

二重数列

二重数列

$$\left(1+\frac{na(b^{\frac{1}{n}}-1)}{m}\right)^m$$

の収束を考えてみよう。

指数関数の逆関数としての対数関数とは何を求めていることなのかを理解しよう。それこそ「わかる」を目指しての探究である。

$$a_{m,n} := \left(1+\frac{na(b^{\frac{1}{n}}-1)}{m}\right)^m$$

$$\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \left(1+\frac{na(b^{\frac{1}{n}}-1)}{m}\right)^m = e^{na(b^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \left(1+\frac{na(b^{\frac{1}{n}}-1)}{m}\right)^m = \left(1+a\frac{\log b}{m}\right)^m$$

$$\lim_{m\to\infty} a_{m,m} = \left(1+\frac{ma(b^{\frac{1}{m}}-1)}{m}\right)^m = \left(1+a(b^{\frac{1}{m}}-1)\right)^m = b^a$$

ここで、 $a=1$ とすると、指数関数 $y=e^x$ の逆関数がまさに $y=\log x$ であることが納得される。「わかる」のである。ちなみに、最後の式は

$$\lim_{x\to 0}\{1+a(b^x-1)\}^{\frac{1}{x}} = b^a$$

とい式でよくお目にかかる。この式では、$x=2^{-18}$ とすると、

$$2^3 = 7.99988502221_{[12]}$$

となる。これが、3 に近い場合の精度のおよその目安となる。このあたりの「いい加減さ」を確かめるのが、まさに数学である。

9　対数関数

9.1　等間隔だけが区分求積分法ではない

等間隔な分割によらない区分求積

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}\right)\times\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=0}^{n-1}(a^{\frac{1}{n}} - 1) = n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}\right)\times\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} = \sum_{k=0}^{n-1}(1 - a^{\frac{-1}{n}}) = n(1 - a^{\frac{-1}{n}}) = \frac{1 - a^{\frac{-1}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

上記の「式を読む」活動をすると

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \{\ \text{関数 } y = a^x \text{ の } x = 0 \text{ での接線の傾き}\ \}$$

となる。しかも、右方極限と左方極限に対応しているから驚きである。
　更に、驚きは続く。関数

$$y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$$

の逆関数を求めると

$$x = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

となっている。

10　関数マンダラ

初等超越関数の仲間

以下のような九つの桝目からなる表がある．六つの桝目にある文字は読めたのであるが，四つの桝目の字は読めない．各行はきっと同じようなことを言っているに違いない．各列の関係はいかなるものであろうか．第１列と第２列，第２列と第３列，第１列と第３列の関係はなんであろうか．

$x^2+y^2=1$		三角関数
	対数関数	指数関数
$x^2-y^2=1$		

10.1　関数マンダラ

使える，即ち運用するにあたって違和感は無いのだが，よく考えてみると当り前であって当り前でない知識がある．$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ などもそのひとつだ．また，π，$\sqrt{2}$，$2^{\sqrt{2}}$，2^{π} などはいった何であり，何であるべきなのか．数列

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

は $2.71828\cdots$ に近づく，という表現を用いるが，これなども注意を要する表現である．

小学生から用いているのに，角という図形，角の値としての角度，角度の絶対値としての角の大きさ等,「角」という言葉はかなり乱用されている．角度というものの定義が定らないと，三角関数の定義もあやふやなものとなってしまう．正三角形の一つの角の値は $\pi/3$ と答えられるが，ピタゴラスの三角形として有名な三辺の長さがそれぞれ３，４，５である三角形の３の長さの辺と５の長さの辺で挟まれた角の 値[1)] はいくつかというと，首を傾げたくなる．$\tan^{-1}\frac{4}{3}$ という答を用意すると，今度は関数 $\tan^{-1}x$ の定義が気になる．どうも，トートロジカルな議論に終始しそうである．

対数関数は指数関数の逆関数として定義される場合が多いが，対数関数は有理関数による積分表示

$$\log x=\int_1^x\frac{1}{t}dt$$

を持っている．このことは高校の数学の教科書ならどの本にも書いてある．

また，三角関数はその定義から単位円と密接なつながりを持っている．そこで，高校の数学の教科書に散在している次なる項目

数学Ⅰ　第２章　三角比
数学Ⅱ　第２章　三角関数
　　　　第３章　指数関数・対数関数
数学Ⅲ　第２章　微分法とその応用　　§２　種々の関数の導関数
数学C　第２章　いろいろな曲線　　§２　２次曲線

を，次のような表にまとめてみた．

$x^2+y^2=1$		三角関数
	対数関数	指数関数
$x^2-y^2=1$		

何か見えてこないであろうか．二次曲線，関数を大海に散在する小島にたとえるなら海水を汲みだしたときに見える地形はなんなのか．

微分積分学の基本的な事柄は理解しているが，具体的な関数は一つも知らないと仮定しよう．このとき，初等超越関数呼ばれる，３角関数，指数関数，対数関数は如何に定義されるべきか．これが，この論説の出発点となる問題意識である．

ある種の量を表現すべく，幾何学的な事実から積分で定義された関数は，幾何学的な背景を色濃く反映している．ここでは「級数」という手段ではなく,「積分」という手段で初等超越関数を捉え直す．既存の方法に背を向け，無理関数のみを既知として，関数を積分という手法で定義する．自分の持っている知識を他の視点から見ることは，その知識の表す数学的現象のより深い本質に迫る行為であると考えられる．

視点は楕円積分である．

２次曲線と初等超越関数には如何なる関係があるのか，これが我々の調べる目標である．以下の表の？を埋めていただきたい．

$x^2+y^2=1$	？	三角関数
？	対数関数	指数関数
$x^2-y^2=1$	？	？

ヒントは次の用語と公式群である：

逆関数

$$y=e^x \iff x=\log y$$

陰関数を解く

$$x^2+y^2=1 \iff \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

回転

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1 \iff XY=1$$

実際，教科書，問題集，大学の入試問題等に，上記の表の？の部分を問うているものがある．例を見てみよう．

秋田大学

次の問に答えよ．

(1) $x+\sqrt{x^2-1}=t$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}dx$ を求めよ．

(2) 曲線 $x^2-y^2=1$ 上に点 $P(p,q)$ $(p>1,q>0)$ と点 $A(1,0)$ がある．２直線ＯＡ，ＯＰとこの曲線とで囲まれる図形の面積 S を p の式で表せ．

(3) (2) における S を $\frac{\theta}{2}$ とおくとき，p，q を θ の式で表せ．

中央大学（理工）

時刻 $t=0$ に点 $(0,1)$ を出発した点 P が曲線 $C: y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の上を動く．時刻 t における P の座標を $(f(t),g(t))$ と表すとき，次の (i)，(ii) が成立している．

(i) $f(t)$ は $t=0$ で連続である．　(ii) $t>0$ に対して，$\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2=1, f'(t)>0$.

このとき，

(1) $f(t)$ を求めよ．　(2) 曲線 C と x 軸，y 軸，$x=f(1)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

防衛医科大学校

$y=\sin x$ $(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2})$ の逆関数を $y=f(x)$ $(-1\leq x\leq 1)$ とする．

(1) xy 平面に上に $y=f(x)$ のグラフの概形をえがけ．

(2) $f'(x)$ を x を用いて表せ．ここで $-1<x<1$ とする．

(3) $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，$f'''(0)$ の値を求めよ．

10.2　初等超越関数

代数関数、指数関数、対数関数、３角関数、逆３角関数、およびこれらの関数の有限回の合成で得られる、実数または複素変数の関数を **初等関数** という。微分積分学で最も普通な関数である。

３角関数 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ は当然，単位円の方程式 $x^2+y^2=1$ を満たす．この意味において，３角関数は円関数とも呼ばれている．また，それらの逆関数は微分すればそれぞれ

$$\frac{d\theta}{dx}=(\cos^{-1}x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad\frac{d\theta}{dy}=(\sin^{-1}y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

などとなる。双曲線関数

$$x=\cosh\theta=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}\qquad y=\sinh\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$$

も当然，双曲線の方程式 $x^2-y^2=1$ を満たす．これらの逆関数は

$$\theta=\log(x+\sqrt{x^2-1})=\cosh^{-1}x$$

$$\theta=\log(y+\sqrt{y^2+1})=\sinh^{-1}y$$

となり、微分すればそれぞれ

$$(\log(x+\sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\log(y+\sqrt{y^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

となる。

指数関数 $x = e^\theta$ の逆関数 $\theta = \log x$ は微分すると

$$\frac{d\theta}{dx} = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

である。この場合，３角関数の単位円にあたる式がない．無理に探さなくとも容易に見つかる．実は，$xy = 1$ がそれにあたる．表の３行目を $\pi/4$ だけ回転して，$\sqrt{2}$ 倍したものが第２行目であることを考えれば，それは当然のことである．指数関数

$$x = e^\theta \qquad y = e^{-\theta}$$

の逆関数は

$$\theta = \log x \qquad \theta = -\log y$$

となり、微分するとそれぞれ

$$\frac{d\theta}{dx} = (\log x)' = \frac{1}{x} \qquad \frac{d\theta}{dy} = (-\log y)' = \frac{-1}{y}$$

となる。

10.3　積分表示

３角関数の逆関数は（代数関数による）積分表示をもっている．

$$\theta = \cos^{-1} x = \int_1^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \theta = \sin^{-1} y = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

また、双曲線関数の逆関数も積分表示を持っている．

$$\theta = \cosh^{-1} x = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\theta = \sinh^{-1} y = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \log(y+\sqrt{y^2+1})$$

さらに指数関数 $y = e^\theta$ の逆関数 $\theta = \log y$ も積分表示を持つ．

$$\theta = \log y = \int_1^y \frac{dt}{t}$$

では，積分表示に表れた被積分関数と２次曲線との間に何らかの canonical な関係があるのだろうか．また，積分の幾何学的な意味はなんだろう．次節で考察する．

10.4　角度・逆三角関数・三角関数

１点 O から発する２つの半直線 OA，OB からなる図形を**角** (angle)AOB といい，∠AOB で表す．O をその**頂点** (vertex)，OA，OB をその**辺** (side) という．角にその角の開き具合というある値を対応させる．この値を角度という．

問　三辺の長さがそれぞれ 5、13、12 である三角形の 12 の長さの辺と 13 の長さの辺で挟まれた角の値を θ° とするとき。

$$22 < \theta < 23$$

を示せ。

角度の絶対値を角の大きさと呼ぶ．しからば，原点を頂点とする角の大きさとは，その角が切りとる単位円の円弧の長さということになる．そこで，単位円の弧長を θ (もちろん，右回りに計るときは負の値をとる) とすると，

$$\theta = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

となる．なんとなれば

$$x = \sqrt{1-y^2}$$

より

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$

となり，弧長 ℓ

$$\ell = \int_0^y \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

は角度となる．

ＮＢ　弧の長さは扇形の面積の２倍である．この解釈は $xy=1$，$x^2-y^2=1$ にも適用できる．これが三角関数と双曲線関数の類似の一因である．

ここにいたってはじめて，局所的ではあるが角度の表現を手に入れたことになる．この角度 θ を変数の y で微分すると，

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

となる．微分が正であるから，単調増加，よって逆関数が存在する．それを

$$y = \sin\theta$$

とおく．これがまさに三角関数の正弦関数である．逆関数の微分の公式より

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1-y^2}$$

したがって，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{y=0}=1$$

をうる．さて，

$$x=\sqrt{1-y^2}$$

であるから，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

と定める．これより

$$(\sin\theta)'=\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$$

となる．また，

$$(\cos\theta)'=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}=-\sin\theta$$

となり，$\sin\theta$ は無限回微分可能である．

10.5 対数関数・指数関数

対数関数の逆関数として指数関数が定義される．

$$xy=1$$

より

$$xdy+ydx=0$$

であるから

$$\omega=\begin{cases}\dfrac{dx}{x} & (x\neq 0)\\[2ex] -\dfrac{dy}{y} & (y\neq 0)\end{cases}$$

とおくと

$$\omega=\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\omega=\frac{1}{2}(xdy-ydx)$$

三点 $(0,0),(x,y),(1,1)$ が囲む面積を θ とすると

$$\theta=\log x=\int_1^x\frac{dx}{x}$$

$$\log(uv)=\int_1^{uv}\frac{dx}{x}=\int_1^u\frac{dx}{x}+\int_u^{uv}\frac{dx}{x}$$

$$\log(uv)=\log u+\log v$$

$$x=\exp\theta,\quad y=-\exp\theta$$

10.6　逆双曲線関数・双曲線関数

逆双曲線関数の逆関数として双曲線関数が定義される．

$$x^2 - y^2 = 1$$

より

$$2xdx - 2ydy = 0$$

であるから

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{dy}{x} & (x \neq 0) \\ \\ \dfrac{dx}{y} & (y \neq 0) \end{cases}$$

と定めると

$$\omega = \frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}$$

従って

$$\theta = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \omega = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dy}{x} = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y} = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{d(x+y)}{x+y} = \log(x+y)$$

θ の意味は

$$\theta = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dy}{x} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \log(\sqrt{y^2+1}+y)$$

$$\theta = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y} = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$

従って

$$y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \qquad x = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

さらに

$$\omega = \frac{dy}{x} = \frac{dx}{y} = \frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = xdy - ydx = 2\frac{xdy - ydx}{2}$$

でもある．この事実は以下のような意味となる．

「双曲線 $x^2 - y^2 - 1$ 上の 1 点 P をとり，原点 $O(0,0)$ と双曲線の頂点 $A(1,0)$ とを結ぶ線分，線分 OP，および双曲線の弧 AP で囲まれた面積が $\theta/2$ であるとき，P の座標を θ の関数と考えて $\cosh\theta$,　$\sinh\theta$ とすれば

$$y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad x = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

となる.」
　さて

$$\omega = xdy - ydx$$

より

$$2ydx = xdy + ydx - \omega$$

これを積分して

$$2\int_1^x \sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{1-x^2})$$

$$2xdy = xdy - ydx + \omega$$

これを積分して

$$2\int_0^y \sqrt{y^2+1}dy = \sqrt{y^2+1}y + \log(\sqrt{y^2+1} + y)$$

10.7　方程式を解く

　多項式 $P(x, y)$ に対し,

$$P(\varphi(\theta), \psi(\theta)) = 0$$

となる（大域的に定義された）関数

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta)$$

を探すことを考える.
　問　（上の意味で）次の方程式を解け.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^3 + y^3 - xy = 0$$

$$y^2 - y^4 = 1$$

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

10.8　複素化

最初に掲げた表の第１列，第２列，第３列でそれぞれ複素化を行うことができる．例えば第２列で複素化するとどうなるか？

$$u + iv = \log z = \int_1^z \frac{dt}{t} = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\theta(x,y)$$

この逆として

$$x + iy = e^u(\cos v + i\sin v)$$

を得る．この事実から，いろいろおもしろい数学へ発展する．しかし，ここで時間がなくなってしまった．

「複素化」はまたの機会に詳しく述べることにしよう．乞うご期待！

10.9　レムニスケート関数

正弦関数

$$y = \sin\theta$$

は、閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ において、逆関数をもつ：

$$\theta = \sin^{-1} y$$

これを微分すると

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

であるから、逆３角関数 $\sin^{-1} y$ は

$$\theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

という積分表示を持っている。これは点 $(1,0)$ から点 (x,y) に至る円弧の長さである。Gauss は lemniscate 曲線（形の概略は ∞ ）の弧長に関する研究の中で積分

$$\theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

に遭遇した。

円の弧長に関する考察が、円の弧長を求める積分の「逆関数」、つまり３角関数の考察に置き換えられた。同じように、レムニスケートの弧長に関する考察が、それを求める積分の「逆関数」（ガウスは私的に、これをレムニスケート関数と呼んでいる）の考察に置き換えられるだろう、というのが「アイディア」の本質であった。

Gauss は直ちにこの点に気づいて、逆関数を考え、これを

$$y = \sin\mathrm{lemn}(\theta)$$

と定義した。ここでは簡単に

$$y = \mathrm{s}(\theta)$$

と略記する。また、

$$\omega := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad (= 1.31102878\cdots) \tag{1}$$

とおき、次に

$$\mathrm{c}(\theta) = \cos\mathrm{lemn}(\theta)$$

を

$$\mathrm{c}(\theta) := \mathrm{s}(\omega - \theta)$$

によって定義する。そして、加法定理として

$$\mathrm{s}(u+v) = \frac{\mathrm{s}(u)\mathrm{c}(v) + \mathrm{s}(v)\mathrm{c}(u)}{1 - \mathrm{s}(u)\mathrm{s}(v)\mathrm{c}(u)\mathrm{c}(v)} \qquad \mathrm{c}(u+v) = \frac{\mathrm{c}(u)\mathrm{c}(v) - \mathrm{s}(u)\mathrm{s}(v)}{1 + \mathrm{s}(u)\mathrm{s}(v)\mathrm{c}(u)\mathrm{c}(v)}$$

を得た。さて、$\mathrm{s}(\theta)$、$\mathrm{c}(\theta)$ を複素化するにあたって、まず、3 角関数の複素化をみてみよう。複素化されても加法定理は成り立つはず（希望的観測）だから

$$\sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy)$$

に違いない。そこで、まず

$$u = \sin(iy)$$

の解釈をしよう。“ 積分 ” 神にお伺いをたてる。積分表示から、

$$iy = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$t = is$ とおくと $t : 0 \to u$ のとき $s : 0 \to -iu$ と変るので

$$iy = \int_0^{-iu} \frac{d(is)}{\sqrt{1-(is)^2}}, \quad i.e., \quad y = \int_0^{-iu} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}$$

ところで

$$y = \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}$$

のとき

$$u = \sinh y$$

であったから

$$-iu = \sinh y, \quad i.e., \quad u = i\sinh y$$

に違いない。cos に関しても同様で

$$\cos(iy) = \cosh y$$

であろう。そこで、改めて

$$\sin(x+iy) := \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

と定義すると、 sin 関数の複素化（正則関数）が得られる。
　レムニスケート関数の複素化は以上の考察を真似ればよい。

$$\theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad i.e., \quad y = \mathrm{s}(\theta)$$

に対して

$$t = \sqrt{\frac{1-s^2}{1+s^2}}, \quad i.e., \quad s = \sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

と置くと

$$s : 1 \to \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}, \quad t : 0 \to y$$

となる。従って、

$$dt = \frac{-2s}{(1+s^2)\sqrt{1-s^4}} ds, \quad \& \quad \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1+s^2}{2s}$$

よって

$$\theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_1^{\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}} \frac{-ds}{\sqrt{1-s^4}} = \int_{\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$$

ゆえに

$$\theta = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} - \int_0^{\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$$

すなわち (1) より

$$\omega - \theta = \int_0^{\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$$

以上より

$$\mathrm{c}(\theta) = \mathrm{s}(\omega - \theta) = \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}} = \sqrt{\frac{1-\mathrm{s}^2(\theta)}{1+\mathrm{s}^2(\theta)}}$$

さて

$$u=\mathrm{s}(i\theta)$$

を解釈しよう。定義に戻れば

$$i\theta=\int_0^u\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

ということである。そこで、$t=is$ とおくと $t:0\to u$ のとき $s:0\to -iu$ と変わるので

$$i\theta=\int_0^{-iu}\frac{d(is)}{\sqrt{1-(is)^4}},\quad i.e.,\quad \theta=\int_0^{-iu}\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$$

従って

$$-iu=\mathrm{s}(\theta),\quad i.e.,\quad \mathrm{s}(i\theta)=u=i\mathrm{s}(\theta)$$

また

$$\mathrm{c}(iu)=\sqrt{\frac{1-\mathrm{s}^2(iu)}{1+\mathrm{s}^2(iu)}}=\sqrt{\frac{1+\mathrm{s}^2(u)}{1-\mathrm{s}^2(u)}}=\frac{1}{\mathrm{c}(u)}$$

でもある。

加法定理を用いて、一般に

$$\mathrm{s}(t+iv):=\frac{\mathrm{s}(t)+i\mathrm{c}(t)\mathrm{s}(v)\mathrm{c}(v)}{\mathrm{c}(v)-i\mathrm{c}(t)\mathrm{s}(t)\mathrm{s}(v)}\qquad \mathrm{c}(t+iv):=\frac{\mathrm{c}(t)+i\mathrm{s}(t)\mathrm{s}(v)\mathrm{c}(v)}{\mathrm{c}(v)+i\mathrm{s}(v)\mathrm{s}(t)\mathrm{c}(t)}$$

と定義すると、二重周期をもった有理形関数にたどり着く：

$$\mathrm{s}(u+4m\omega+4n\omega i)=\mathrm{s}(u)\qquad \mathrm{c}(u+4m\omega+4n\omega i)=\mathrm{c}(u)\qquad (m,n=0,\pm1,\cdots)$$

これは、数学の歴史上初めて知られた２重周期関数であった。

一般には、楕円の弧長の計算に端を発した積分なので楕円積分といい、その逆関数を「楕円」関数という。

10.10　展望

本文は「楕円関数論から見た初等超越関数論」（数学通信第１巻３号）をもとに問を加え，書き直したものである．

いずれにしてもこのような考えに至ったのは筆者が学生の時に読んだ『解析概論』の以下の文章に接し，これを私なりに理解したいと，考えたからである．このつたない論説を最後まで読んでいただい方にはお口直しとして読んでいただきたい．

> 変数を実数に限っても arcsin，arccos，arctan の多意性が log の多意性の下に統一される．実変数に関する三角函数，双曲線函数は複素変数に関する指数函数の一断面にほかならないから，それらの逆函数がすべて対数函数に包括されるのである．この認識は大切である．上記の関係は形式上はすでに十八世紀（Euler）において知られていたのであるが，その根本的の意味は十九世紀以後，複素変数が徹底的に考察された後に初めて明かになって，そこから驚嘆すべき単純化が可能になったのである．初等函数といえども，複素変数にまで次元の拡張をしなくては完全に統制されないのである．その間の消息は第６章で述べるであろう．

参考文献

岩波数学辞典第３版　日本数学会編集　岩波書店
高木貞治「解析概論」岩波書店
渡辺公夫「楕円関数論から見た初等超越関数論」数学通信第１巻３号、日本数学会
Ｓ．Ｇ．ギンディキン著　三浦伸夫訳「ガウスが切り開いた道」シュプリンガー・フェアラーク東京
ハッル著　山下純一訳編「数学のアイディア」東京図書

$x^2+y^2=1$	逆三角関数	三角関数	$(y')^2+y^2=1$
$xy=1$	対数関数	指数関数	$(y')^2-y^2=0$
$x^2-y^2=1$	逆双曲線関数	双曲線関数	$(y')^2-y^2=1$

二次曲線	対数関数	指数関数
楕円曲線	楕円積分	楕円関数
一般曲線	アーベル積分	アーベル関数

1) $$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3\cdot 7^3}<\tan^{-1}\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{7}$$

$x^2+y^2=1$	逆３角関数	３角関数
	$\theta=\int_1^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$	
	$\theta=\cos^{-1}x$	$x=\cos\theta$
	$\theta=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	
	$\theta=\sin^{-1}y$	$y=\sin\theta$
$xy=1$	対数関数	指数関数
	$\theta=\int_1^x \frac{dt}{t}$	$x=\exp(\theta)$
	$\theta=\log x$	$x=e^\theta$
	$\theta=\int_1^y \frac{-dt}{t}$	$y=\exp(-\theta)$
	$\theta=-\log y$	$y=e^{-\theta}$
$x^2-y^2=1$	逆双曲線関数	双曲線関数
	$\theta=\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$	
	$\theta=\cosh^{-1}x$	$x=\cosh\theta$
	$\theta=\log(x+\sqrt{x^2-1})$	$x=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$
	$\theta=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$	
	$\theta=\sinh^{-1}y$	$y=\sinh\theta$
	$\theta=\log(y+\sqrt{y^2+1})$	$y=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$
$x^2+x^2y^2+y^2=1$	レムニスケート積分	レムニスケート関数
	$\theta=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$	$y=$sin lemn (θ)
	$\theta=\int_1^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^4}}$	$x=$cos lemn (θ)

第２節　わかる授業の実践的研究
２－１　教員研修

授業改善と校内研修の充実
～わかる数学の授業を構築するために～

廣瀬　保善　奈良県教育委員会学校教育課
椿本　剛也　奈良県教育委員会学校教育課

１．はじめに

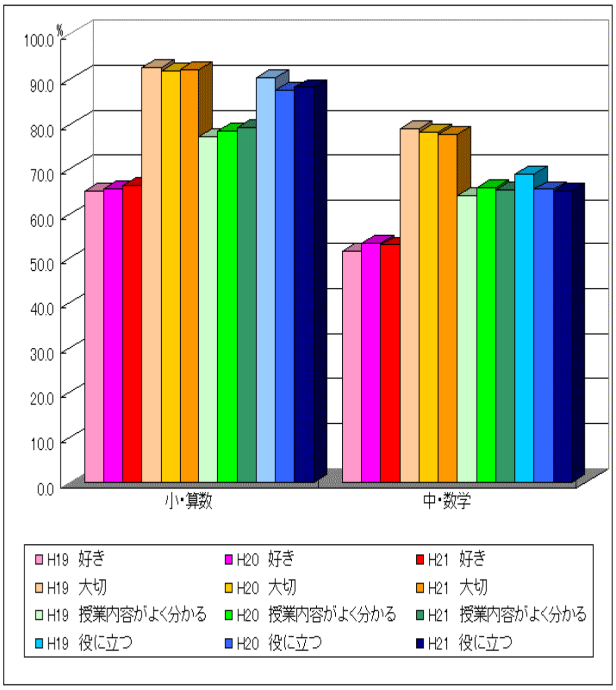
最近の調査（教育課程実施状況調査，全国学力・学習状況調査や国際的な学力調査等）の結果から，身に付けた知識や技能を生活や学習に活用することが十分でないといった状況が見られるという分析がされている。

そのような中，新学習指導要領において，算数・数学の授業の中で，基礎的・基本的な知識及び技能を確実に身に付けること，身に付けた知識及び技能を活用していくことが一層重視されている。

算数・数学で学習したことは，家庭や学校での生活，地域社会での生活，将来の社会生活や他教科等の学習，既習の内容を活用して新しい知識や方法を生み出すといったこれから先の算数・数学の学習などに活用することができる。そして，算数・数学で学習したことが，生活や学習の様々な場面で活用されることによって，学習が意味あるものとなり，算数・数学のよさを実感を伴って味わうことができるようになる。

そのためにも，内容の連続性・系統性を重視して指導がされるべきであり，そのことが，わかる授業の構築につながると考える。

また，算数・数学が好きであるという児童生徒の割合が低いという状況があり，児童生徒に算数・数学は楽しい，面白い，素晴らしいと感じさせることが必要である。



算数・数学に対する意識（全国・学力学習状況調査より）

２．児童生徒の意識

右のグラフは，全国学力・学習状況調査の児童・生徒質問紙調査で，

- 算数・数学の勉強は好きですか
- 算数・数学の勉強は大切だと思いますか
- 算数・数学の授業の内容はよく分かりますか
- 算数・数学の授業で学習したことは，将来，社会に出たときに役に立つとおもいますか

の４つの質問に対して，「当てはまる」「ど

ちらかといえば，当てはまる」と肯定的に回答した全国の結果である。
この結果から，
・小学生の方が中学生より肯定的に回答する割　合が高い。
・算数・数学の勉強は大切だと思っている児童　生徒に比べ，好きな児童生徒の割合は低い。などがよみとれるが，「授業の内容はよく分かるか」について詳しく見てみると

算数の授業の内容はよく分かる児童の割合は，平成１９年度は７７．２%，平成２０年度は７８．２%，平成２１年度は７９．２%と毎年増加しており，約８０%の児童が肯定的に回答している。それぞれの年度の増加の内訳としては，「どちらかといえば，当てはまる」が減少し，「当てはまる」と回答した児童が，４１．３%，４３．２%，４４．７%と増加したことによる。「当てはまらない」と回答した児童の割合は毎年６%程度である。

数学の授業の内容はよく分かる生徒の割合は，平成１９年度は６４．０%，平成２０年度は６５．８%，平成２１年度は６５．２%と毎年６５%前後であり，算数の約８０%と比べて１５ポイント程度低くなっている。また，算数では「当てはまる」が「どちらかといえば，当てはまる」の割合を上まわるのに対して，数学では，「どちらかといえば，当てはまる」の割合が多くなる。「当てはまらない」と回答した生徒の割合も毎年１１%程度であり，算数の６%程度と比べ，５ポイント程度高くなる状況にある。

３．課題の解決に向けて

〈２　児童生徒の意識〉では全国の状況を示したが，各学校においては，各種調査等を活用し，学校全体の状況，学級全体の状況，生徒一人一人の状況を把握し，明らかとなった課題を解決するための授業改善や教員研修の充実を図ること大切である。

課題とその解決を図るための視点

○学習意欲の向上を図るために

・興味・関心を高める教材の開発を行う。
・達成感や成就感を味わわせる。
・単元のはじめに学習の見通しをもたせる。
・学習規律の定着を図る。　　等

○知識・技能の確実な定着を図るために

・繰り返し学習する機会を設ける。
・少人数指導、個別指導、習熟度別学習等の指導体制を工夫する。
・家庭学習の工夫をする。　　等

○知識・技能を活用し、課題を解決する力の育成を図るために

・知識・技能を活用する場面を取り入れた指導計画を立てる。
・日常生活との関連を図った学習活動を意図的に取り入れる。
・体験的な活動の中に、知識・技能を活用する場面を位置付けた指導を展開する。

・学び方や考え方を身に付けさせる学習を取り入れる。　　等

○言語活動の充実を図るために

・算数的活動・数学的活動を充実させる。

・身に付けた言語能力を活用する場面を設定する。

・少人数での話合いの場面を設定する。

・限られた条件の中で、必要な情報をまとめて表現する学習を取り入れる。

・掲示物等の学校内の児童生徒の言語環境を充実させる。　　等

○校内研修の充実を図るために

・明らかになった課題を解決するための研修内容を検討する。

・児童生徒の実態に応じた指導方法の改善点を検討する。

・自校の課題解決のための重点目標の設定や、研修計画の作成を行う。

・研究授業を積極的に行い、実践的な研究を重ねる。　　等

○効果的な指導体制を確立させるために

・指導計画の見直しや指導体制の検討を行う。

・研修体制や研修計画を見直す。

・外部人材の活用など，地域ぐるみで学校を支援する体制の構築を図る。

４．授業改善の視点

（１）学習内容の系統性を踏まえた指導

〈１　はじめに〉で述べたように，算数・数学で学習したことは，より進んだ算数・数学の学習へ活用していくことになる。したがって，指導者が今指導する学習の内容の系統性を踏まえ指導することが大切である。このことは，指導者が「わかる」をどう捉えるかに大きく関わることであると考える。

例えば，中学校第２学年の一次関数で変化の割合を扱う際に，第３学年の学習する関数$y=ax^2$ との系統を考えることにより，変化の割合を計算して求めることとともに，変化の割合を事象の考察やその説明に適切に用いることの指導の重要性がより明確になる。

・変化の割合＝ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ を，計算して求めることができる。

表，式，グラフと関連付けて指導することにより，

・変化の割合は，常に一定でa に等しい。

・グラフが直線になる。

・傾きがa である。

などを理解する。

この両方を指導することにより，関数$y=ax^2$の学習でも，表，式，グラフと関連付けて変化の割合を捉えようし，変化の割合が一定でないことから，グラフが直

線にならないことが分かることにつなげることができる。

（２）生徒のつまずきを克服する指導

生徒のつまづきの傾向は主に，次のようなことから生じている場合が多い。

・問題解決の見通しを立てることができているか。
・問題の意味や形式が十分理解されているか。
・問題に含まれる条件等の整理は的確で見落としはないか。
・柔軟な思考や見方ができているか。
・用語，記号の理解は十分で，適切に使っているか。
・原理や法則，解決の手順につまづきはないか。
・念頭操作等の誤りや，はやとちりはないか。
・問題解決の意欲はどうか。
・問題解決に必要な既習内容や経験はどのように生かされ，欠けているのは何か。

指導者は，「わからない」と答える生徒が，どのようなつまづきによるものなのか，自分の力でどこまで解決できているのか，どんな支援が必要なのかなどをしっかりと把握して指導に当たることが大切である。

（３）わかる数学の授業の構築に向けて

わかる授業を構築するために，（１）を踏まえ，

・今までの指導の流れが生徒にとって分かりやすいものであったのか
・これからの授業がわかりやすいものとなるように，今指導しておかなければならないことは何か。

などの視点で授業を再構築してよりわかりやすいものにする必要がある。

また，（２）を踏まえ，授業の中で予想されるつまづきとその生徒に対する支援を準備しておく必要がある。

則ち，学習内容をよりわかりやすく指導するための工夫改善と，個に応じた指導をより充実させる工夫改善とが共に行われることが大切である。

５．校内研修の充実

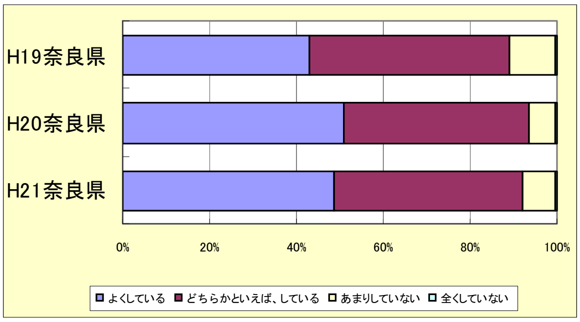
授業改善に取り組んだり，改善を検証をするために，授業研究を伴う校内研修の実施や，他校や外部の研修機関などの学校外での研修への積極的な参加が大切である。

次ページのグラフは，奈良県の教員研修の状況である。

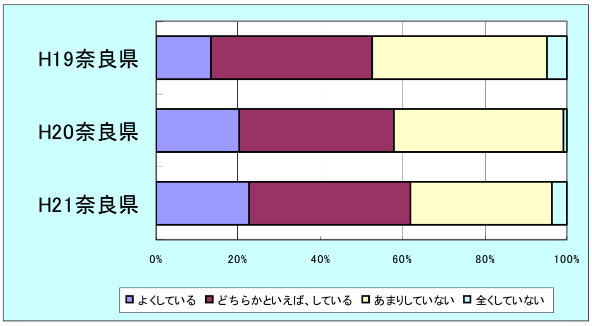
研修内容が算数・数学に限ったものではないが，多くの小学校が，模擬授業や事例研究など、実践的な研修を「よくしている」「どちらかといえば，している」と回答しているのに対し，中学校は年々その割合が増加しているものの，小学校に比べて少ない状況がある。また，授業研究を伴う校内研修の実施回数も中学校の割合が小学校に比べて少ない。

【模擬授業や事例研究など、実践的な研修を行っていますか】

小学校



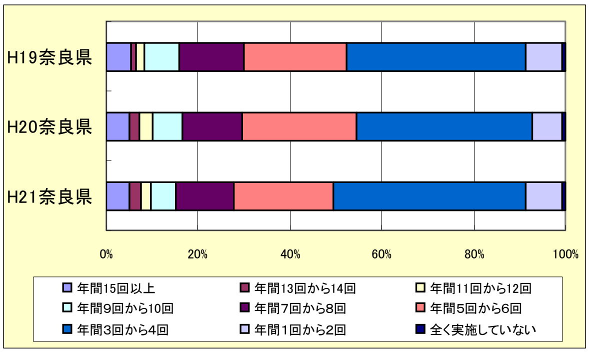
中学校



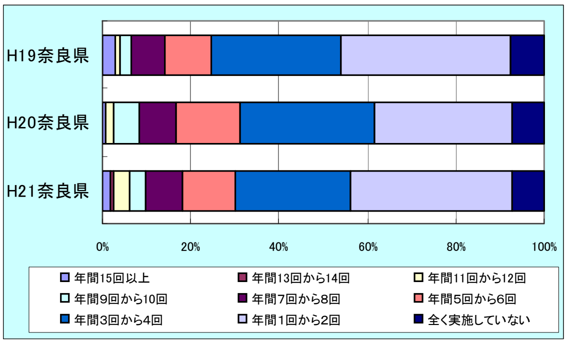
（全国学力・学習状況調査より）

【授業研究を伴う校内研修を前年度、何回実施しましたか】

小学校



中学校



（全国学力・学習状況調査より）

中学校において，模擬授業や事例研究，授業研究を伴う校内研修の実施を充実させる必要がある。また，中学校や高等学校では教科内の研究にとどまることが多いため，より，他校や外部の研修機関などの学校外での研修への参加が大切になると考える。

また，授業研究を伴う校内研修では，あらかじめ「授業診断シート」（下の例参照）を用意し，授業を参観することで，参観の観点が共通のものとなる。更に，授業者が授業改善の検証をするためには，授業診断シートの観点を絞り込むことが必要であろう。

授業診断シート（例）　　　　（高等学校用）

項　目	授業診断の観点	備　考
生徒の状況	落ち着いた態度で集中して学習に取り組んでいる。	
	教科書等の必要な学習教材が用意されている。	
	学習内容について積極的に発言している。	
	予習を行うなど授業を受ける準備がされている。	
	板書内容等を正確に記録している。	
	教員の発問の趣旨を理解して答えている。	

授業の展開等	単元の指導計画に沿って授業が行われている。	
	適切な時間配分で授業を行っている。	
	指示する内容が生徒に伝わっている。	
	生徒の立場に立った説明になっている。	
	生徒の学習理解を促すための工夫がみられる。	
	生徒の学習状況に応じた発問がされている。	
	生徒の学習理解を促す板書内容になっている。	
	本時のまとめが学習内容の確実な定着を図るものになっている。	
	生徒の安全に留意しながら授業が行われている。	
	整備された環境の中で授業が行われている。	
	適切な評価がされている。	

指導方法の工夫	問題解決的な学習を取り入れている。	
	体験的な学習を取り入れている。	
	個別指導やグループ別指導を取り入れている。	
	習熟の程度に応じた指導を取り入れている。	
	教員の協力的な指導を取り入れている。	
	コミュニティーチャー等地域社会の人材を活用している。	
	コンピュータ等の情報機器を有効に活用している。	

（奈良県学校改善支援プランより）

６．おわりに

わかる数学の授業を構築するためには，授業改善の視点を明確にし，校内研修等で検証し，さらに改善を行うことが大切である。また，これまで指導計画の見直しや指導体制の検討も継続的に行われなければならない。そのためには，各学校において，そのことを学校全体で取り組むシステム作りが必要となる。

［参考文献］
・小学校学習指導要領解説　　算数編　平成２０年８月　　文部科学省
・中学校学習指導要領解説　　数学編　平成２０年９月　　文部科学省
・高等学校学習指導要領解説　数学編　平成２０年１２月　文部科学省
・学習指導と評価の改善と工夫　大日本図書　文部省
・奈良県学校改善支援プラン　奈良県教育委員会

２－２　教員養成

「わかる」数学の授業構築にむけた教員の意識改革への取り組み
－小学校教科「算数」における授業実践－

市原 一裕
奈良教育大学教育学部数学教育講座

大室 敦志
奈良教育大学大学院教育学研究科

1. はじめに

本研究「わかる数学の授業を構築するための基礎研究」の目的のひとつとして,「わかる」数学の授業構築に向けた数学教員の意識改革を図ることが述べられていた。本稿では，直接に現場教員の意識改革を図る前段階として，教員養成段階における教員志望学生の意識改革に向けて行った実験授業について報告する。

具体的には，教員養成課程における授業改善を目指した先行研究（吉川，1997）をもとにし，小学校教員養成課程の大学生の算数・数学観の意識変革を目指した。

さらに,
① 小学校で算数を教えるために必要とされる知識の習得（図形の合同）
② 先行研究において取り入れられている指導法（オープンアプローチ）に触れることもねらいとした。

（１）算数は答えが１つ？

算数・数学は，よく「答えが１つしかない教科」だと言われる。今回実践授業を行った小学校教科科目算数の受講生にも,「算数・数学の問題は，答えがただ１つしかない」と認識している学生の割合の多いことが，事前調査からわかった（２,（４）事前調査の結果を参照)。しかし，算数で指導すべきことは，単に問題の解き方や答えなどを教えることだけではなく,「見通しをもち筋道を立てて考え,表現する能力を育てる」ことや「数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる」ことであると,学習指導要領の目標にも明記されている（文部科学省,2008)。

今回，先行研究　（吉川，1997）をふまえて，オープンアプローチを取り入れた講義を行った。オープンアプローチの特徴である多様な解や考え方を扱えるような題材を用いた授業を行うことで，受講する学生にとって，算数・数学の教材観や指導観が変わるきっかけとなりうると考えた。

（２）小中間の接続を意識した内容理解

平成２０年度の学習指導要領改訂によって,「図形の合同」をはじめ，現行学習指導

要領において中学校で扱っていた内容の一部を小学校でも扱うこととなった。たとえば，図形領域においては，中学校第２学年で扱っていた「図形の合同」の一部を，小学校第５学年でも扱うこととなり，その他にも「拡大と縮小」「対称な図形」などが，中学校より移行された（いずれも第６学年で扱う）。移行の目的は，「小学校と中学校の間での指導内容の接続に配慮したものである」（文部科学省，2008）と解説されており，内容の程度を少しずつ高めてつなげていくスパイラルな教育課程を編成することを重視したものとなっている。つまり，小学校で算数を教える際には，中学校，あるいはそれより先にある数学の内容を理解しておき，見通しを持った指導を行っていくことが重視されている。

たとえば，今回の実践授業の題材として扱った「図形の合同」に関しては，小学校第５学年においては，「合同な図形をかいたり，作ったりする活動を通して，次の条件（三つの辺，二つの辺とその間の角，一つの辺とその両端の角）が必要であることに気付かせていくことが大切である」とされている（図１　参照）。

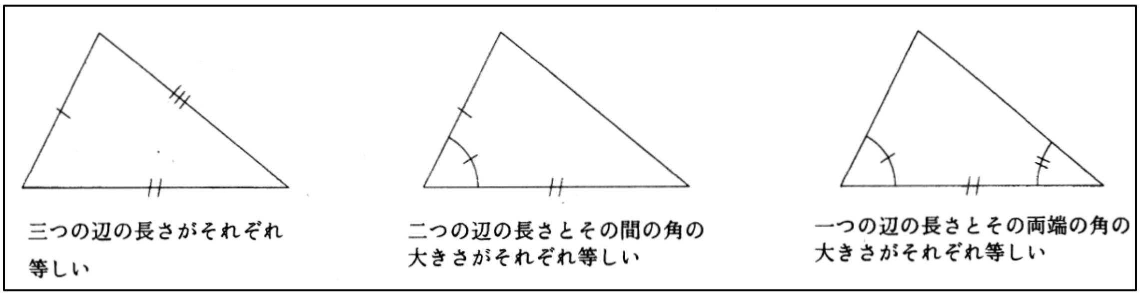


図　1：合同な図形をかくための条件（文部科学省，2008）

一見，この３つの条件は，中学校第２学年で学習する三角形の合同条件のようであるが，これらは，三角形がただ１つに決まるための三角形の決定条件である。合同条件は，２つの三角形が合同かどうかを判断するための条件であり，２つの図形の比較を行っている点で，小学校での扱われ方の違いが見られる。

このように，算数・数学を指導するためには，指導する内容の系統を指導者が理解することが求められる。そのためには，「図形の合同」のようなスパイラルな指導が求められ，その背景に数学的に広がりのある題材に触れることで，内容を系統的に理解する視点を持たせることが必要となってくると考えた。

（３）オープンアプローチによる指導

ここでは，オープンアプローチによる指導法を，「解答や考え方を多様に考えることができる問題（オープンな問題）を用いることで，児童・生徒（ここでは学生）から出てきた多様な正答や考え方を活かしながら，授業展開を行う指導法」であると規定する。この指導法は，「子どもの発想を生かしながら，数学的アイデアを大切にして，一般化したりしながら展開するところに，子どもと数学の両面に開かれた指導が可能」

（能田，1983）であり，今回の授業において目標としている，数学的な広がりや学生の活動や発想の広がりを期待することができると考えた。

２．実践授業の構想

吉川（1997）の授業実践をもとに，実践授業の指導案を作成した。同時に，実践授業の評価の１つとして，事前調査，事後調査をアンケート形式で行った。

（１）小学校教科科目「算数」

まず，授業実践を行った小学校教科科目「算数」の目的を，本年度教育学部シラバスから引用する。

小学校の教科である「算数」に関して，教科内容の背後にある数学を解説することを目的とします. 実際の算数科指導において使える内容を選び，それを題材にして子供たちに伝えるべき「数学的に考える力・態度」が身につけられるよう，進めていく予定です。

本年度は，事前調査実施日は３８名，授業実践当日は３１名の受講生であった。受講生のほとんどが学校教育教員養成課程の１回生であるが，数学教育専修の学生だけでなく，教育学，国語教育，理科教育，音楽教育や保健体育など，さまざまな専修の学生で構成されている。

（２）どこをオープンにするのか

オープンアプローチによる授業を考えるためには，学生から多様な答えや考え方を引き出すためのオープンな問題が必要である。今回の授業においては，３つのオープンな問題をもとに授業を構成した。

［１］合同な三角形のかき方を考える

まずは，与えられた１つの三角形と合同な三角形のかき方を考えるオープンな問題を設定した。この問題では，３辺の長さをはかる，２辺の長さとその間の角の大きさをはかる，１辺の長さとその両端の角の大きさをはかる，といった三角形の決定条件をもとに合同な図形をかくことができるが，それ以外にも，平行移動や対称移動によってもとの三角形を移動させることを考えることができる。また，コンパスを用いての長さのとり方，角度のとりかたといった作図方法の確認にも言及することができる。

［２］四角形の決定条件を考える

三角形の決定条件を確認した後に，四角形の決定条件を考える課題を設定した。こ

の問題は，表１のように，さまざまな方法を考えることができる。また，三角形と違い対角線がかけることから，組み合わせの幅が広くなっている。さらにより一般に，考える図形の要素（角の大きさ，辺の長さなど）や，図形の分類基準を変化させることで限りなく拡張させていくことができる問題ともなっている。

[三角形に帰着する方法]

まず，四角形の４つの頂点のうち３つを含む三角形をかき，その後，その三角形の一辺（四角形の対角線にあたるところ）を利用して三角形をもう１つかく方法。

≪はじめの三角形のかきかた≫

・２辺と１本の対角線の長さが等しい。

・２辺とその間の角の大きさが等しい

（※１辺とその両端の角の大きさでは，対角線がひけない）

≪あとの三角形のかきかた≫

・１辺の長さとある１つの角が等しい。

・２辺の長さが等しい

・他の対角線１本の長さとある１辺の長さが等しい。

[三角形の決定条件を使わない方法]

・３つの辺とその間の２つの角の大きさが等しい。

・２つの辺と３つの角の大きさが等しい。

・１辺と４つの角の大きさが等しい。（作図は難しいか）

[誤答例]

・４つの辺の長さが等しい　（誤答。反例を示す）

・辺と角度の位置関係を意識していない。

表１：予想される反応例

［３］発展課題を考える

３つ目の課題として，三角形の決定条件，四角形の決定条件を考えた後に，「この次には，どんなことを考えてみたいですか？調べてみたいですか？」と問いかけることで，今回の活動から発展した内容を考えさせた。たとえば，以下の表２のような発展課題が考えられる。

・四角形の決定条件は，全部でいくつ考えることができるのだろうか。
・四角形の合同条件を調べたい。
・五角形，六角形ではどうだろうか。
・三角形，四角形の相似条件はどうなるだろうか。
・ｎ角形ではどうだろうか。

表２：予想される発展課題

この課題こそが，オープンアプローチが目指すところでもある，子ども（学生）にも数学にも両方に開かれた活動だということができるだろう。目指すべき子ども（学生）の姿は，このような課題を与えなくても，自ら進んで新たな課題を見つけるような状態であるが，今回は，その道筋を授業者が示すことによって，受講生の教材の見方を養うことをねらいとした。

（３）指導案の概要

（２）の３つのオープンな問題をもとに，９０分間の指導案を作成した。ここでは，授業のおおまかな流れが把握できるように，学習活動を掲載する。

なお，付表１として，詳細な指導計画を掲載している。

１．合同の定義と事前調査

1.1.題材について

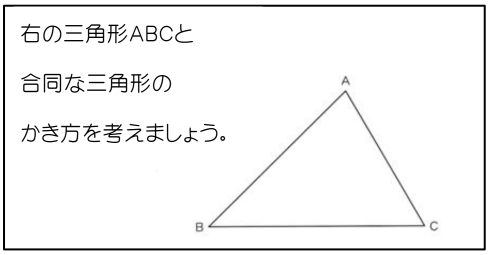
・Ｈ２０年度に改訂された学習指導要領では，小学校第５学年に図形の合同が追加されるなど，中学校の内容の一部が小学校へ移行された。

1.2.合同の定義

・教科書で扱われている定義を確認する。

きちんと重ね合わせることができる２つの図形は，合同であるといいます。

1.3.合同な三角形をかく

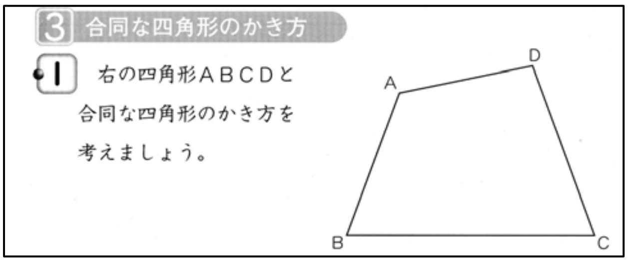


1.4.合同条件と決定条件

・小学校と中学校での扱われ方の比較を行い，合同条件と決定条件の違いを説明する。

2．四角形の決定条件

2.1.合同な四角形をかく



（日本文教出版　小学算数　平成２１年度用補助教材 ６年より引用）

2.2.条件を少なくする

・４つの辺と４つの角の８つの要素を考え，なるべく少ない要素でかくことを考える。

2.3.グループ思考

・４人グループに分かれて，意見を出し合いながら四角形の決定条件をまとめる。

3．内容を発展させる

・四角形の決定条件からの発展課題を考える

4．オープンアプローチについて

4.1.本授業とオープンアプローチ

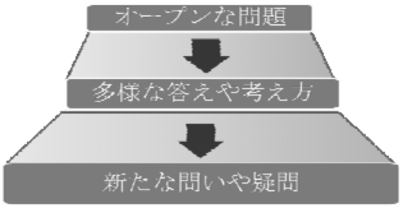
・本授業におけるオープンアプローチの場面を説明する

4.2.オープンアプローチとは

・正答が多様な問題，解が多様な問題を中心に説明を行う。

4.3.オープンな問題からさらにオープンへ

・多様な正答や解法がうまれるオープンな問題を扱うことで，子どもの思考や活動が開かれたもの（オープン）になっていく。子どもの思考や活動が開かれていくと，課題を解決した後に「新たな問い」や「新たな疑問」といったものがうまれてくることで，さらに開かれた活動へと展開していくことが期待できる。



（４）事前調査の結果

実践授業の効果をはかるために,授業１週間前に,図形の合同に関する学力調査と,算数・数学観に関する調査を行った。その結果，図形の合同に関しては，まず，三角形の合同条件が，２つの三角形が合同かどうか判断する条件だという認識のある学生がほとんど居らず，三角形の決定条件を理解できている学生もほとんどいないことがわかった。また，算数・数学観では，半数近くの学生が，算数・数学に対して「答えは１つしかない教科」だと認識していることがわかった。以下に，今回行った事前調査の結果の概要を掲載する。

【事前調査結果概要】

・調査日：２００９年１１月２９日（月）

・対　象：小学校教科科目算数　受講生３８人

（学部１回生３４名，４回生１名，大学院１回生３名）

（１－１）三角形の合同条件について説明してください。

・２つの三角形において３つの合同条件が適用できる。　・・・・・・・・・　２人

・３つの合同条件の記述のみ　・・・・・・・・・２８人

・３つの合同条件の２つ，または１つのみ　・・・・・・・・・　４人

・その他　・・・・・・・・・　３人

（１－２）三角形の決定条件について説明してください。

・決定条件の３つをあげることができる。　・・・・・・・・・　２人

・内角の和が１８０°　・・・・・・・・・１２人

・最も長い１辺が他の２辺の長さの和よりも短い　・・・・・・・・・　５人

・知らない。わからない　・・・・・・・・・　４人

・その他　・・・・・・・・・　４人

（２）学校（小，中，高等学校）での算数・数学の授業や問題に取り組むときのイメージ

（あてはまる　－　どちらともいえない　－　あてはまらない）

①　算数・数学の問題を考えることは楽しい。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
２７	3	8

②　公式や計算の仕方を習うとき，その理由や考え方 を理解しようとする。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
２３	１０	5

③　問題を解くとき，いろいろな方法で考えようとする。

（例えば，図をかいたり，グラフを使ったりする）

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
２１	１０	7

④　自分の解き方とちがう解き方を知ることはためになる。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
３３	5	0

⑤　問題を解くとき，考え方や途中の計算をきちんと書く。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
２２	9	7

⑥　算数・数学の問題は，答えがただ１つしかない。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
１９	１０	9

⑦　問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考える。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
２６	１０	2

⑧　問題を解くとき，途中の計算や考え方がわからなくても，答えさえ正解していればよい。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
5	１０	２３

また，（２）については，学生が所属するコース別の内訳も以下に掲載する。なお，実施した際に使用した調査用紙と結果の詳細は，付表３，４に掲載している。

（２）学校（小，中，高等学校）での算数・数学の授業や問題に取り組むときのイメージ

①　算数・数学の問題を考えることは楽しい。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	3	0	１４	8	2
どちらともいえない	1	1	0	1	0
あてはまらない	0	3	2	2	1

② 公式や計算の仕方を習うとき，その理由や考え方 を理解しようとする。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	2	1	10	8	2
どちらともいえない	1	3	4	1	1
あてはまらない	1	0	2	2	0

③ 問題を解くとき，いろいろな方法で考えようとする。
（例えば，図をかいたり，グラフを使ったりする）

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	3	2	7	7	2
どちらともいえない	0	1	6	2	1
あてはまらない	1	1	3	2	0

④ 自分の解き方とちがう解き方を知ることはためになる。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	4	4	14	9	2
どちらともいえない	0	0	2	2	1
あてはまらない	0	0	0	0	0

⑤ 問題を解くとき，考え方や途中の計算をきちんと書く。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	3	1	10	6	2
どちらともいえない	0	3	2	3	1
あてはまらない	1	0	4	2	0

⑥ 算数・数学の問題は，答えがただ１つしかない。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	2	2	4	9	2
どちらともいえない	1	1	6	1	1
あてはまらない	1	1	6	1	0

⑦　問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考える。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	3	1	１２	8	2
どちらともいえない	1	2	4	2	1
あてはまらない	0	1	0	1	0

⑧　問題を解くとき，途中の計算や考え方がわからなくても，答えさえ正解していればよい。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	1	0	1	3	0
どちらともいえない	0	1	5	3	1
あてはまらない	3	3	１０	5	2

[注]各コースの正式名称は，以下の通りである。

教発：教育・発達基礎コース
（教育学専修，心理学専修，幼年教育専修，特別支援教育専修）
言社：言語・社会コース
（国語教育専修，社会科教育専修，英語・国際理解教育専修）
理生：理数・生活科学コース
（数学教育専修，理科教育専修，技術教育専修，家庭科教育専修）
身表：身体・表現コース
（音楽教育専修，美術教育専修，保健体育専修）

３．実践結果

授業は，客観的観察と学生の活動の正確な把握を目的として，筆者２名によるティームティーチング方式で行った。ここでは，特に注目したい学生の反応と事後調査の結果概要を報告する。なお，授業において使用したワークシートは，付表２に掲載している。

（１）授業中の学生の反応

ア．「1.3.合同な三角形をかく」活動では，ほとんどの学生が，決定条件（３つの辺の長さ，２つの辺の長さとその間の角の大きさ，1 つの辺の長さとその両端の角の大きさ）をもとに作図していた。

イ．「２．四角形の決定条件」では，グループによってさまざまな話し合いが行われていた。反例をあげながら決定条件が正しいかどうかを確かめている班があったり，決定条件の言語化（３辺の長さとその間にある２つの角の大きさが等しいなど）に着目している班があったりした。

ウ．「３．内容を発展させる」では，さまざまなアイデアが考えられており，結果の予想まで考えている学生もいた。

以下表３が，実際の学生の反応例である。

・四角形の相似条件
・円の合同条件
・四面体の合同条件，相似条件
・ｎ角形の合同条件
・なぜ４つの要素では決めれないのか
・必要な要素数とその法則性，規則性
・五角形，六角形，七角形，・・・
・三角形から四角形の合同条件を考えるとき，合同条件に「対角線」が加わったが，多角形を考えるとき，他に何か条件が増えるか
・間違った合同条件の反例を考える
・定規とコンパスだけで合同な図形や様々な図形を描く方法を考える
・正多角形，平行四辺形，ひし形，台形のように，特殊な図形ではどうか

表３：「３．内容を発展させる」における学生の反応

（２）事後調査の結果概要

事後調査の結果概要は，以下の通りであった。なお，実施した際に使用した調査用紙と結果の詳細は，付表５，６に掲載している。

【事後調査結果概要】

・調査日：２００９年１２月７日（月）

・対　象：小学校教科科目算数　受講生３１人

（学部１回生２８名，大学院１回生３名）

①　意欲的に取り組みたくなる問題であった。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
３０	１	０

② 課題では, 1 つの答えがかけたあと, 別の答えや考え方でやってみようとした。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
２８	2	1

③ 答えがただ 1 つに決まらないと不安だ。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
8	7	１６

④ 課題では，途中の考え方が分からなくても，答えさえ正解していればよいと思った。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
3	8	２０

⑤ 教育実習など学校で教える時にオープンアプローチの授業を自分もやってみたい。

あてはまる	どちらともいえない	あてはまらない
２８	3	0

また，コース別の内訳は，以下の通りである。

① 意欲的に取り組みたくなる問題であった。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	4	1	１３	9	3
どちらともいえない	0	0	1	0	0
あてはまらない	0	0	0	0	0

② 課題では, 1 つの答えがかけたあと, 別の答えや考え方でやってみようとした。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	4	1	１２	8	3
どちらともいえない	0	0	1	1	0
あてはまらない	0	0	1	0	0

③ 答えがただ 1 つに決まらないと不安だ。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	0	0	4	3	1
どちらともいえない	0	0	5	2	0
あてはまらない	4	1	5	4	2

④　課題では，途中の考え方が分からなくても，答えさえ正解していればよいと思った。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	0	0	１３	8	3
どちらともいえない	0	0	1	1	0
あてはまらない	4	1	0	0	0

⑤　教育実習など学校で教える時にオープンアプローチの授業を自分もやってみたい。

	教発	言社	理生	身表	院生
あてはまる	3	1	１３	8	3
どちらともいえない	1	0	1	1	0
あてはまらない	0	0	0	0	0

４．実践のねらいの達成度

まず，本実験授業のねらいとして挙げた３点からの考察を行う。1 つ目に挙げた教員養成段階における教員志望学生の意識改革については，事前・事後調査の結果をもとに，「算数・数学は，答えや考え方が１つではない」と考える学生が増えたと判断できる。次に，２つ目の図形の合同に関する知識の習得に関しては，演習プリント（課題２，３）の状況から見て，ある程度達成されていると判断できる。最後に，オープンアプローチに関しては，事後アンケートにおいて「自分もやってみたい」と答えた学生がほとんどだったことから，学生が興味を持ったと判断することができる。

これら３点の達成度がある程度見られたことに加え，多くの学生が意欲的に取り組むことができていた授業だったことから，本実践授業は意義のあるものだったと考える。

５．今後の課題

今回の実践授業では，今後につながる課題もいくつか見えてきたので，それらをあげておく。

・オープンアプローチによる授業の概念をよりはっきりと規定する必要がある。
・それぞれのグループ活動で話し合った過程をうまく全体の流れに活かすことができないか。
・オープンに終わることで，何を学んだのかがはっきりしないことが考えられる。

・オープンアプローチによって得られた多様な答えや考え方と評価の問題についての検討が必要である。

６．謝辞

本研究を行うにあたり，奈良教育大学数学教育講座の重松敬一先生，近藤裕先生，教職大学院の吉田明史先生，また，帝塚山大学の勝美芳雄先生，天理大学の上田喜彦先生から，多数のアドバイスをいただきました。ここに記して感謝いたします。

[注]　本稿は,『奈良教育大学　教育実践総合センター研究紀要 Vol.19』に掲載決定したものに加筆修正したものである。

７. 参考文献

[１]. 吉川行雄，(1997),「小学校教員養成課程におけるオープンエンドアプローチー合同な三角形のかきかたを題材にしてー」，弘前大学教育学部紀要，第 77 号，pp.15-27.

[２]. 文部科学省，(2008)，小学校学習指導要領解説　算数編，東洋館出版社，p.8, p.13，p.158.

[３]. 能田伸彦，(1983)，算数・数学科　オープン　アプローチによる指導の研究，東洋館出版社，p.69.

[４]. 中原忠男他，(2009)，小学算数　平成２１年度用補助教材　６年，日本文教出版，p13.

[５]. 静岡大学教育学部附属静岡中学校,「いろいろな多角形の合同条件を考えよう」，数学科実践事例集２（平成 16 年度）.

http://www.shizuchu.ed.shizuoka.ac.jp/kenkyu/kenkyu/jirei/suugaku/sugaku16-2.pdf

付表１

2009 年 12 月 7 日

2009 年度後期　小学校教科科目　算数

小学校教科算数　指導計画

授業者：奈良教育大学大学院１回生　大室　敦志

１．日時

２００９年１２月７日　第７，８時限

２．題材

Ｃ　図形　（１）　平面図形の性質　（図形の合同）

３．本授業の目標

〇図形の合同とその背後にある数学に触れること

〇オープンアプローチによる開かれた授業展開の特徴を理解すること

４．指導について

4.1.教材観

平成２０年の学習指導要領改訂によって，現行指導要領では中学校第２学年で扱っていた「図形の合同」の一部を小学校第５学年で扱うこととなった。これは，「小学校と中学校の間での指導内容の接続に配慮したものである」(1) とされており，図形領域では，図形の合同のほかに，拡大と縮小，対称な図形（いずれも第６学年）が，中学校より移行された。この改訂は，小学校算数（特に高学年）と中学校数学との連携をより意識する必要性を感じさせるものである。そのためには，少なくとも指導する側は，小学校での指導内容だけでなく中学校やそれ以上の内容を理解しておき，見通しを持った指導を行うべきであろう。

図形の合同の単元では，小学校第５学年においては，「合同な図形をかいたり，作ったりする活動を通して，次のような条件（三つの辺，二つの辺とその間の角，一つの辺とその両端の角）が必要であることに気付かせていくことが大切である」(2) とされている。この３つの条件を，機械的に合同な図形がかける条件として教えるだけでなく，「三角形の決定条件（三角形がただ１つ決まるための条件）が同じときに合同である」(3) といったことに留意しておく必要があるだろう。

(1) 文部科学省(2008)「中学校学習指導要領解説　数学編」。

(2) 文部科学省(2008)「小学校学習指導要領解説　算数編」。

(3) 数泉編集部,『数学の泉』, 地域教材社, pp. 154.

4.2.学生観

小学校教科科目は，幼稚園，小，中，高等学校の教諭の普通免許状の授与を受ける際に必要とされる「教科に関する科目」の１つとして奈良教育大学では開講されており，本学では，主に学校教育教員養成課程の１回生が履修する科目である。そのため，高校３年生で数学Ⅲまで履修してきた数学の得意な学生から，高校だけでなく，中学校数学や小学校算数の知識も十分とはいえない学生まで，実にさまざまなレベルの学生が履修している。

また，多くの学生は，算数・数学に対して「答えは１つしかない教科」だと認識していることが事前調査からわかった（19 人が「あてはまる」と答え，「あてはまらない」の 10 人の倍近い人数となった）。しかし，算数で指導すべきことは，「基礎的・基本的な知識及び技能を身に付ける」ことだけでなく，「見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てる」ことや，「数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる」ことであると学習指導要領の目標に明記されている。

そこで，本授業では，オープンアプローチを取り入れた講義を行う。オープンアプローチの特徴である多様な解や考え方を扱えるような題材を用いた授業を行うことで，大学教員は，学生の能力差に対応した指導が可能となる。また，受講する学生は，算数の教材観や指導観が変わるきっかけとなりうると期待している。

4.3.指導観

平成２０年に改訂された学習指導要領には，算数的活動として「合同な図形をかいたり，作ったりする活動」が明記された。解説書には，「かいたり，作ったりした図形が合同であるかどうかを確かめたり，条件にあっているかどうかを確かめたりする活動によって，確かな根拠を基に説明する態度を育てることができる（p. 184）」とも記されている。本授業では，算数的活動の１つの方法であるオープンアプローチの授業を通して，実際に，どのような指導を行っていけばよいのかを例示し，算数的活動を通した学習の体験をさせたい。さらに，オープンアプローチによる指導を通して，子どもにどのような心理的変化が起こっているのかということも，感じてもらいたい部分であり，学生からのフィードバックによって，指導者にとっても有益なデータとなることを期待している。

５．事前調査について

本授業を行うにあたり，事前に受講生を対象とした図形の合同に関する学力に対する調査と，算数・数学観に関する調査を行った。その結果，図形の合同に関しては，まず，三角形の合同条件が，２つの三角形が合同かどうか判断する条件だという認識のある学生がほとんど居らず，三角形の決定条件を理解できている学生もほとんどいないことがわかった。また，算数・数学観では，半数近くの学生が，算数・数学に対して「答えは１つしかない教科」だと認識していることがわかった。以下に，今回行った事前調査の結果の概要を掲載する。

・調査日：2009 年 11 月 29 日（月）

・対　象：小学校教科科目算数　受講生 38 人

（学部１回生 34 名，４回生１名，大学院１回生３名）

（１－１）三角形の合同条件について説明してください。

・２つの三角形において３つの合同条件が適用できる。 ・・・・・・・・・ ２人
・３つの合同条件の記述のみ ・・・・・・・・・２８人
・３つの合同条件の２つ，または１つのみ ・・・・・・・・・ ４人
・その他 ・・・・・・・・・ ３人

（１－２）三角形の決定条件について説明してください。

・決定条件の３つをあげることができる。 ・・・・・・・・・ ２人
・内角の和が１８０° ・・・・・・・・・１２人
・最も長い１辺が他の２辺の長さの和よりも短い ・・・・・・・・・ ５人
・知らない。わからない ・・・・・・・・・ ４人
・その他 ・・・・・・・・・ ４人

（２）学校（小，中，高等学校）での算数・数学の授業や問題に取り組むときのイメージ

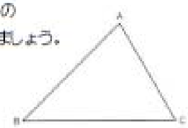
（あてはまる　－　どちらともいえない　－　あてはまらない）

（１）算数・数学の問題を考えることは楽しい。	(1)	（２７－　３－　８）
（２）公式や計算の仕方を習うとき，その理由や考え方を理解しようとする。	(2)	（２３－１０－　５）
（３）問題を解くとき，いろいろな方法で考えようとする。（例えば，図をかいたり，グラフを使ったりする）	(3)	（２１－１０－　７）
（４）自分の解き方とちがう解き方を知ることはためになる。	(4)	（３３－　５－　０）
（５）問題を解くとき，考え方や途中の計算をきちんと書く。	(5)	（２２－　９－　７）
（６）算数・数学の問題は，答えがただ１つしかない。	(6)	（１９－１０－　９）
（７）問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考える。	(7)	（２６－１０－　２）
（８）問題を解くとき，途中の計算や考え方がわからなくても，答えさえ正解していればよい。	(8)	（　５－１０－２３）

６．評価について

授業の事前，事後にアンケートを取り，その比較によって学生の達成度を評価する。

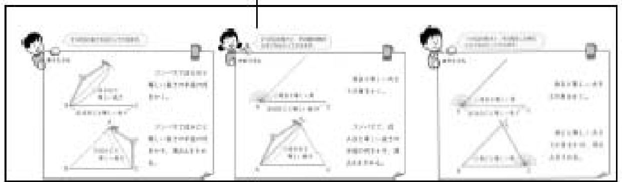
７．本時の指導の流れ

時間	学習活動	指導内容・留意点等
0	0. 本授業の説明	本授業の流れを説明する。
	(1) 合同の定義と事前調査について (2) 四角形の合同条件（活動） (3) 活動を発展させる (4) 指導の視点からの解説（オープンアプローチ） (5) 発展的内容（市原先生）	
3	1. 合同の定義と事前調査 1.1. 題材について	・H20 年に改訂された学習指導要領では，小５に図形の合同が追加されるなど，中学校の内容の一部が小学校へ移行された。
5	1.2. 合同の定義 合同とは，どのような関係をあらわしているのでしょう。 ・予想する	・教科書の定義の部分を隠したものを提示する。
	きちんと重ね合わせることができる２つの図形は，合同であるといいます。	
8	1.3. 合同な三角形をかく 右の三角形ABCと合同な三角形のかき方を考えましょう。 	・「２つの図形」の関係であることを強調して説明する。 ・分度器，コンパス，三角定規を使用してよいことを伝える。 ・コンパスの使い方の確認 （補助教材 pp.10）
	[予想される解答例] [正答] ・三辺の長さをはかった（はかりとった）。 ・二辺の長さとその間の角の大きさをはかった。 ・一辺の長さとその両端の角の大きさをはかった。 [上記以外で予想される反応とそれらに対しての（手立て）] ・辺，角の要素を４つ以上はかってかいたもの。 ←（もっと少ない条件でかけないか，たしかめさせる）	

・二辺の長さとその間でない角の大きさをはかったもの。
　　　　　　　　　　　← (反例を考えさせる)
・3つの角の大きさをはかったもの。　← (反例を考えさせる)
・コンパスで長さをはかりとる，定規で長さをはかる。
← (コンパスの長さのとりかた，定規で長さをはかる問題点を解説する)
・分度器の使用方法　　　　　← (簡単に解説する)

15　1.4.合同条件と決定条件

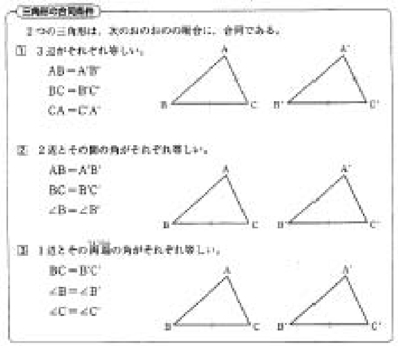
1.4.1.小学校での扱われ方



(補助教材 pp.11～12)

・まず，小学校の教科書での合同な三角形のかき方としてあげられている3つの方法を確認する。

1.4.2.中学校での扱われ方



・中2で扱われている三角形の合同条件では，「2つの三角形において・・・」と書かれている。

20　1.4.3.合同条件と決定条件

中学校第2学年で扱う「三角形の合同条件」は，2つの三角形が合同であることを示すための条件である。
小学校第5学年では，合同な図形をかくために3つの条件を扱っているが，これは「三角形の決定条件」である。

2.四角形の決定条件

25　2.1.合同な四角形をかく

まずは，条件を与えずにかかせる。

30

40　2.2.条件を少なくする

条件：なるべく少ない条件でかくことを考える。

なるべく少ない条件でかけるように考えましょう。

2.3.グループ思考

・グループで意見を出し合いながら，説明をまとめる。

・グループは，席順（学籍番号順）に4人程度で組ませる

2.4.発表する

・グループの代表者が発表する

・グループ内で意見を出し合い，1つの解答をつくる。または，それぞれの解答の中から一番いいものを選ぶ。

[予想される反応例]

[三角形に帰着する方法]
：まず，四角形の4つの頂点のうち3つを含む三角形をかき，その後，その三角形の一辺（四角形の対角線にあたるところ）を利用して三角形をもう1つかく方法
≪はじめの三角形のかきかた≫
・2辺と1本の対角線長さが等しい。
・2辺とその間の角の大きさが等しい
（※1辺とその両端の角の大きさでは，対角線がひけない）
≪あとの三角形のかきかた≫
・1辺の長さとある1つの角が等しい，・2辺の長さが等しい
・対角線1本の長さとある1辺の長さが等しい。
[三角形の決定条件を使わない方法]
・3つの辺とその間の2つの角の大きさが等しい。
・2つの辺と3つの角の大きさが等しい。
・1辺と4つの角の大きさが等しい。　　（←作図は難しいか？？）
[誤答例]
・4つの辺の長さが等しい　（←誤答。反例を示す）
55　・辺と角度の位置関係を意識していない。

	2.5.まとめる ・四角形の決定条件には，５つの要素が必要。	
	<u>3.内容を発展させる</u> 3.1.四角形の決定条件からの発展課題を考える。 三角形の決定条件，四角形の決定条件を扱ってきました。 この次には，どんなことを考えてみたいですか？調べてみたいです ・グループごとに考える [予想される反応]	
６５	・四角形の決定条件をもっと調べたい ・四角形の合同条件を調べたい ・五角形，六角形はどうか	・これらの課題の解決は，次週までの自由課題とする。
	<u>4.オープンアプローチについて</u> 4.1.本授業とオープンアプローチ ・本授業を振り返り，オープンアプローチのイメージをつかむ	・本授業では，答えや考え方が多様に考えられる「オープンな発問」から得られた学生の反応を活かした授業を構成した。
８５ ９０	4.2.オープンアプローチとは	・島田(1995)のオープンエンドアプローチ，能田(1983)のオープンアプローチの精神を中心に，解や解法など算数・数学の授業として開かれているだけでなく，子どもの活動にも開かれていくことを目標としていることを説明する。
	5.事後アンケート	

付表２

算数　講義プリント　2009.12.07

図形の合同

１．図形の合同とは

・H20 年学習指導要領改訂により,「図形の合同」など中学校の内容の一部が小学校へ移行された。

→「小中の指導内容の接続に配慮したもの」

（文部科学省(2008)『中学校学習指導要領　解説編』）

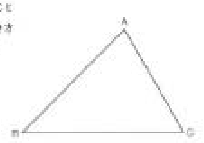
・合同とは

「　　　　　　　　　　　　　　　　　　」は，合同であるといいます。

（日本文教出版(2009)「小学算数　平成 21 年度用補助教材　6 年」，p. 7）

・課題１

Ⅰ　右の三角形ＡＢＣと合同な三角形のかき方を考えましょう。



ポイント①

・

・

・

三角形をただ１つに決めるための条件
（　　　　　　　　　）

ポイント②

・三角形の辺の数：　　　　　　角の数：

→三角形をただ１つに決めるためには，

「　　　　　　　　　　　　　　　」

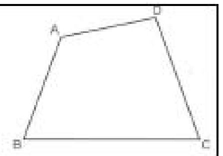
・三角形の合同条件

→「　　　　　　　」が合同かどうか判断するための条件。

２．四角形の合同条件

課題２

Ⅰ　右の四角形ＡＢＣＤと合同な四角形のかき方を考えましょう。



・四角形の合同条件を考えよう

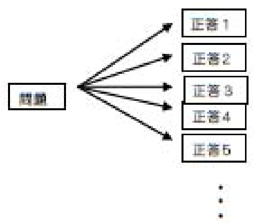
辺の数：「　　」つ　　角の数：「　　」つ

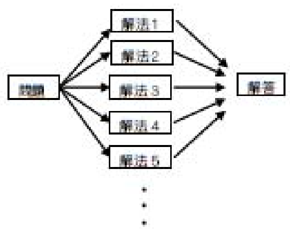
３．指導法の視点からの解説

・オープンアプローチとは

→正答や解法などが多様に考えることが出来る問題（　　　　　）を用いる。

→児童・生徒から出てきた多様な正答や考え方を活かしながら，授業展開を行う指導法





・オープンな問題からさらにオープンへ

→多様な正答や解法がうまれるオープンな問題を扱うことで，子どもの思考や活動が　開かれたもの（オープン）になっていく。子どもの思考や活動が開かれていくと，課題を解決した後に「新たな問い」や「新たな疑問」といったものがうまれてくることで，さらに開かれた活動へと展開していくことが期待できる。

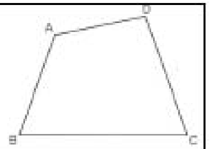
算数　演習プリント　2009.12.07

（　　　　　　）コース　（　　　　　　）専修

学籍番号（　　　　　）　氏名（　　　　　）

課題２

1　右の四角形ＡＢＣＤと合同な四角形のかき方を考えましょう。



・四角形の合同条件を考えよう（グループ活動）

課題３：どんな課題があるだろうか？

付表 3

◎図形の合同に関する事前調査

2009/11/30

コース・専修　（　　　　　　　　　　　　）

学籍番号　（　　　　　　　　）　氏名（　　　　　　　　　　）

1. 次週12／7の講義では、図形分野の合同について扱います。それに向けての事前調査を行います。以下の質問に答えてください。

(1) 三角形の合同条件について説明してください。
知っている言葉を挙げるだけでもかまいません。

(2) 三角形の決定条件について説明してください。
知っている言葉を挙げるだけでもかまいません。

2. ここからは、学校(小、中、高等学校)での算数・数学の授業や問題に取り組むときのイメージについての質問です。それぞれあてはまると思う番号に○をつけてください。

「よくあてはまる」…5　「ややあてはまる」…4　「どちらともいえない」…3
「あまりあてはまらない」…2　「まったくあてはまらない」…1

(1) 算数・数学の問題を考えることは楽しい。	(8)	5 4 3 2 1
(2) 公式や計算の仕方を習うとき、その理由や考え方を理解しようとする。	(9)	5 4 3 2 1
(3) 問題を解くとき、いろいろな方法で考えようとする。（例えば、図をかいたり、グラフを使ったりする）	(10)	5 4 3 2 1
(4) 自分の解き方とちがう解き方を知ることはためになる。	(11)	5 4 3 2 1
(5) 問題を解くとき、考え方や途中の計算をきちんと書く。	(12)	5 4 3 2 1
(6) 算数・数学の問題は、答えがただ1つしかない。	(13)	5 4 3 2 1
(7) 問題を解くとき、もっと簡単に解く方法がないか考える。	(14)	5 4 3 2 1
(8) 問題を解くとき、途中の計算や考え方がわからなくても、答えさえ正解していればよい。	(15)	5 4 3 2 1

3. 最後に、これまで受講してきた大学の授業（講義）の印象についての質問です。それぞれあてはまると思う番号に○をつけてください。

(1) 先生の話を聞いているだけの授業（講義形式）が多い。	(7)	5 4 3 2 1
(2) 授業を聞くだけで、内容の理解が出来る。	(8)	5 4 3 2 1
(3) 集中して授業に参加することができる。	(9)	5 4 3 2 1
(4) 正直、眠たくなることが多い。	(10)	5 4 3 2 1
(5) 時間が過ぎるのが速く感じることがある。	(11)	5 4 3 2 1

質問は以上です。ご協力ありがとうございました。

付表４

２．学校（小，中，高等学校）での算数・数学の授業や問題に取り組むときのイメージ

		5 よく あてはまる	4 やや あてはまる	3 どちらとも いえない	2 あまりあて はまらない	1 まったく あてはま らない
(1)	算数・数学の問題を考えることは楽しい	5	22	3	7	1
(2)	公式や計算の仕方を習うとき，その理由や考え方を理解しようとする	9	14	10	4	1
(3)	問題を解くとき，いろいろな方法で考えようとする	9	12	10	7	0
(4)	自分の解き方とちがう解き方を知ることはためになる	13	20	5	0	0
(5)	問題を解くとき，考え方や途中の計算をきちんと書く	10	12	9	6	1
(6)	算数・数学の問題は，答えがただ１つしかない	5	14	10	7	2
(7)	問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考える	14	12	10	2	0
(8)	問題を解くとき，途中の計算や考え方がわからなくても，答えさえ正解していればよい	1	4	10	17	6

３．これまで受講してきた大学の講義の印象

		5 よく あてはま る	4 やや あてはまる	3 どちらとも いえない	2 あまりあて はまらない	1 まったく あてはま らない
(1)	先生の話を聞いているだけの授業が多い	12	19	6	1	0
(2)	授業を聞くだけで，内容の理解が出来る	1	3	13	19	2
(3)	集中して授業に参加することが出来る	0	6	24	7	1
(4)	正直，眠たくなることが多い	11	21	4	2	0
(5)	時間が過ぎるのが速く感じることがある	3	12	11	11	1

付表５

◎授業アンケート　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2009/12/07

コース　（　　　　　　　　　　　）　　専修　（　　　　　　　　　）

学籍番号　（　　　　　　　　　）　　氏名　（　　　　　　　　　　）

1. 本日の「算数」の授業についての質問です。それぞれあてはまると思う番号に○をつけてください。

「よくあてはまる」･･･5　「ややあてはまる」･･･4　「どちらともいえない」･･･3
「あまりあてはまらない」･･･2　「まったくあてはまらない」･･･1

(1) 意欲的に取り組みたくなる題材であった。	(1)	5　4　3　2　1
(2) 課題では，1つの答えがかけたあと，別の答えや考え方でやってみようとした。	(2)	5　4　3　2　1
(3) 課題では，いろいろな方法で考えようとした。	(3)	5　4　3　2　1
(4) 自分の解き方と違った解き方を知ることはためになる。	(4)	5　4　3　2　1
(5) 今日扱った課題は，答えが何通りを考えられるものであった。	(5)	5　4　3　2　1
(6) 答えがただ１つに決まらないと不安だ。	(6)	5　4　3　2　1
(7) 課題では，途中の考え方がわからなくても，答えさえ正解していればよいと思った。	(7)	5　4　3　2　1
(8) 教育実習など学校で教える時にオープンアプローチの授業を自分もやってみたい。	(1)	5　4　3　2　1
(9) 今日の授業は，先生の話を聞いているだけの授業（講義形式）であった。	(2)	5　4　3　2　1
(10) 授業に出ただけで，内容の理解が出来た。	(3)	5　4　3　2　1
(11) 集中して授業に参加することができた。	(4)	5　4　3　2　1
(12) 正直，眠たくなることがあった。	(5)	5　4　3　2　1
(13) 時間が過ぎるのが速く感じた。	(6)	5　4　3　2　1

質問は以上です。ご協力ありがとうございました。

付表６

事後アンケート集計結果

		5 よく あてはまる	4 やや あてはまる	3 どちらとも いえない	2 あまりあて はまらない	1 まったくあ てはまらな
(1)	意欲的に取り組みたくなる題材であった	16	14	1	0	0
(2)	課題では、1つの答えがかけたあと、別の答えや考え方でやってみようとした。	21	7	2	1	0
(3)	課題では、いろいろな方法で考えようとする	17	13	1	0	0
(4)	自分の解き方とちがう解き方を知ることはためになる	27	4	0	0	0
(5)	今日扱った課題は、答えが何通りも考えられるものであった。	21	8	2	0	0
(6)	答えがただ1つに決まらないと不安だ。	0	8	7	15	1
(7)	課題では、途中の考え方が分からなくても、答えさえ正解していればよいと思った。	1	2	8	16	4
(8)	教育実習など学校で教える時にオープンアプローチの授業を自分もやってみたい	15	13	3	0	0
(9)	今日の授業は、先生の話を聞いているだけの授業(講義形式)だった。	0	0	0	8	23
(10)	授業に出ただで、内容の理解が出来た。	4	12	12	3	0
(11)	集中して授業に参加することが出来た。	12	15	4	0	0
(12)	正直、眠たくなることがあった。	1	1	0	8	17
(13)	時間が過ぎるのが速く感じた。	17	13	1	0	0

２－３　数式（代数）分野

掛け算から平方完成へ

佐々木徹郎
愛知教育大学

１．表題

校種　高等学校
分野　代数
学年　第２学年
単元　掛け算から平方完成へ（数学Ⅰ）

２．小中高種間の接続及び学びの系統

小学校で学習する「かけ算の筆算」は，今日では実用性よりも，分配法則の理解という数学的意味の方が重要になっている。にもかかわらす，算数では従来通り，筆算の仕方が指導の中心である。かけ算の筆算として８通り以上ある方法の中の一つについて，機械的に習熟させているのである。

この授業では，掛け算の筆算では，手続きは１つではないことに気づかせ，分配法則が活用されていることを知らせる。また，「２×２のマス」を利用して，そのことが分かるように提示する。このような計算を「マス計算」と名付ける。

さらに，文字式の展開や因数の計算にも「マス計算」を利用できることを示し，使えるように練習する。さらに，２次関数のグラフを描くときに必要な変形である，一般の２次式を平方完成するために，「マス計算」を利用できるように指導する。

３．本時でわかってほしいこと

２次方程式の解法や平方完成などの変形が，小学校の掛け算の筆算が発展したものであることを理解する。

４．わからせる方法（指導上の工夫）

筆算の復習から始めて，内容の関連を強調する。

５．授業の特徴

復習をして，知識の関連を明示する。

６．学習課題設定の意図

掛け算の筆算の意味を復習し，式変形につなげる。

７．学習指導案

掛け算から平方完成へ

愛知教育大学　佐々木　徹郎

平成 20 年 9 月 18 日（木 ）　第 5 限(13:30 ～ 14：20 ）

１．対象学年　高等学校 2 年 5 組

２．目標

・数学の知識はつながっており，算数の基本的な考え方が発展して数学の内容になって　いる，掛け算の筆算では分配法則が利用されていることを知る。

・文字式の計算で「マス計算」を利用する。

・２次関数の一般式を平方完成するための「マス計算」の方法を知り，身に付ける。

３．本時の展開

<table>
<tr><th>学習内容</th><th>教師の指導</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>７８
×　３８</td><td>「この掛け算を計算しよう。」</td><td>生徒に黒板で計算させる。</td></tr>
<tr><td>４つの数のどこから計算を始めてもよいことを知らせる。
<table><tr><td></td><td>３０</td><td>８</td></tr><tr><td>７０</td><td>２１００</td><td>５６０</td></tr><tr><td>８</td><td>２４０</td><td>６４</td></tr></table></td><td>「これ以外の仕方で計算した人はいませんか。」

「このような２×２のマスを使えば，分配法則を楽に活用できます。そこで，このような計算をマス計算と呼びましょう。」</td><td>フィボナッチの方法にふれてもよい。
分配法則を確認する。</td></tr>
<tr><td>文字式の展開や因数分解でもマス計算が使える。
<table><tr><td></td><td>x</td><td>2</td></tr><tr><td>x</td><td>x^2</td><td>$2x$</td></tr><tr><td>3</td><td>$3x$</td><td>6</td></tr></table>x^2+5x+6</td><td>「$(x+3)(x+2)$ の展開にマス計算を使おう。」</td><td>必要なら練習問題を与える。
$(x-3)(x+2)$
x^2+x-6</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>x</td><td>x^2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>-10</td></tr>
</table>
$-3x$
$(x+2)(x-5)$
</td>
<td>「$x^2-3x-10$の因数分解にマス計算を使おう。」</td>
<td>生徒を指名して，黒板でやってもらう。
他の生徒が説明する。</td>
</tr>
<tr>
<td>
マス計算を使って
x^2+2x+3　を平方完成する
<table>
<tr><td></td><td>x</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x</td><td>x^2</td><td>x</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td><td>1</td></tr>
</table>
$2x$

x^2+2x+3
$=(x+1)^2+2$
</td>
<td>「2次関数の式で，
$y=x^2+2x+3$の式を
$y=(x+1)^2+2$
の形に変形する計算を平方完成といいました。
　マス計算を使って，平方完成をする方法について考えましょう。」

「定数に注意しましょう。」</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
$y=2x^2+3x+1$
$=2(x^2+3/2\,x)+1$
<table>
<tr><td></td><td>x</td><td>3/4</td></tr>
<tr><td>x</td><td>x^2</td><td>$3/4\,x$</td></tr>
<tr><td>3/4</td><td>$3/4\,x$</td><td>9/16</td></tr>
</table>
$3/2\,x$
$y=2\{(x+3/4)^2-9/16\}+1$
$y=2(x+3/4)^2-1/8$
</td>
<td>「x^2に係数がある場合を計算します」

「今日はマス計算を使って2次式を平方完成することを学びました。平方完成が苦手だとか，忘れたという人は使うと便利です。」</td>
<td>練習問題を与える。
$y=2x^2+4x+3$
$y=-\frac{1}{2}x^2+4x-9$</td>
</tr>
<tr>
<td>まとめ</td>
<td>「大切なことは，数学の知識は，算数のような基本的な内容を組み合わせることでできているということです。
　このほかにも，今学んでいる数学知識のつながりについて考えてみて下さい。」</td>
<td>時間があれば，一般式
$y=ax^2+bx+c$
$=a(x+b/(2a))^2-(b^2-4ac)/4a$も扱う。</td>
</tr>
</table>

８．授業後のアンケート

佐々木　授業後のアンケート結果　　$\boxed{\text{４０名　中}}$

1.　今日の授業はどのような授業でしたか。次の①～㉔のうち，当てはまるものすべてを選び，〇で囲んでください。

15 名 (38 %) ①何を学習するかが明確な授業だった。

20 名 (50 %) ②説明や解説が中心の授業だった。

20 名 (50 %) ③私たちの理解度を見ながら進めている授業だった。

８名 (20 %) ④話の内容が変わるとき，既習の内容との関連を十分説明してくれる授業だった。

16 名 (40 %) ⑤進行速度が適当な授業だった。

10 名 (25 %) ⑥進行速度が遅すぎる授業だった。

23 名 (58 %) ⑦じっくり考える時間がある授業だった。

22 名 (55 %) ⑧ノートをとる時間が十分にある授業だった。

20 名 (50 %) ⑨先生の指示がわかりやすい授業だった。

31 名 (78 %) ⑩先生の説明がわかりやすい授業だった。

23 名 (58 %) ⑪黒板にかかれた内容がわかりやすい授業だった。

１名 (3 %) ⑫配布資料（資料・プリント・道具のほか，映像も含む）が効果的な授業だった。

３名 (8 %) ⑬友達の意見を聞く時間がある授業だった。

13 名 (33 %) ⑭自ら考えや解決法を発見できる授業だった。

５名 (13 %) ⑮自分の考えを発表できる授業だった。

０名 (0 %) ⑯発言しやすい授業だった。

28 名 (70 %) ⑰予習はしなかったが，よく理解できる授業だった。

１名 (3 %) ⑱予習してきたので，よく理解できる授業だった。

７名 (18 %) ⑲授業のレベルが適切な授業だった。

17 名 (43 %) ⑳説明の量が適切な授業だった。

４名 (10 %) ㉑新しい内容に入る最初の部分が面白い授業だった。

16 名 (40 %) ㉒今までの学習とのつながりがわかる授業だった。

４名 (10 %) ㉓学習の意味や意義がわかる授業だった。

11 名 (28 %) ㉔次の授業が楽しみに思える授業だった。

2.　今日の授業で，わかったことや気付いたことを書いてください。

　　（＊誤字脱字を除き，原文のままです。）

「間違えて，すぐに考え直すようにさせてくださったので，嬉しかった。」

「数学には，いろいろな見方があること」

「ただ１つに“かけ算”といっても１つの解き方だけでなく，まだ知らなかった別の解き方があるんだとわかった。」

「普通のかけ算のひっ算とかでも，今までとは違うやり方がわかり，すごいなと思った。」

「かけ算のひっ算と二次関数は全く別の計算ではなく，関連していることがわかりました。」

「マスに当てはめて計算するので，ミスが少なくなると思った。」

「今まで因数分解や平方完成は，ただ公式に従って解いていましたけれど，今日の授業で，公式をつかわなくても，解けることを知りました。」

「掛け算の計算法を細かく分けて考えると，どこをどのように計算しているのかの意味がわかった。基本の大切さをもっとよく考えた方がいいのではないかと思った。」

「因数分解や平方完成をマス計算という方法で考えることが出来た。」

「かけ算の筆算にはいろいろなやり方があることがわかった。」

「マス計算をすることで平方完成や因数分解が見えてくる。」

「普段とは違った考え方をしてみることで，ちょと変わった感覚になり，おもしろかった。」

「慣れていない分，この新しい解き方は難しく思えた。」

「かけ算の筆算から２次方程式まで幅広く関わっていた内容だった。」

「マス計算　ちがう方法」

「今まできまったやり方でやっていたのに対して，今回の授業は，新しい発想で考えることだったので，発想を変えてみると様々なやり方でできるんだ…と思いました。」

「今までの考えとは違った方法でも，たくさんの問題を解くことができる。」

「そもそも平方完成とは？みたいなことが分かった。筆算がどこからでもできた。」

「マス計算は，『平方完成』にまで関わっていたとは思ってもみなかった。正直他にも関連していることはないか知ってみたくなった。」

「今までやっていた平方完成は別解でのたしかめ算の方法をしらなかったので，もういちどやり直すしか方法がなかったが，今回の授業で『マス計算』を教えてもらったおかげで，別解の方法を知ることができた。」

「今まで自分たちがやってきた数学とは考え方が少し違っていてとても新鮮な内容でした。」

「計算だけでも様々な方法があることを知った。」

「一言で計算と言っても，色々なやり方があるんだとわかった。今後は，色々なやり方を発見し，様々な方法で解いていきたいと思った。」

「もっと問題数を多くしてもよかったと思う。」

「マスにして計算するというのははじめて見た方法でした。」

「筆算の仕方がたくさんあった。フィボナッチさんの解き方はおもしろいと思った。」
「マス計算の使用法」
「違う方法で解くことも可能ということ」
「思わず 1 つの解法にとらわれがちになりますが，他にも考えて工夫することでもっとおもしろく，簡単にすることができることが分かりました。」
「『マス計算』は小学生がよくやる計算方法だと思っていましたが，マス計算で因数分解や平方完成までできるとは思いませんでした。」
「・マスで計算する必要性がかんじられなかった。・マスでも計算できることを知った。」
「基礎に戻って学習出来たことがよかった。」
「なにげなくやっている計算には，意味があることがよくわかった。これからは，どのような計算をしているのか考えたい。」
「因数分解でマス計算ができる。」
「小学校で習った筆算から，中学で習った因数分解や展開，高校で習った二次関数まで，マス計算を利用して考えて，つながりがあるという普段は気付くことのできないことが知れました。」
「自分が今まで学んできた公式等はほんの少しの知識であって，まだまだ自分の知らない驚くべき公式があると気付いた。」

3. 今日の授業で，わかりにくかったことはどんなところですか。自由に書いてください。
「１つもありません。」「ないです。」「特になし。」
「プリントとかで授業したかった。」
「公式の名前の説明がわかりにくかったです。」
「最初の筆算の所で，普段と違うやり方と言われても，あまりピンとこなかった。」
「なぜあの解き方で解く必要があったのか。」
「マス計算とかが複雑になってきた。」
「特にないですが，ますをやったことがなかったので慣れなかったです。」
「わざわざマス計算をする理由がわからない。ふつうにやった方が早い。」
「マス計算の数値代入」
「どうしてマスをつかって計算するかわからなかった。」
「先生はマス→計算の順序でやっていたが，私は計算→マスの順序でしか解けなかった。今になってマスを使って計算するのはムズカシイ。」
「なぜマス計算を使うのか。」
「マス計算をひたすらしただけで結局何を伝えたいのかよくわかりませんでした。」

９．授業記録

Ｔ：(教師)：起立，礼，お願いします。
ＡＳ（生徒全員)：お願いします。

Ｔ：皆さんこんにちは。

Ｔ：こんにちは。

私は誰か知ってますよね。見た事ある人。あれ？それだけか。全員見てると思ってた。まあ，今日は皆さんに，N先生の授業をお借りしてお話をさせてもらいます。決して難しいお話ではないです。皆さんの質問を素直に言ってくれれば，別に試験でも何でもありません。色んな意見を言ってくれれば良いと思います。それでどんな話をするかという事ですが，最初に復習から始めましょう。皆さんは小学校の頃，こんな計算をやりましたよね。掛け算の筆算ですね。これ計算すぐ出来ますね。ちょっとノートを出して，ノート出してください。まあ復習を兼ねて，やってみて下さい。どういう方法をとるのか。はい，まだの人いますか？いませんね，はい。じゃあ，全員出来てるんだな。私はなるべく後ろの人に当てますので，後ろの人，頑張って下さいね。じゃあ，M君。どうなりましたか？

Ｍ：2964。

Ｔ：うん，2964 になりましたね。まあ，皆さんそうなったね。もし出来てなかったらどっかで間違えたかもですが，どういうふうに計算しましたか？どんなふうにやったか，M君，ちょっと説明してくれますか？どういうふうにやりました？

Ｍ：８×８をやって，

Ｔ：うん，８×８をやった。それで，

Ｍ：４が８×８＝ 64 なので，左上に小さく置いて，56 ＋６が 62 だから 62 を下ろす。

Ｔ：64。はい。ありがとう。それから，じゃあ次はどうなりましたか？どうやってやったかという事ですね，Ｙ君。

Ｙ：はい。

Ｙ君，それからこれでおしまいじゃないよね。

Ｙ：３。

Ｔ：うん，今度は３に取り掛かったんですね。３と８をかけて，　８をかけて 24 で，３×８＝ 24。はい。２で３×７で 21 で 23。

Ｔ：うん，23 になったんだね。それでこれを掛けると，足すと，2964 だよね，さっきM君が言ってくれた答えになりました。というんだね。これは全員出来たと思うのね。ただ，皆さん，小学校の時からまずこういう計算をする時はここからこう掛けますね。それでこう掛けます。それから次に，ここから掛ける。それでここ。そういうふうに習いましたね。ちょっと皆さんに聞いてみますが，ここからここって始めなきゃいけないんですか？ここから始めちゃいけないんですか？８とここかけて，ここから始めちゃいけない？あるいは７から始めてみては？どう，良いでしょうか？悪いでしょうか？いけないと思う人？いないね。はい，という事はどこから始めても本当は良いはずだね。ここからやらなければいけない理由はないんですね。じゃあ，皆さん，自分のこれ以外のやり方。ここでも，どこでも。まあここだって，こうじゃなくてこうだというやり方ね。自分の好きな所からやって計算してみて下さい。自分で工夫して。自分はもう向こうからやりましょ。じゃあこうやって，次にこうやって。私はここからやります。それでこ

うなります。自分の好きなようにちょっとやってみて下さい。でも答えは 2964 にならないとどこかが間違っているんですよ。
T：皆さん偉いですね。感心しました。１つやっておしまいではなくて，色々やってますね。１通りだけじゃないですもんね。これは普段の数学の先生の指導でしょう。大事な事ですよね。１つで終わらず，他のやり方はまたないかと，考えて下さい。はい，じゃあ，途中の人もいるでしょうけど，ちょっとそこで止めましょう。それじゃ，別のやり方で出来ましたね，皆さんね。どんなやり方でも良いですけど，じゃあ，Ｋさんはどこからやりました？
K：70 × 8。
T：あっ，ここからやった。70 × 8 からやりました。それで，70 × 8 で，560 でこう書いた方が良いですね。ここ 560 ってこう書いた方が良いよね。この 0 付をけておかないと位が正しいか心配です。70 × 8 で 560。それから？
K：70 × 3。
T：うん。3 をやる。それでこれは 2100 ですよね。それから，
K：8 × 8。
T：うん，8 × 8。8 × 8 = 64 ですね。それから，
K：8× 30。
T：はい，30 で 240 ですか。こういうふうになりましたね。はい。ここからこう掛けて，ここからここ。それでここからここというのですね。これ足して 4 で 6 で 9 で 2964。おそらく皆さんもどうかな？他のやり方もあるかもしれません。そこで結局はこれ皆さんもこれ分かっているように，この 4 つの数を例えばやるんですね。どういう順序で足すかというのはこれは自由なんですね。だから別にここでやるのは 1 つのやり方。それがより良く分かるようにこういうマスにしてみます。こういう表を作ってみます。ここへ 70 － 8 書きますね。それでここで 30 ですね。それでここで出てくる 2100。260 ですか，3 × 8 = 240 と，それから 8 × 8 = 64 ですね。この 4 つの数を出していけるという事なんですね。だからどっからやってっても良い。こっから先，次どこを足す。これも・・・。だたやり方としては何通りある？ 4 の 6 倍で，24 通りだね。それで，こういうふうにマスに書いてみると，この中身の仕組みがちょっと分かるだろうと思いますので，これにちょっと名前をつけましょう。これがマスだからマス計算と呼ぶ事にします。数学は英語で何って言う？知ってる人？数学は何という。知らない。じゃあ，まあこれ英語の時間じゃないですね。マスマティックスと言ういわゆるマス，両方書く。それでこれさっき 24 通りどっからかけても良いんだよと言いましたけども，実は皆さんフィボナッチというのは知ってますか？フィボナッチって聞いた事ある人？ないでしょうね。おそらく 2 学期かな？ 2 学期の後になって数列をやる時に学ぶと思います。フィボナッチ数列という有名な名前が付いてるのがあるんですが，実はフィボナッチという人は，これはいつ頃の人かと言うと 13 世紀なんですね。イタリアの人だったんですが，フィボナッチ数列というのは大変有名なのですが，まあこれ勉強して下さいね。実はフィボナッチ数列でフィボナッチは有名になったわけではなくて，こういう筆算の仕方を初めて西洋

に紹介したんです。インド・アラビア数字と言いましてね，インド・アラビア数字を初めて紹介した。それでフィボナッチはこういうのをどうやったかというと，こうです。まず，３×７＝ 21 でしょ。それで８×８＝ 64 でしょ。ここところを掛けて，ここところを掛ける。考えてみたらここはもう００が付くというのが分かってますから，ここところを先に計算した。後，ここをやらなきゃいけないでしょ。だから，これ掛けますね。タスキ。７×８＝ 56。それから３×８＝ 24。こうやってやってたんです。それでこれで 2964。これはなかなか上手いやり方です。まあこんなふうに色んなやり方があるというのが分かった。これが文字の計算でも同じように出来ますね。例えば，こういうの中学校で習いましたね。ｘ＋３，ｘ＋２，こういう式があります。これを展開しなさいと。こういうのやったね，中学１年生の時ね。それでこれもこのマス計算というこれを使うと結構見やすくなるはずです。こういうのも同じように出来ますよね。これでｘで３でしょ。ここがｘで２ですよね。ここと同じようにかけます。ここはｘ２乗，ここは２ｘ，それでここは３ｘ，ここは２，３そうなるね。さっきのフィボナッチ方式と同じように，ここはまとめられるのかなと思う。そうするとこれ展開すると x^2+5x+6 とこうなる。こういうように使う事が出来ますね。展開と言ったらその逆は何と言う？展開の逆というのは，式の展開の逆というのは何と言うんですか？Ｈ君どうですか？展開の逆って何？

Ｈ：展開の逆？

Ｔ：うん，否定何とかって言うんじゃないのよ？

Ｍ：・・・

Ｔ：因数何とだ。はい，じゃあちょっと忘れちゃいました。後で紹介しましょう。それともう１つ，こんなふうにこれを展開する時に使う法則がありますよね。法則。何とかの法則。色んな数学には法則があります。これ何法則と言いますか？これは何って？Ｓ君。何だと思う？

Ｓ：ちょっと分かりません。

Ｔ：ちょっと忘れちゃった。よし。それも後で紹介しましょう。だんだん後回しになる。誰か分かる人いる？これ何法則だ，何とか法則って言うんだったかなというの。何法則と言うの？

Ｓｔ（生徒）：分配法則。

Ｔ：あー，良く分かったね。分配法則と言いますね。分配法則と言います。この分配法則というのは，すごく大事な法則ですね。なぜ大事かというと，足し算と掛け算の関係を示しているんですね。こういうふうにやりなさいという。よく，小学校の時に足し算と掛け算は，掛け算を先に計算しなさい。どうしてだろう？と思ったかもしれませんけども，これは分配法則が関わってくる法則ですね。そのぐらい大事な法則なんです。さっきの展開の逆は何だったかというのがちょっと残ってますので，これから私が答えを言いましょう。$x^2-3x-10$，これを因数分解して下さい。因数分解します。まとめるのに分解というのはちょっと変な感じするんですよね。私も何でまとめるのに分解なのかは分かりませんが，因数分解します。皆さん因数分解する時に，これ因数分解出来ると思うんですよね。どこを足すんだったか，どこを掛けるんだったかという人もいる

と思うので，さっきのこの表を使ったらどうなるか，ちょっとやってみます。まずこの表でどこが埋まりますか？どこが埋まるか？これちょっと参考にしてね。展開の方をちょっと参考にしてね。どっから埋まるかですね。それじゃあＯさん，まずどこが埋まるでしょうね。

Ｔ：ｘ

Ｔ：ｘが埋まる。ここはｘが入るんですね。ここはx^2があるんだからここは当然x^2が入る。これまあ埋まってるんだよね。他にどうですか？他にＳu君，どうですか？

Ｓu：　－10。

Ｔ：－　10。これもそうだよね。ここはこうなるんだよね。後はすぐにと言われるとちょっと困っちゃうね。じゃあ，後はどうなるのか？つまり，ここはどうだったかと言うと，これを見ますと掛けたものがここにくるんだね。これとこれを最終的に足すんだよね。だから，こことここを足すとこれが－３ｘになってくれないと困るわけね。それで掛けたらこれになる。はい，何が入るかちょっと考えてみて。どうなりますか？Ｎ君。ここは何が入りましたか？何が入りますか？

Ｎ：－２ｘ

Ｔ：２と，そう２が入ると。となるとここは何が入るでしょうかね？いいですか，Ｓｉさん，ここは何が入る？

Ｓｉ：－５

Ｔ：－５が入る。そうするとここが２ｘで，ここが－５ｘだから，足すとー５ｘになるなという事が分かりましたね。これを因数分解すると（ｘ＋２）（ｘ－５）とこういう事になるんだなという事が分かるわけですね。どうでしょう？皆さんこんなふうに因数分解した人は，経験はないかもしれませんが，一応，今日はお付き合いだと思って，このマスの計算を使って因数分解をしてみてもらいましょうか。もう１問ぐらい。じゃあ，x^2＋ｘ－６，これの因数分解ですね。はい，マスを使ってやってみて下さい。はい，じゃあ大体出来ましたか。まず答えはどうなるだろうか？Ｔa君出来ましたか？じゃあ，答えをちょっと言って下さい。

Ｔa：（ｘ＋３）（ｘ－２）。

Ｔ：（ｘ＋３）（ｘ－２）。もちろんこれだけだと皆さんすぐ出来ると思うんですが，このマス計算を使ってやったらどうなったか，それをちょっと教えて下さい。Mi 君かな，Mi 君よろしく。どういうようにやった？

Mi：ｘが。

Ｔ：まずここにｘがくるね。それでｘの２乗。それから，ここへ３。ここへ？次はどうなった？

Mi：・・・

Ｔ：ここへ３書くのね。よっしゃ。それから

Mi：１＋３ｘ。

Ｔ：これ３ｘだね。

Mi：１番右下が－ｘになる。

Ｔ：なるほど。はい。
Mi：上が－２になる。－２ｘ。
Ｔ：という事ですね。他に何かあるっていう人いますか？まあこんなやり方が出来ると思いますね。それで，ここまでは中学校のやった内容です。皆さんは今，高校生ですので，高等学校の内容を何かやりたい。２次方程式の解の公式というのもあるんですが，解の公式は覚えてますよね。あんまり新鮮味がない。まあ私も大学でも教えてて，意外に出来ないのが２次関数ってありますよね。２次関数　$y=x^2+2x$。これだけではなかなかグラフを書く時に困るので，頂点はどこだろう。そういう事を知るためにこういう形に直しますね。（ｘ＋何とか）の２乗とか。こういう形に直すね。こういうの何と言いますか？これ何と言う？Siさんどうですか？こういう形になったら？
Si：平方完成。
Ｔ：平方完成，そうですね。平方完成。それで平方完成にこのマス計算をちょっと応用してみます。それをちょっとこれからまたします。まず，平方完成というのは，どういうものかというのを良く知っていますね。同じものの２乗＋何とか。ここにですね。このマス計算の表をちょっと使ってみましょう。さっきと同じ図をね。ここはまあｘが入る。x^2。これはまあ良いんですよね。それで次にここのここに入る。これがここになるんですね。この同じものでなきゃいけないんですね。それでここへこう計算してこの足した結果がこれがいくらになるの？２ｘ。これは２ｘになる。さっきまでは定数がすぐに出てきましたけど，ちょっとこれ定数は気を付けないといけないですね。公式，方程式じゃありませんのでね。勝手にするという事はありません。慎重にやると。それでまず，今までとはちょっと違うんですね。まず，・・・。ここは同じものが入るんだね。それで同じものがここに来るんだという事です。それで足して２ｘになるという事はどういう事でしょう？ Mu君，ここは何が入る？
Mu：ｘ。
Ｔ：ｘですよね。足してｘだからここはｘが入る。ここにｘが入るという事はここには何が入りますか？ Yo君ですか。
Yo：１が入る。
Ｔ：１が入るんですね。それでここの所は１が入るんですね。だからここは同じものだったらこういうふうに。という事はここへ１が入る。それでここの所は，これは１なんだけども，実際には３ですからね，これね。ここをどうするかはちょっと面倒くさいんですけども，これは本当は１を引いておいたと考えるんですね。それで３となるんですね。ここの所はここの所に同じで１を引いておいてあげればいいんですね。という事は，$(x+1)^2+2$ですね。というふうに使えば良いんだなという事が分かってきますね。じゃあ，ちょっと難しい問題を皆さんにやってもらいます。ちょっとだけ難しくなりますよ。今度は$y=2x^2+3x+1$，こういう式があります。この２次関数の式を平方完成して下さい。はい，こういう課題。それで，まず今までのとどこが違うか。どこが違いますか？

　２がついているんですよね。だから，こういう時はどうするんだ？ Ss さん。

Ss：２を足して。
Ｔ：そうですね。２を外へ出して括るというね。２分の３を持ってくるだね。それで，こうやって括りだしたら，もう後のところは下を入れるだけだね。問題はここ。ここに着目するんだったね。x^2＋　。これをさっきのマスを使ってちょっと考えてみてください。これが平方完成的に出来るか？こうですね。それを皆さんで考えて欲しい。ここはいいんだね。今度はここを足すと，これが２分の３ｘになるんだよ！ということね。はい，それをヒントに，係数にちょっと気をつけてやってみてください。出来たよ！という人は練習。これをちょっと練習して下さい。
はい。分数が出て来たので，ちょっと困ったなあという人もいるかもしれませんので，出来た人はこれをやっていって結構なんですけど，ちょっと困っちゃったなあという人はちょっと見てください。復習しましょう。２分の３ｘね。これは足して２分の３になるんだから，ここに入るものは，３じゃないかな？４分の３ｘになるわけ。ということは，当然ここは４分の３が入るわけ。そうすると，ここのところが 16 分の９になります。ということは，ここのところはこれで終わりじゃないですね。$(x+3/4)^2$　これだったらここまでなんで，定数って習ったね。これを引いとかなきゃいけないね。こうなるんだね。ここまでいい？ここまでが結構問題だね。これで終わったらいけないので，ここから問題だ。まだやっていかなきゃいけませんね。$(x+3/4)^2-9/8$。そうすると，
$2(x+3/4)^2-1/9$。どうでしょう。出来たかな？ちょっと慣れないからね。正直言ってちょっと戸惑いましたっていう人。ああ，いるね。初めての経験だからね。まあ，使い慣れてくればいいと思いますが，ちょっと使い慣れないと難しいかもしれない。じゃあ，最後に，あともう 10 分だね。皆さん，今日やったご意見，アンケートを書かないといけないので，もう１問だけやりましょう。もう１問。どっちやる？両方出来ないんで，どっちやる？１番やりたい人？２番をやりたい人？２番が多いね。なかなか意欲的だね。じゃあ，２番をやりましょう。２番でちょっと皆さんやりましょう。まず，こういうのを見た時は，さっきも言ったように，括らないといけないから，やりましょう。＋　？
aS（ある生徒）：２。
Ｔ：２だったかな？
aS（ある生徒）：－２分の１。
Ｔ：うん。－２分の１だったな。x^2-
aS（ある生徒）：－２ｘ。
Ｔ：これにならないといけないのね。意外にちょっと難しいとこなんだよな。掛けてこれにならないといけないということは，これで割ればいいということですね。これをこれで割ればいいっていうことですね。80 掛けてこれになりますから，割ればいいですよね。これをこれで割ればいいですね。掛けてこれになります。よく間違えるところね。合ってるか，答えを確かめればいい。＋になるなとか，こういうふうにチェックをする癖をつけること。人間はミスを必ずしますので必ずチェックをすること。－３ですね。

ここまできて，ここだけ考える。とりあえず，ここだけ考える。そうですね。問題は何を解こう。単純なところへ，単純なところへ，今までやったところへ，やったところへ持って行く。デカルトの精神ですね。なるべく問題を細かく解っているところへ持って行く。そしたらだんだん面白くなる。じゃあ，ここ。これでやります。こうですね。それで，足してこれが－８になればいいのね。同じものを足して－８になるんだから，Ｈ君。ここに何が入る？

Ｈ：－４ｘ。

Ｔ：そうだね。－４ｘだね。こうなるね。そうすると，当然ここは－４だよ。そうすると，ここの係数は当然４だよ。そうすると次いけますか？やりましょうか？後はどうなるかな？やってみてください。

Ｔ：どうなったかな？答えをちょっと言ってもらおう！出来た人？最後まで出来た人いる？いいよ！はい，じゃあ，Maさん，答えはどうなった？

Ma：－１／２（ｘ＋４）^{2}－１。どうかな，皆さん？これでいいかな？これと同じになった人？いない？違う答えだった人？あれ？答えたくなさそうだね。じゃあ，どこが違う。どこが違ってた？ミスは誰でもあります。こういうことですが，どうやるかと言うと，さっきも言った通りだね。－１／２をやると，ここのところが（ｘ＋４）^{2}。－ 16にしとかないといけないのね。はい，それで一応，私の授業は終わりということで，皆さんにアンケートを取ってもらいますが，時間は後５分なので，出来るところまでで結構です。２枚ありますが，全部やる必要はありません。分かるところだけをやってもらえればいいです。１枚目はちょっとやって欲しいんですけど，２枚目は出来るところまででいいです。それと，皆さん，遠慮せずに何でも書いてもらって結構です。後で「へんなことを書いた」とか，そんなこと全くありませんので，皆さんの名前を書く必要もありませんので，自由に書いてくれたらいいです。２枚トジになっています。もし，このアンケートでよく分からないことがあったら聞いてもらって結構ですよ。

チャイム

Ｔ：はい，それじゃあ，書いているところまでで結構です。集めてください。じゃあ，これで終わります。ありがとうございました。号令！

aS（ある生徒）：起立！礼！

ＡＳ（生徒全員）：ありがとうございました。

Ｔ：ありがとうございました。

10. 研究協議会を踏まえて

・授業のねらいは明確で，生徒も理解したと思われる。
・教師の説明が中心であり，生徒が考える場面は少ない。
・中学校程度の内容なので，高校生には易しかった。
・生徒は通常の公式で平方完成はできるので，他の方法を受け入れる必要はなかった。
・小学校からの指導内容を，１時間だけで指導するのは限界がある。
・カリキュラムとして知識のネットワークをどう形成するかという問題がある。

筆算から文字式の学習へ

佐々木　徹郎
愛知教育大学

わが国の算数科の内容では，「数と計算」の領域が6割以上となっている。その中でも筆算は，大きな部分を占めている。最近は，文化－歴史的意義を強調する意見が多い。また，文字式など「数と式」や代数の内容は，伝統的なものであり，指導も確立されている。ところが，このような結果，生徒が主体的に学ぶ内容になっていない場合が多い。

本稿では，筆算の発展として，文字式を位置づけるための学習や教材のあり方を考察する。わが国の文字式の学習に関する先行研究から，数の世界から文字の世界への発展として，文字式は数パターンの一般化したものとしてとらえることにした。そのために，パターン科学としての数学という観点に注目した。

特に，Wittmann(2004)にある乗法九九の表から，筆算そして，2 次方程式へと一般化される数のパターンは，そのような観点を具体的に例示したものである。このような本質的学習場における児童・生徒の学習軌道を分析する方法論を示した。

１．はじめに

わが国の算数科の内容では，「数と計算」の領域が6割以上となっている。国際的に見ても，これは，わが国の算数教育の特徴である。その中でも，整数の筆算は多くの部分を占めている。

筆算の役割は，2桁以上の数計算を実行することであり，これを速く正確に行うことが，学習目標とされてきた。これは，「計算力」と呼ばれるものの大部分を占めてきた。ここれが「基礎学力」と見なされることもある。

しかし，日常生活でも電卓を使用している現代社会の中で，筆算を学習する意義が問われている。筆算無用論もあれば，脳の活性化や「頭が良くなる」といった「形式陶冶論」まである。最近は，むしろ文化－歴史的意義を含め，その意義を強調する意見が多い（柴田録治，2005;町田彰一郎，2005)。さらに，何よりも多くの生徒が高等学校の「数学Ｉ」まで履修している現実において，筆算は文字式や代数の学習基盤としての意義が重要である。

他方，文字式など「数と式」や代数の内容は，伝統的なものであり，その指導も確立されている。ところが，このような結果，生徒の学習は，硬直したものとなっている場合がある。つまり，主体的に学ぶ内容になっていないのである。

本稿では，筆算の発展として，文字式を位置づけるための学習や教材のあり方を究明するための第一歩とする。

２．文字式の学習の先行研究

文字式や方程式の学習についての研究は，わが国では，進んでいる分野の一つである。それらは，大きく3つのグループによるものである。　まず，藤

井斉亮(1992)や杜威(1991)等の筑波大学関係者である。藤井(1989, 1992)は,「認知的コンフリクト」という着想を導入することにより,「できる」ことの背後にある理解を顕在化させ,生徒の理解の実態をとらえようとしている(1989, p.21)。また,ミスコンセプション(誤った思いこみ)を同定し,教科書や指導の実態を踏まえて,その背景を分析している。

また,杜(1991)では,不均衡や操作モデル,操作システムの概念によって,文字式の学習における子どもの認知構造を究明し,均衡化のための文字指導の在り方を示している。このように,Piaget流の認知心理学の成果やR.R.Skempなどの理解モデルなどを踏まえて,調査の事例研究やインタビューの発話分析による方法論がとられており,構成主義の先進的研究に,その特徴がある。

國宗進・熊倉啓之(1996), 國宗進(1997)や,小関煕純(1987)等のグループによる研究である。「図形の論証」についての研究成果を踏まえて,「中学生の文字や文字式についての理解の様相を明らかにし,それに関する発達を促進するための学習指導について検討(1997, p.161)」している。そして,指導の実態や調査,検討に基づいて,「文字式の基本的な内容についての理解に関する発達水準」を次のように設定した。(1996, pp.39, 40)

それは,4つの水準からなり,「計算」から「表現」「読式」,「変数」へと理解が進むものとなっている。

水準0　すべてできず,理解もしていない。

水準Ⅰ　「計算」だけできる

水準Ⅱ　「計算」と「表現」「読式」ができる。

水準Ⅲ　「変数」を理解している。

さらに,「文字式による論証」に着目し,「文字式による論証能力に関する発達水準」を設定している(1996, p.45)。そして,これらの成果を踏まえた授業研究を行っているのも特徴である。

大阪数学教育研究会(1987)は,分数などの数概念と文字式など文字概念への把握の様相を明にしている。特に数から文字への抽象化において,割合,比と比例などのアイデアが重要な役割を持っていることを示している。また,変数概念の重要性を指摘している。これらは,豊富な調査データを多変量解析などの手法を用いて分析した結果の蓄積によるである。

海外では,C. Kieran(1992)など,多数の研究がある。これらの研究は,三輪辰郎(2001)によって「文字式の指導に関する重要な諸問題」としてまとめられている。最近では,L. Radford(2001)の研究が注目される。

３．数パターンの一般化としての文字式

算数と代数,あるいは数概念と文字概念というように,数の世界と文字の世界の関係についてはいくつかの議論がある。中には,「代数から算数へ」という逆説的な教育思想もあった(C. Gattegno, 1974;平林一榮, 1987, p.362)。しかし,統計的調査などに顕れる子どもの学習過程には,数から文字へ抽象化がある。大阪数学教育研究会を指導した北川如矢(1987)は,次のように述べている。

《文字の世界は数の世界から切り離された別世界にあるのではなく,熟した数の世界を背景にして存在しているということである。すなわち,熟した数の世界の基盤の上に文字の世界が構築されているということである。特に,数の世界の中でも“分数に表現される割合・比(比の値),培概念”に関わる

内容は，学習系統上，数から文字への発展の過程での重要な関門ともいうべき位置づけにあり，多面的かつ抽象的な概念を内包する分数の“意味の理解”や“数としての抽象化の体得”が文字への学習に多大の影響をあたえている…。(p.57)》

つまり，成熟した数の世界を基盤として文字の世界が構築されるということである。その過程においては，倍や割合などの概念に始まり，分数の意味理解や式を対象として扱うことを体得することが重要だということである。わが国のカリキュラムの系統性からして，このような結果は十分納得のいくものである。

ただし，そのことは数の世界と文字の世界が連続的で，同質であることを示すものではない。Kieran(1992, p.392)は，数の世界の特徴を「手続き的(procedural)」と呼んでいる。これは，数から数を導き出す計算のことである。また，文字の世界の特徴を「構造的(structural)」と呼んでいる。これは，数ではなく式の演算の集合である。

このように両者の間に質的差異があることは，明らかである。藤井(1989, 1992)や杜威(1991)の研究結果にあるミスコンセプションや不均衡は，そのような状況における学習の結果だからである。

そこで問題となるのは，数の世界から文字の世界へと質的に発展させる学習要因は何かということである。それは，式という観点からは「操作の対象化(Cobb, Boufi,McClain, Whitenack(1997)」あるいは「方法の対象化(平林，1987)」と見ることができる。また，國宗(1997)にあるように，「表現」「読式」の活動など，さまざまな要因がある。つまり，その要因にはさまざまな側面があるのである。

ここでは，数パターンの一般化として文字式をとらえるという観点から，考察を進める。

４．パターン科学としての数学

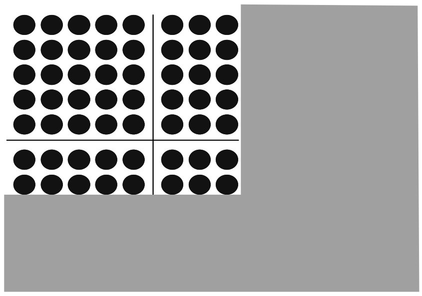
文字式は，数の性質を一般化したものととらえることができる。実際，「一般化」とは，「記号の対象化」であり，「記号は対象の性質を手に入れる」からである(岩崎・山口，2000)。そして，その過程の中では数のパターンに着目することが重要である

パターン科学としての数学という視点は，Wittmann(國本景亀訳，2005)が強調している。

《パターンの科学として数学を捉える見解は，純粋数学と応用数学の関係を明確にするのにもたいへん役立つ。パターンは数学的構造の表現と結びついており，それは２重の性格を持っている。…現実の問題状況が数学的活動に対する視点や可能性をますます制限していき，解決においてその結末を迎えるのに対して，特殊な意味から解放された数学的対象との理論的取り組みはますます広がっていく。(S. 15, 16)》

例えば，数の式は，現実的問題の計算におけるパターンから作られたものである。それによって，現実の問題は解決される。また，数の式のパターンから文字式が作られるのである。それによって，形式的な演算が可能となる。

それでは，文字式が数パターンの一般化である観点で，筆算から文字式への過程はどのようにものだろうか。その例は，Wittmann(2004)が，2004年11月奈良教育大学において行った「九九表から2次方程式の解法まで」という講演の中で示した。その概要は次のようなものであった。



7× 8 = 25 + 15 + 10 + 6 = 56

図 1

乗法表（九九表）の構成において，2 の段や 5 の段等がまず作られる。それから，7 の段である。例えば，7 × 8 を求めるとき，図 1 のように，4 つの部分に分割して，それぞれの積を求めて，それらを足す。これは，児童にとっては無意識ではあるが，分配法則の始まりである。

次に，かけ算の筆算である。その仕組みは，図 2 のように，十の位と一の位に分割して，それぞれの積を求め，それらを足す。これは，九九表と同じパターンの演算である。

かけ算の筆算

$$\begin{array}{r} \bullet\ \ 24 \\ \times\ \ 38 \\ \hline 32 \\ 160 \\ 120 \\ 600 \\ \hline 912 \end{array}$$

	30	8
20	20×30	20×8
4	4×30	4×8

図 2

このような分配法則は，文字式にも同じパターンで適応される。図 3 のように，例えば 2 次方程式　$x^2-6x=7$　を完全平方式によって，解く場合にも利用できる。

$x^2 - 6x = 7$

•	x	–3
x	x^2	–3x
–3	–3x	

•	x	–3
x	x^2	–3x
–3	–3x	9

$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$

$x^2 - 6x + 9 = 16$

$(x-3)^2 = 16$,　$x - 3 = \pm 4$

$x = 7$, $x = -1$

図 3

両辺に加る定数は，－ 6 の 1/2 を 2 乗した数であることが分かる。

Wittmann は，まとめとして，ICME 2 における R. Thom の全体講演から，次のような表 1 を示して，3 つの言語を比較した。これは，現実的な数の問題から代数へと発展するときの特質を，言語に着目して述べたものである。

その言語とは，自然言語，幾何言語，代数言語である。これらを，意味（meaning），形式性（formal precision），文法性（regularity of the synta x ）である。自然言語は，例えば木のように，その意味はわかりやすいものの，形式性は非常に低い，また文法も乏しい。これと対極にあるのが代数言語である。これは，例えば，方程式のように，意味は分かりにくいものの，形式性や文法性は高い。それらを仲介している言語として，幾何言語の意義がある。

	意味	形式性	文法性
自然言語（「木」）	非常に高い	非常に低い	乏しい
幾何言語（「円」）	高い	普通	普通
代数言語（「方程式」）	非常に低い	非常に高い	非常に豊か

表 1

このように，筆算から文字式や方程式の計算へと発展する過程を，具体的に例示していくことは，重要である。実際，筆算が代数の学習へとどのように一般化するのか，また中学校や高等学校の数学が，生徒が算数において学んだ「数のパターン」をどのように一般化したものかは，十分に示されていないからである。

５．筆算から文字式へ

筆算の手続きである筆算形式は，計算の対象が数から文字式へと変わっても，かなりの部分そのまま引き継がれていく。しかし，そのことよりも重要なことは，Wittmann（2004）が示すように，計算における数のパターンである。例えば，足し算の筆算における位取りの原理は，図 4 のようなディーンズブロックで示される。ここでは，幾何言語が使用される。

このような学習は例えば，図 4 のように，「3 の倍数の特徴は，各位の数の和が 3 の倍数である」理由を考える際に生きてくる。つまり，百や十のブロックから 3 の倍数を引いていくと，図のように一つずつのブロックが余る。残ったこれらのブロックが 3 の倍数かどうかで，元の数が 3 の倍数かどうかが分かるのである。このときの数 234 は量としての数ではなく，むしろ変数としての役割を負っている。これは，「擬変数」と呼ばれるものである。

足し算の筆算から擬変数へ

- 「3の倍数の特徴」
- 「243 が, 3の倍数である理由」

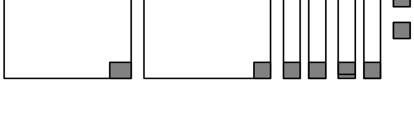


図 4

次に問題となるのは，このような本質的学習場（Substantial Learning Environment; Wittmann, 2001）あるいは，学習軌道（learning trajectory; M. A. Simon, 1995）における子どもの思考を明らかにすることである。そこでは，数パターンの一般化や，代数的な思考の創発（emergent models; K. Gravemeijer, 1999)を観察することである。

このような問題に対する最近の研究は，Radford（2001）によってなされている。この研究は，文化的記号論に基づいている。つまり，2 つの基本的なアイデアである。1 つは，認識の機能は記号の使用と密接に結びついており，影響されているという Vygotsky の思想である。2 つ目は，記号の意味である。つまり，人は記号を使って活動し，この中で考える。その記号は，個人を超えた文化的記号システムの属している。記号は 2 つの役目をもっている。つまり，一方では，個人が認知的実践をするための道具である。他方では，個人を超えたシステムの一部であり，その中で，社会的現実は対象化される。(pp. 240, 241）

Radford（2001）は，このような理論的基礎に基づいて，教室での活動や代数記号における一般化を，文化人類学的方法で，生徒の対話を記述し，分析している。

６．おわりに

本稿は，数パターンの一般化としての文字式をとらえるために，筆算から文字式の学習についての一般化の例を，先行研究から調べた。

文字式の学習については，構成主義的な立場での研究は，わが国では進ん

でいる。しかし，記号の認識的機能を重視する Vygotsky の思想に基づいた文字式の学習に対する研究は少ない。このような観点を含めて行くことにする。

謝辞：高知大学の國本景亀　教授には，Wittmann (2005)を初め，教科書 "Das Zahlenbuch　『数の本』”や『美しい算数練習帳』のわかりやすい翻訳を頂いた。また，PME（国際数学教育心理学会）を中心に活躍する Radford（2001）の研究の重要性について教えていただいたのは，上越教育大学の岡崎正和　助教授である。感謝申し上げる。

日本語文献

岩崎秀樹・山口武志 (2000). 一般化の過程に関する認知的・記号論的分析,『数学教育学論究』, Vol.75, 第 82 巻, 臨時増刊, 日本数学教育学会.

大阪数学教育研究会（編著）(1986).『分数・文字式を教えるということ』, 明治図書.

國宗進（編著） (1997).『確かな理解をめざした文字式の学習指導』, 明治図書.

國宗進・熊倉啓之 (1996).　文字式についての理解の水準に関する研究,『数学教育学論究』, Vol. 58, 第 74 巻, 臨時増刊, 日本数学教育学会

柴田録治 (2005). 教材としての九九の歴史的研究　（その８）　－ Cajori にみられる Fibonacci 評価の考察－,『第 38 回　数学教育論文発表会論文集』, 日本数学教育学会.

杜威 (1991).『学校数学における文字式の学習に関する研究　－数の世界から文字の世界へ－』, 東洋館出版社.

ビットマン, E./ミューラー, G./シュタインブリング, H., 國本景亀・山本信也（訳）(2004).『算数・数学授業改善から教育改革へ』, 東洋館出版社.

平林一榮 (1987).『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版社.

藤井斉亮 (1989). 認知的コンフリクトによる理解の分析と評価　－方程式・不等式を具体的題材として－,『数学教育学論究』, Vol. 53, 第 71 巻, 臨時増刊, 日本数学教育学会.

藤井斉亮 (1992). 児童・生徒の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査,『数学教育学論究』, Vol.　58, 第 74 巻, 臨時増刊, 日本数学教育学会.

町田彰一郎 (2006).「乗法指導の歴史的・Base Model 的考察　－２１世紀型新教材の開発に向けて－」, 第 38 回　数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会.

三輪辰郎 (2001). 文字式の指導に関する重要な諸問題,『筑波数学研究』, 第20号, 筑波大学数学教育研究室.

REFERENCES

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., Whitenack, J.(1997). Reflective Dis-course and Collective Reflection, Journal for Research in Mathematics Education, Vol.28, No.3, 258-277.

Gattegno, C. (1974). *The Common Sense of Teaching Mathematics*, Educational Solutions.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, *Mathematical Thinking and Learning,* 1(2), pp. 155-177).

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on*

Mathematics Teaching and Learning, NCTM, 390-419.

Radford, L. (2001). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis, *Educational Studies in Mathematics* 42: 237-268.

Simon, Martin A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from constructivist perspective, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.26, No.2, pp. 114-145.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing Mathematics Education in a Systemic Process, *Educational Studies in Mathematics, 48*, 1-20, Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. Ch. (2004). From the Multiplication Table to the Solution of Quadratic Equations, the lecture in Nara University of Education.

Wittmann, E. Ch. (2005). Eine Leitlinie fuer die Unterrichtsentwicklung vom Fach aus: (Elementar-) Mathematik als Wischenschaft von Musters, *Der Mathematik-unterricht, Jahrgang 51・ Heft2/3*, 5-22. 國本景亀（訳）「数学の授業を開発するための主要方針：パターン科学としての（初等）数学」

数の性質についての指導

－整数の性質を生かして－

四　方　敏　幸

奈良県立奈良高等学校

１．分野・校種・学年・科目

分野　　数式分野

校種　　高等学校

学年　　３年　理系

科目　　数学の総合演習として

２．小中高校種間の接続について

小学校では，数について自然数と０の整数から出発して，分数，小数と拡張し，中学校では，負の数の導入と文字式の学習を中心とするとともに，実数の世界まで拡張する。高等学校では，実数を基盤におく数学が展開され，方程式の解と関係して複素数まで学ぶ。また，整式の四則演算まで，代数的扱いも広がる。この拡張された数の世界から，再び，原点の整数を見直してみることは，数を深く「わかる」ことにつながるとともに，獲得した代数的方法の有効性を実感することになる。本授業では，そのような数の体系を見直すとともに，整数の性質を生かして課題を解決するための代数的方法を基本から学び，発展的に利用できるように学習することを試みる。

３．本時の授業でわかってほしいこと

本時は，数学Ⅲまで学習してきた生徒が，これまでの学習を総合的に活用して数学の課題を解決するとき，常にどの数の範囲で考えているのかを意識し，特に，その数として整数を取り上げ，その性質を理解し，生かして課題の解決に当たることができるようにしたい。具体的にまとめると次の通りである。

ア．整数が離散であるという基本的な性質から条件を満たす整数が限定されることがわかる。（概念・原理・法則）

イ．整数の性質を生かして課題の整数が成り立たせる条件を式にすることができる。（表現・処理）

ウ．条件を満たす整数の選び方に整数の性質がどのように使われているかがわかる。（思考・判断）

４．わかる授業の工夫

今回の実践のねらいの１つは，高校数学の学習をほぼ終わる生徒が総合的に数学の課題を解決するとき，課題の前提となる数の範囲を常に考慮して，その数のもつ性質を理解し，うまく利用しながら課題の解決に生かしていく力を身につける指導方法の改善を試みることである。

また，もう１つは，その学習の方法として他者の解答の分析・添削を取り入れることである。通常の学習方法として，単に問題を解いて答え合わせをするだけでなく，他者の解答や文章を分析・添削することを取り入れると，その考え方や内容のよさに気づいたり，不十分な部分を確認することができて自分自身の理解を深めることができることがある。この経験を実際に生徒自身がすることで学習内容の理解を一層深める方法を考えた。

即ち，３年生の演習の方法として，これまでの「生徒が板書した解答を教員が添削する」といった方法ではなく，指導者が生徒の答案やノートの添削で生徒の力を判断するように，生徒が他の生徒の解答を分析することで，考え方のよさ，不十分な点を見つけることにより理解を深められないかを試みた。

当初は，すべての生徒が授業時間の中で課題を解答し，本人だけが自分の答案かどうかわかるように工夫をした上で答案を交換し，他の生徒の答案を添削する方法を考えた。しかし，生徒の中には自分の答案を他人に見られたくない者もいるので，今回は指導者から解答例をいくつか提示する方法で実施した。

具体的な指導上の工夫は次の２点である。

(1)　展開の工夫

今回，各課題を生徒が自分で解答した後，いくつかの解答例を各生徒が分析し，考え方のよさや不十分な部分を発見することで考えを深められるようにしたい。

(2)　ワークシートの工夫

課題の各解答例の下欄に「使われている整数の性質」「解答例の不十分なところ」「解答例の良いところ」「自分の解答との違い」の項目について書けるようにした。

５．具体的展開

(1)　指導の流れ

学習活動	教師の指導	指導上の留意点
導入 ・数の種類と範囲について確認する。	・これまでに学習した数の種類や範囲について確認しよう。	・数の範囲の包含関係の確認させる。

・因数分解の例 x^4-x^2-6 の因数分解	・因数分解する数の範囲を有理数，実数，複素数と広げてみよう。	・各数の範囲によって因数分解の違いを意識させる。
・前回の校内模試に出題された問題にある整数の性質について ・基本的な整数の性質について	・前回，考えた問題に整数の性質を利用した問題があったが解決できたか。	
・積が６になる２つの整数を考える。 ・$\frac{3}{x}$が整数になる整数xを考える。	・条件を満たす整数が何であるかを考え，また，どうしてかという理由を整数の性質で答えよう。	・整数が離散であることを確認する。
展開 課題１		
・$\frac{18}{x^2-6x+3}$ が整数となる整数xを考える。	・xが満たす条件は何か。 ・条件を満たすxを求めよう。	
・解答例１を示す。 （誤答例。分母が負になることを考えていない例）	・解答例１について，不十分な点，良いところはないか，自分の解答との違う点を考えよう。	・整数になるには$\lvert$分母$\rvert$が$\lvert$分子$\rvert$の約数になることを確認する。
・解答例２を示す。 （正解例。分母を$(x-3)^2-6$ として，xを絞り込む例）	・解答例２と比較し，考えてみよう。	・整数になるためには$\lvert$分子$\rvert \geqq \lvert$分母$\rvert$であることを確認する。
課題２ ・$\frac{3x+4}{x^3+2}$が整数になる正の整数xを求めよ。	・整数であることを意識して理由をしっかりおさえながら解決しよう。	
・解答例を提示する。	・自分の解答ともう一度比較して検討してみよう。	

まとめ ・数学の課題を解決する際に，自分が扱っている数がどんな数なのかをいつも意識する。 ・整数の性質を確認する。	・有理数の性質や実数の性質を生かして解決する課題もあり，これから課題を解決する際，数の範囲を意識して解決しよう。	

生徒への配布プリント１

数（整数）について　　　　　　　　（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

課題１　$\dfrac{18}{x^2-6x+3}$ が整数となる整数x が満たす条件は何か。

また，条件を満たすx を求めよ。さらに，そのとき整数のどのような性質を用いたか。

（解答）

生徒への配布プリント２

課題番号（１）　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　）

（解答例）①

与式の分子が18なので，与式が整数となるには
分母が18の約数である。
よって，１，２，３，６，９，18　のいずれかである。

$x^2-6x+3=1$ のとき，$x^2-6x+2=0$
これを満たす整数 x はないので，不適である。

$x^2-6x+3=2$ のとき，$x^2-6x+1=0$
同様にして不適である。

$x^2-6x+3=3$ のとき，$x^2-6x=x(x-6)=0$

$\therefore x=0\,,6$

$x^2-6x+3=6$ のとき，$x^2-6x-3=0$　不適

$x^2-6x+3=9$ のとき，$x^2-6x-6=0$　不適

$x^2-6x+3=18$ のとき，$x^2-6x-12=0$　不適

以上より，条件を満たす x は　$x=0\,,6$

（使われている整数の性質）

（解答例の不十分なところ）

（解答例の良いところ）

（自分の解答との違い）

生徒への配布プリント３

課題番号（１）　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　）

（解答例）②

与式の分母は，$x^2-6x+3=(x-3)^2-6$ と変形できる。

x は整数なので$(x-3)^2 \geqq 0$ であり，$(x-3)^2$ は平方数なので，$(x-3)^2=0,1,4,9,16,25,36,\cdots\cdots\cdots$

$\therefore (x-3)^2-6=-6,-5,-2,3,10,19,30,\cdots\cdots\cdots$

与式が整数になるには，（分母）$\leqq$（分子）＝18 なので，$(x-3)^2-6$ は，$-6,-5,-2,3,10$ のどれかである。このうち，与式が整数になるのは，$-6,-2,3$ である。

$(x-3)^2-6=-6$ のとき，$(x-3)^2=0$　　$\therefore x=3$

$(x-3)^2-6=-2$ のとき，$(x-3)^2=4$

$\therefore x-3=\pm 2$　　　　$\therefore x=1,5$

$(x-3)^2-6=3$ のとき，$(x-3)^2=9$

$\therefore x-3=\pm 3$　　　　$\therefore x=0,6$

したがって，$x=0,1,3,5,6$

（使われている整数の性質）

（解答例の不十分なところ）

（解答例の良いところ）

（自分の解答との違い）

生徒への配布プリント４

数（整数）について　　　　　　　　　　　　（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　）

課題２　$\dfrac{3x+4}{x^3+2}$ が整数になる正の整数 x を求めよ。また，そのときに用いた整数の性質を述べよ。

（解答）

生徒への配布プリント５

課題番号（２）　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　）

（解答例）

与式が整数になるためには（分母）≦（分子）が

必要であるから　$x^3+2 \leqq 3x+4$

$\therefore x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$

$=(x+1)^2(x-2) \leqq 0$

x は正の整数なので　$(x+1)^2>0$

$\therefore x-2 \leqq 0$　　$\therefore x \leqq 2$

したがって，x は１または２である。

$x=1$ のとき，$\dfrac{3x+4}{x^3+2}=\dfrac{7}{3}$ これは整数ではないので

不適である。

$x=2$ のとき，$\dfrac{3x+4}{x^3+2}=\dfrac{10}{10}=1$

したがって，$x=2$

（使われている整数の性質）

（解答例の不十分なところ）

（解答例の良いところ）

（自分の解答との違い）

(2) 実際の授業の様子

授業は指導の流れにしたがって進めた。最初の数の範囲の認識の例として因数分解を取り上げたが，生徒はスムーズに解答していた。ただ，数の範囲の拡張をこれまでの学習歴に沿って説明してまとめるのに予定より時間がかかった。

また，課題１の学習においては，各生徒が課題１を考えて解答する時間に加えて，それと同じくらいに他者の解答(プリントの解答例①及び②)に対する比較・分析に時間がかかった。その原因は生徒の記入例から次の２点だと考えられる。

① 解答例の考え方が自分と同じ方法であればすぐ理解できるが，そうでない場合に他者の考え方を解答例から読みとるのは難しく時間がかかってしまう。

② 自分の解答と違うことはわかるが，その違いが何から起こっているのかという違いのポイントをとらえるのが難しい。

さらに上記のことから，これまでの授業ではあまり聞かれない質問内容のため，どう発表したらいいか答え方も難しく授業の進み方が遅くなったと考えられる。

そのため予定していた課題２まで進むことができなかった。

生徒が授業中に各課題について書いた内容は以下の通りである。

(ⅰ)課題１の解答例①について，生徒の記入例

(使われている整数の性質)

- 分子が18の分数だから分母を18の約数にすれば与式が整数になる。
- 分母が分子の約数ならばその数は整数。

(解答例の不十分なところ)

- 約数に－１，－２など負の数を入れ忘れている。
- 18の約数は負でもかまわない。

(解答例の良いところ)

- 言葉で説明して書いている。
- 具体的に数を代入して計算している。
- 具体例が書かれているのでわかりやすい。
- １つ１つきちんと結果を書いてある。

(自分の解答との違い)

- 同じ解答だった。
- 言葉でちゃんと説明している。
- 自分の解答には，なぜその x が不適になるのかを詳しく書いていない。

（ⅱ）課題１の解答例②について，生徒の記入例

（使われている整数の性質）

・$|$分母$| \leqq |$分子$|$

・実数の２乗は必ず０以上。

・分母は分子の約数。

（解答例の不十分なところ）

・$|$分母$| \leqq |$分子$|$ とするところが（分母）≦（分子）となっている。

（解答例の良いところ）

・条件に合う整数の個数がとても少なくなっている。

・限定されている。

・同じような方程式を何度も解かなくて良い。

・計算する式が少なくなって便利。

・調べる数が少なくて良い。

（自分の解答との違い）

・発想そのものが違った。

・自分のやった方法よりとても効率的でよい。

・式の数が全然ちがう。

・平方数から絞り込んでいる。

・最初の条件からうまく制限しているところ。

・自分は分子に当てはまる数を全部書き出したのでとても計算が多くなった。

生徒の記入例からわかること

解答例①に対する生徒の分析は，ほとんどは自分の考え方と同じであるが不十分な点があることを見つけている。自分もその不十分な点と同じ解答をしてしまったので，次回注意したいと感じている生徒や今回指摘できたことで理解を深めた生徒もいるようである。

解答例②では，解答例の考え方そのものが生徒の考えにはなかったようで，記入内容を見てみるとそのよさのとらえ方が生徒によって異なった。「便利である」「効率的である」「考え方として面白い」などである。自分との解答との比較からそのよさを感じることはできたようである。

(3) 生徒のプリント記入例

プリント１の記入例

数（整数）について　　（　　）番　氏名（　　　　　　　）

課題１　$\dfrac{18}{x^2-6x+3}$ が整数となる整数 x が満たす条件は何か。

また，条件を満たす x を求めよ。さらに，そのとき整数のどのような性質を用いたか。

（解答）$\dfrac{18}{x^2-6x+3}$ が整数となる整数 x が満たす条件は

(x^2-6x+3) が18の約数であること。

18の約数…0, 1, 2, 3, 6, 9, 18, −1, −2, −3, −6, −9, −18

(i) $x^2-6x+3=0$ のとき

$x=3\pm\sqrt{9-3}$

$=3\pm\sqrt{6}$ ×

(ii) $x^2-6x+3=1$ のとき

$x^2-6x+2=0$

$x=3\pm\sqrt{9-2}$

$=3\pm\sqrt{7}$ ×

(iii) $x^2-6x+3=3$ のとき

$x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$

$x=0, 6$

(iv) $x^2-6x+3=6$ のとき

$x^2-6x-3=0$

$x=3\pm\sqrt{9+3}$

$=3\pm2\sqrt{3}$ ×

(v) $x^2-6x+3=9$ のとき

$x^2-6x-6=0$

$x=3\pm\sqrt{9+6}$

$=3\pm\sqrt{15}$ ×

(vi) $x^2-6x+3=18$ のとき

$x^2-6x-15=0$

$x=3\pm\sqrt{9+15}$

$=3\pm2\sqrt{6}$ ×

(vii) $x^2-6x+3=-1$

$x^2-6x+4=0$ ×

(viii) $x^2-6x+3=-2$

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$x=1, 5$

(x) $x^2-6x+3=-3$

$x^2-6x+6=0$ ×

(xi) $x^2-6x+3=-6$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$　$x=3$

(xii) $x^2-6x+3=-9$

$x^2-6x+12=0$ ×

(xiii) $x^2-6x+3=-18$

$x^2-6x+21=0$ ×

$x=0, 1, 3, 5, 6$

プリント２の記入例

課題番号(1)　　　　　　　　(　)組(　)番　氏名(　　　　　　　)

(解答例) ① 与式の分子が18なので、与式が整数となるには
分母は18の約数である。
よって 1, 2, 3, 6, 9, 18 のいずれかである。

$x^2-6x+3=1$ のとき $x^2-6x+2=0$
これを満たす整数 x はないので不適である。

$x^2-6x+3=2$ のとき $x^2-6x+1=0$
同様にして不適である。

$x^2-6x+3=3$ のとき $x^2-6x=x(x-6)=0$
$\therefore x=0, 6$

$x^2-6x+3=6$ のとき $x^2-6x-3=0$ 不適

$x^2-6x+3=9$ のとき $x^2-6x-6=0$ 不適

$x^2-6x+3=18$ のとき $x^2-6x-12=0$ 不適

以上より条件を満たす x は $x=0, 6$ //

(使われている整数の性質)
18の約数　(分母が分子の約数)

(解答例の不十分なところ)
マイナスの部分を考えていない
約数

(解答例の良いところ)
1つ1つきちんと結果を書いてある。

(自分の解答との違い)
マイナスを考えていないところ。

プリント３の記入例

課題番号(1)　　　　(　　)組(　　)番　氏名(　　　　)

(解答例) ② 与式の分母は $x^2-6x+3=(x-3)^2-6$ と変形できる。
x は整数なので $(x-3)^2 \geqq 0$ であり、$(x-3)^2$ は平方数
なので、$(x-3)^2=0,1,4,9,16,25,36,\cdots$
$\therefore (x-3)^2-6=-6,-5,-2,3,10,19,30,\cdots$
与式が整数になるには (分母) $\leqq$ (分子) $=18$
なので $(x-3)^2-6$ は $-6,-5,-2,3,10$ のどれか
である。このうち、与式が整数になるのは $-6,2,3$
である。
$(x-3)^2-6=-6$ のとき $(x-3)^2=0$　$\therefore x=3$
$(x-3)^2-6=-2$ のとき $(x-3)^2=4$
$\therefore x-3=\pm 2$　$\therefore x=1,5$
$(x-3)^2-6=3$ のとき $(x-3)^2=9$
$\therefore x-3=\pm 3$　$\therefore x=0,6$
したがって $x=0,1,3,5,6$ //

(使われている整数の性質)

整数の2乗は0以上。
分母は分子の約数

(解答例の不十分なところ)

|分母| $\leqq$ |分子|

(解答例の良いところ)

考える数をできるだけ減らすところ。

(自分の解答との違い)

最初に条件をしぼるところ。

６．わかっていることをどのように把握したか。（授業後の生徒へのアンケートによる）

今回は指導方法の改善も目的としていたので，目標に沿ったアンケートを作成し，授業後にその内容について生徒に回答してもらった。以下はその結果である。なお，質問エの項目は今回の授業方法についてのアンケートである。（生徒42人中42人回答）

(1) 結果

ア　整数が離散であるという基本的な性質から，課題の条件を満たす整数が限定されることがわかりましたか。

①わかった	②まあまあわかった	③少しわかった	④わからなかった
42.9%	21.4%	23.8%	11.9%

分析　①と②を合わせると約64%の生徒が「わかった」と回答している。しかし，約12%の生徒は「わからなかった」と回答している。基本的に理解してもらいたい部分でもあり，改善を検討する必要がある。

イ　整数の性質を生かして，課題の整数が成り立たせる条件を式にすることができましたか。

①できた	②まあまあできた	③少しできた	④できなかった
28.6%	35.7%	28.6%	7.1%

分析　質問アとの比較でいうと整数の基本性質の理解に比べて解法としての理解のほうがわかるのかもしれない。

ウ　条件を満たす整数の選び方に整数の性質をどのように使われているかわかりましたか。

①わかった	②まあまあわかった	③少しわかった	④わからなかった
21.4%	52.4%	21.4%	4.8%

分析　具体的に課題の解答例を示していることもあり理解しやすいと考えられる。

エ．今回は解答例を使って学習しましたが，解答例を使うことは学習内容を理解するのに役立ちましたか。

①役立った	②まあまあ役立った	③少し役立った	④役立たなかった
40.5%	28.6%	23.8%	7.1%

分析　これまでにやったことのない学習方法なので珍しさもあったかもしれない。ただ，数人の生徒が「役立たなかった」と回答しており，それが学習内容そのものが原因なのか，または方法が原因なのかを考えていきたい。

(2) アンケートの分析のまとめ

今回の授業で「整数の性質」について，約70％の生徒が「わかった」または「まあまあわかった」と回答している。しかし，数人の生徒が「わからなかった」と率直に回答している。この「わからなかった」理由を次回は調べられるよう学習プリントの改善，アンケートの改善を行いたい。

質問エの結果で「役立った」と回答した生徒が約40％あることから，演習の方法として解答例の分析による学習も，少しは生徒の理解の補助になったと考えられる。

7．授業研究での協議

授業後の協議の中で多くの指導，助言をいただいた。その中で共通していた点をまとめると次のようになる。

(1) 今回の実践の課題

① 授業内容でわかってほしいことが「課題解決のために数の範囲を考える」，「整数の性質を理解する」等豊富であったため，当初の学習指導計画のすべてを進めることができなかった。また，授業のポイントが明確にならなかった。

② 「解答例の分析によって理解を深める」工夫は，指導者側から結果を与えることになり，生徒の自由な考えを制限しており，生徒に親切すぎる。したがって，生徒の解答を題材にして進める方がよい。

(2) 改善していく方策

以上の指導，助言をもとに今回の指導案について改善を行い，次回の取組としたい。特に，次の２点を改善点とする。

① まず，授業の前半で説明していた「数の範囲」について，導入としてもう少し内容を少なくする。また，今回課題を２つ用意したが，実際やってみて１つで十分であった。１つの課題を使って，各生徒の解答時間を十分に確保し，解答例との比較で理解を深めるようにする。

② 授業の最初に生徒を６～７人ずつのグループに分け，その中で検討し合う形態にすると指導者側から解答例を提示する必要はなくなる。また，生徒間で了承の上，解答を提示できる。ただし，他人に答案を見られたくない生徒

もいるので，その配慮をすることを忘れない。

具体的には，課題１を各生徒が解答後にグループ名とペンネームを書かせて，グループごとに回収し，他のグループの解答用紙を受け取って各生徒が他の生徒の答案１枚を担当する。授業の最後に再度回収し，各生徒のペンネームを調べておく。後日，他の生徒の書き込みに不適切なものがないか確認後それぞれの生徒に返却する。

８．改善後の指導の流れの案

学習活動	教師の指導	指導上の留意点
導入 ・数の種類と範囲について確認する。 ・因数分解の例 x^4-x^2-6 の因数分解 ・基本的な整数の性質について ・積が６になる２つの整数を考える。 ・$\frac{3}{x}$ が整数になる整数 x を考える。	・これまで学習した数の種類と範囲を確認しよう。 ・因数分解する数の範囲を有理数，実数，複素数と広げてみよう。 ・条件を満たす整数が何であるかを考え，また，どうしてかという理由を整数の性質で答えよう。	・数の範囲の包含関係を確認させる。 ・各数の範囲によって因数分解の違いを意識させる。 ・整数が離散であることを確認する。
展開 課題１ ・$\dfrac{18}{x^2-6x+3}$ が整数となる整数 x を考える。	・x が満たす条件は何か。 ・条件を満たす x を求めよう。 ・できるだけどのように考えたかわかるように解答しよう。	

・他の生徒の答案を分析する。 ・グループごとに各生徒が自分の受け取った答案の説明と自分の分析を説明する。	・自分の解答用紙にグループ番号とペンネームを書いて交換しよう。 ・プリントの下欄に分析したことを書いてみよう。 ・自分の解答との違う点を考えよう。 ・各生徒の発表が終ったらグループごとに整数の性質の整理をしよう。	・全員の解答用紙を回収し，各グループごとにまとめ，別のグループに配り，各生徒が自分以外の答案を受け取るようにする。
まとめ ・数学の課題を解決する際に，自分が扱っている数がどんな数なのかをいつも意識する。 ・整数の性質を確認する。	・有理数の性質や実数の性質を生かして解決する課題もあり，これから課題を解決する際，数の範囲を意識して解決しよう。	・各生徒の答案を回収（他の生徒のコメントが不適切でないかを確認後，次回の授業でペンネームをもとに各生徒に返却する。）

生徒への配布プリント

数（整数）について　　　グループ（　　）　ペンネーム（　　　　　　　　　）

課題１　$\dfrac{18}{x^2-6x+3}$ が整数となる整数 x が満たす条件は何か。
また，条件を満たす x を求めよ。さらに，そのとき整数のどのような性質を用いたか。

（解答）

上の解答についてのコメント　　　　　　　ペンネーム（　　　　　　　　　）

（使われている整数の性質）

（解答例の不十分なところ）

（解答例の良いところ）

（自分の解答との違い）

１次関数と連立方程式の授業
～連立方程式の解による不等関係～

川 内 充 延
葛城市立新庄中学校

１．分野

数量関係（「数と式」領域に関連付けて）

校種　　公立中学校（葛城市立新庄中学校）
学年　　中学校２年
単元　　１次関数

２．小中高校種間の接続：学びの系統

小学校では，ともなって変わる２つの数量について，比例の関係を言葉の式で表したり，表やグラフを用いて調べる活動に取り組んだ。中学校の第１学年では，比例や反比例について，変数と変域，比例や反比例の関係を表す式やグラフの特徴，座標などを学習した。第２学年では，具体的な事象における変化や対応のようすを考察することを通して，１次関数について学習し，関数への理解を一層深めていくことになる。

本時の授業は，単元「１次関数」の最終段階で，これまでの学習内容を総合的に利用するという位置づけとなる。ここでは，２元１次方程式と１次関数の関係を再度取り上げる。自身の授業を振り返ってみたとき，「x，y についての連立方程式の解は，それぞれの方程式のグラフの交点の x 座標，y 座標の組である」に対して，「連立方程式を解いて交点の座標を求める」というようなパターンを教え込む学習に陥っていた。本指導案は，この部分に別の視点を盛り込めないかと模索したものである。２元１次方程式を x と y の関数関係を表す式とみることは，多くの生徒にとって難しいことであろう。そこで，２元１次方程式と１次関数を関係づけるために，具体的な事象におけるグラフの交点にスポットを当てた。

本指導案では，連立方程式を解くことから天秤がつり合う一瞬を求め，その答えを得るという学習の流れを設定している。これは，高等学校の学習内容では「不等式」の単元へ接続されることになろう。現在，中学校では不等式を解くことはないが，そのアイデアは方程式を解くことに付加できないだろうか。未知数というピンポイントを求めることから変数の動く範囲を求めることは，「中高の接続」に関する観点の１つと考える。

３．本時の授業でわかってほしいこと

本時の授業でわかってほしいことは，次の通りである。

> 「ある事象の変化のようすについて考察する方法を知る」
> ア　ある事象の変化のようすについて，表，式，グラフを用いて表現できることを確認する（これまでの学習内容の復習）。
> イ　ある事象の変化のようすについて，連立方程式の解をもとにした不等関係を知る。
> ウ　ある事象の変化のようすについて，等関係と不等関係という２つの側面から捉えられることを知る。

４．わかる授業の工夫

(1) 教材の工夫

教材の工夫として，次の４点が挙げられる。

・本時の学習への興味づけ及び動機づけを行うために，天秤の動きを模擬的に実演するための黒板提示物をつくった。
・ワークシートには天秤のイラストを入れ，常に天秤の動きを意識させるように配慮した。また，授業のポイントとなる部分を空欄にし，生徒に書かせるようにした。さらに，書き込む箇所には記号を入れ，授業者の指示が容易に通るようにした。
・１つ目の課題では表をつくることで解決できる数値を，２つ目の課題では式やグラフを利用することで解決しやすくなる数値を設定した。
・「生徒がわかったこと」を評価するために，生徒が本時の学習内容に類似する例をつくるというオープンエンドな課題を設定した。

(2) 学習過程の工夫

本校の数学科では，第２学年でのみ，少人数指導（生徒の出席番号が奇数か偶数かによる１学級２分割）を実施している。本時の授業は，男子１１名，女子８名の計１９名からなる学習集団が対象となる。少人数ゆえに，個別指導（対話）を重視し，個々の生徒の考えを学習場面に反映させたい。本時の学習過程では，類似する例をつくる場面で生徒の考えを多く取り上げる。しかし，多くの生徒にとって，単元「１次関数」の学習内容は難しいようである。加えて，例をつくることはオープンエンドな課題であるため，生徒は戸惑い，さらに難しさを感じるかもしれない。黒板提示物を使って変化のようすを実感させながら，表やグラフ上での試行錯誤を促し，本時の目標「ある事象の変化のようすについて連立方程式の解をもとに考察することができる」が達成されることを目指す。

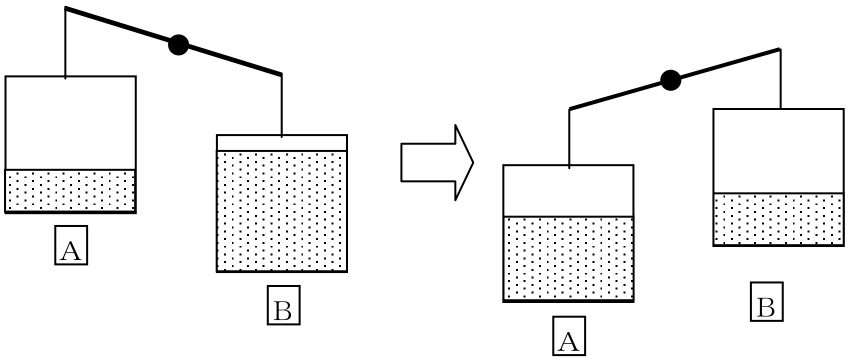
次に，本時の学習過程では，「生徒がある事象の変化のようすをわかるとはどういうことか」を段階的に追っている。下にその観点を挙げておく。

ある事象の変化のようすをわかるとは，

ⅰ）絵や図などからイメージできる　ⅴ）必要な数値をとらえられる
ⅱ）表を用いてとらえられる　ⅵ）変域をもってとらえられる
ⅲ）式化してとらえられる　ⅶ）類似した例をつくることができる
ⅳ）グラフ化してとらえられる

生徒がこの７段階を踏まえ，それらを関係づけて活用することができたならば，わかる授業の高みに到達したと考える。

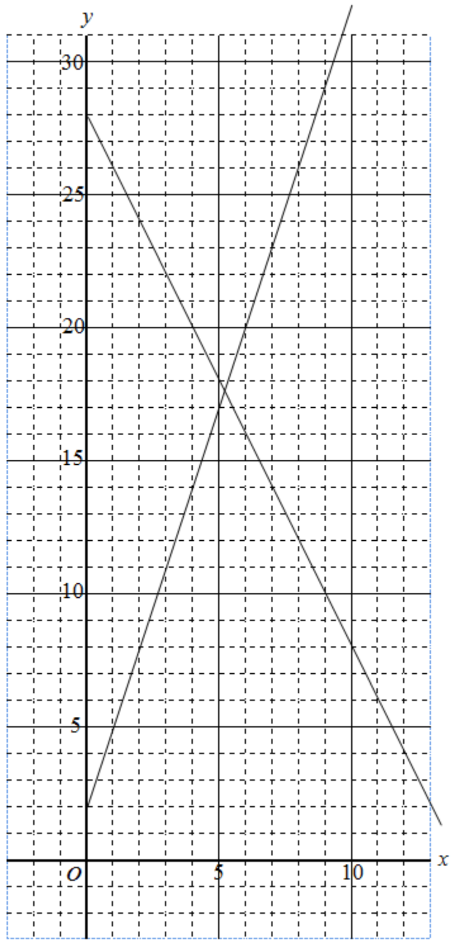
5　具体的展開
(1)　学習指導案

学習のねらい	学　習　活　動	評価及び配慮事項
1　学習課題をつかむ ここに天秤につるされた，２つの水槽Ａ，Ｂがある。 ①　はじめに，Ａには６ℓ，Ｂには２４ℓの水が入っている。Ａには毎分２ℓの水が入り，Ｂからは毎分１ℓの水が出ていく。ＡがＢより重くなるのは，水の出し入れをはじめてから何分後からか。  		・黒板提示物を使って，変化のようすを模擬的に実演する。 ・ワークシート１を配布する。
（１）イメージする	・黒板提示物やワークシートの図から，変化のようすをイメージする。	ⅰ）変化のようすについて，絵や図などからイメージできる
（２）表をつくる	・表を用いて変化のようすを表す。	

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
水槽Ａの水の量（ℓ）	6	8	10	12	14	16	18	20	22	…
水槽Ｂの水の量（ℓ）	24	23	22	21	20	19	18	17	16	…

学習のねらい	学　習　活　動	評価及び配慮事項
	・ＡがＢよりも重くなるのは，水の出し入れをはじめてから６分後からになることがわかる。	ⅱ）変化のようすについて，表を用いてとらえられる
2　学習内容を深める （１）数値を変える ②　はじめに，Ａには２ℓ，Ｂには２８ℓの水が入っている，Ａには毎分３ℓの水が入り，Ｂからは毎分２ℓの水が出ていく。ＡがＢよりも重くなるのは，水の出し入れをはじめてから何分後からか。		
（２）イメージする	・黒板提示物やワークシートの図から，変化のようすをイメージする。	
（３）表をつくる	・表を用いて変化のようすを表す。	

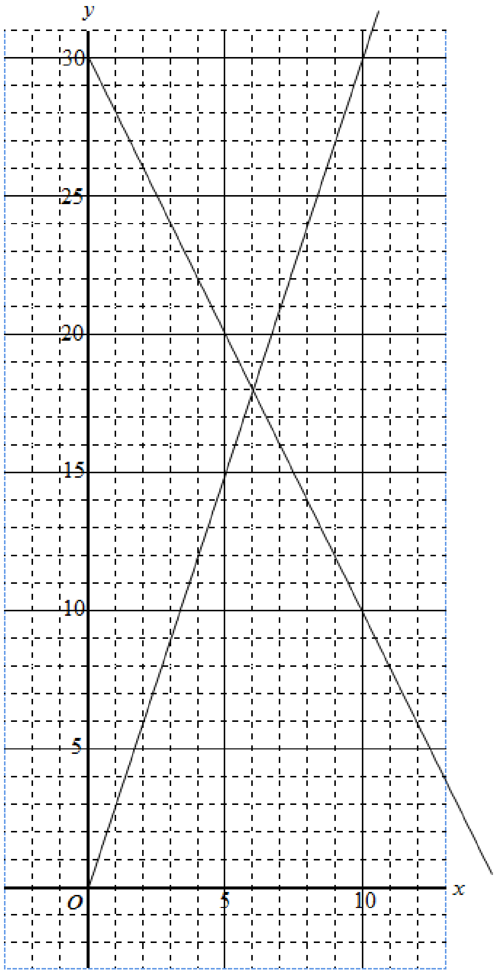
時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
水槽Ａの水の量（ℓ）	2	5	8	11	14	17	20	23	26	…
水槽Ｂの水の量（ℓ）	28	26	24	22	20	18	16	14	12	…

	＊予想される生徒の応答として，「５分と６分の間」が考えられる。	・生徒の状況によっては，課題②以降をグループで取り組ませることも考えられる。
	Aが Bよりも重くなるのは，水の出し入れをはじめてから５分何秒後からか。	
（４）式化する	・x 分後の水の量を y ℓとして， A… $y=3x+2$，B… $y=-2x+28$ を得る。	・AとBの変化のようすについて，x 分後の水の量を y ℓとして，式化を促す。 **・ワークシート１の続き**を配布する。 ⅲ）変化のようすについて，式化してとらえられる
（５）グラフ化する	・AとBの式から傾きと切片を読み取り，それぞれのグラフをかく。  	・グラフを用いて，AとBの変化のようすを再確認する。
	グラフの交点はどのようなようすを表している	
	・その時間に，AとBの水の量が等しいようすを表していることがわかる。	ⅳ）変化のようすについて，グラフ化してとらえられる

（6）必要な数値を考える	・AとBの重さがつり合う時間を求めることで，課題②が解決することに気づく。 ・連立方程式 $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=-2x+28 \end{cases}$ を解き，解 $x=\dfrac{26}{5}$，$y=\dfrac{88}{5}$ を得る。 ・$\dfrac{26}{5}$ 分（5分12秒）後に，$\dfrac{88}{5}$（17.6）ℓでつり合うことがわかる。 ・AがBよりも重くなる（$3x+2>-2x+28$）のは，水の出し入れをはじめてから，$\dfrac{26}{5}$ 分（5分12秒）後からになることがわかる。	ⅴ）変化のようすについて，必要な数値をとらえられる
（7）変域を考える グラフの端の点はどのようなようすを表しているか。	・AとBともにグラフの左端の点は，水の出し入れをはじめる時点と読み取る。 ・Bのグラフの右端の点は，水がなくなった時点と読み取る。また，Aのグラフの右端の点は，水槽の大きさによることに気づく。	ⅵ）変化のようすについて，変域をもってとらえられる
3　学習内容を振り返る（例をつくる） 次の（　　　）には適当な数値を入れ，また《　　　》からはどちらかの言葉を選び，水そうAとBの変化のようすについて調べよう。 水そうA … はじめに(　　　)ℓの水が入っていて，毎分(　　　)ℓの水が《入る・出る》 水そうB … はじめに(　　　)ℓの水が入っていて，毎分(　　　)ℓの水が《入る・出る》		・ワークシート2を配布する（授業の進行によっては，宿題とする)。 ・1つの例を求めることができたら，他の例を考えるように指示する。

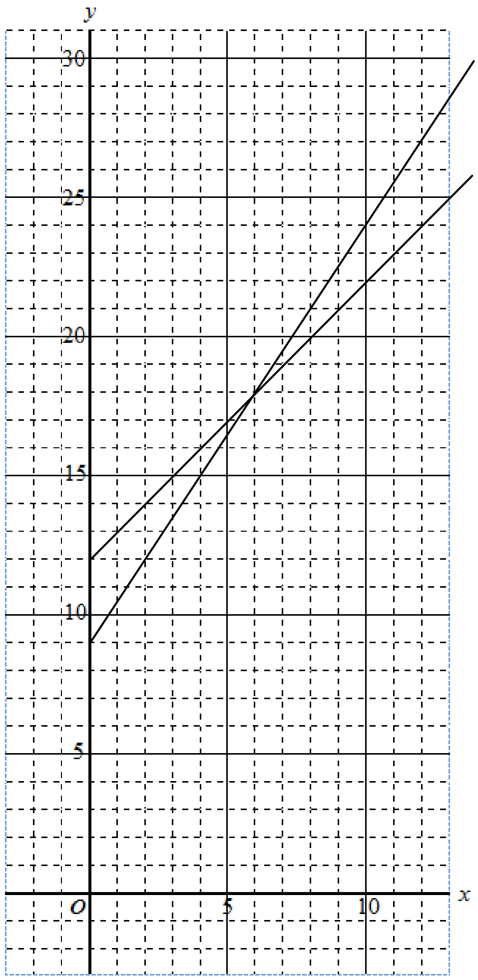
	＊予想される生徒の応答としては，次のような場合が考えられる。 ・グラフを用いることで，他の例に気づく。	・生徒がつくった例を１つでも多く全員で共有する。 ・切片が**ワークシート２**のグラフ用紙上にとれない場合も考えられる。

「一方の水の量が増え，もう一方の水の量が減る場合」



$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -2x + 30 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x > -2x + 30$$

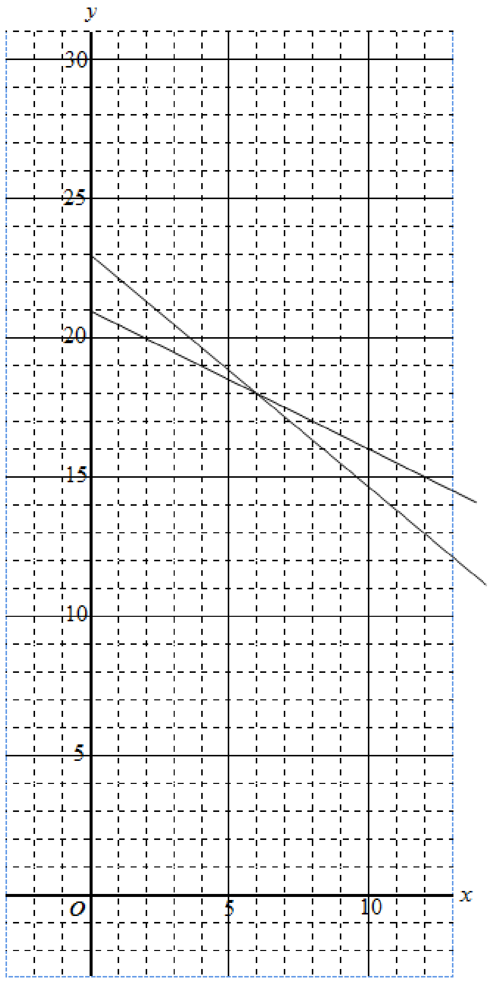
「両方とも水の量が増える場合」

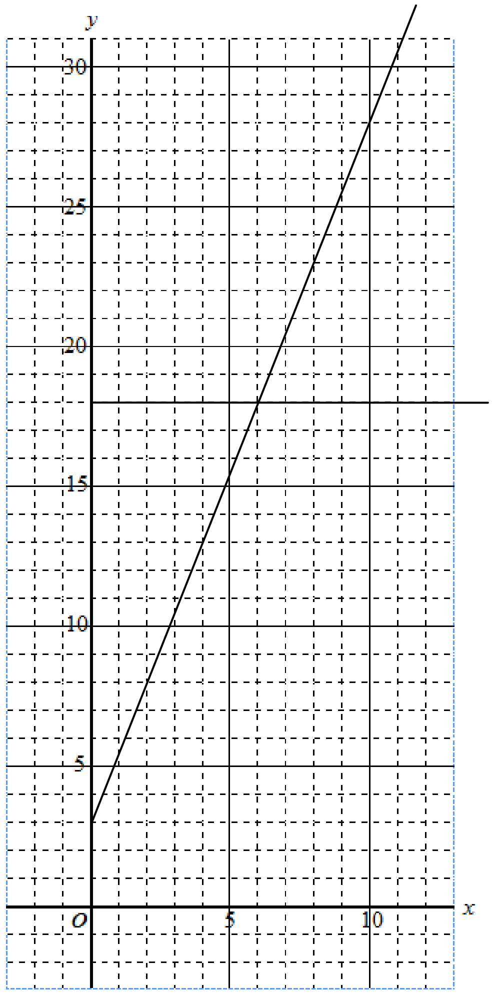


$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + 9 \\ y = x + 12 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x + 9 > x + 12$$

「両方とも水の量が減る場合」

「一方の水の量が一定で，もう一方の水の量が増える（減る）場合」





$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+21 \\ y=-\dfrac{5}{6}x+23 \end{cases} \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{2}x+21>-\dfrac{5}{6}x+23$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{5}{2}x+3 \\ y=18 \end{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{5}{2}x+3>18$$

【数学的な見方や考え方】

vii）変化のようすについて，類似した例をつくることができる

引用・参考文献

『中学数学の授業　［２］文字と式』　銀林浩 監修，榊忠男 著，あゆみ出版，1979 年，pp. 137−146.

(2) 実際の授業の流れと生徒の反応

Ｔ：号令を掛けてください。

S1：起立。気を付け。礼。着席。

1　学習課題をつかむ

（1）イメージする

Ｔ：今日は一つの課題について考えていきます。《**ワークシート１**は各生徒の机上に配布済み》それでは，S2くん，課題①を読んでください。

S2：《課題①を読む》

Ｔ：今読み上げてくれた内容について，模型をつくったので黒板の方を見てください。

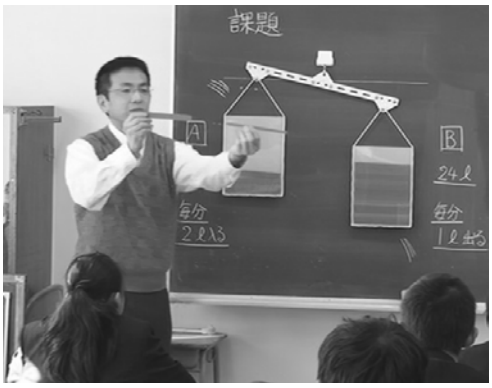


写真１

《模型を使い，水槽Ａと水槽Ｂの水の出し入れのようすを模擬的に実演する（**写真１**）》

そうすると，この天秤はどうなりますか。イメージで答えてください。それでは，S3くん，どうなりますか。

S3：《ジェスチャーとともに》こうなる。

Ｔ：こう？　それでは，こうなるっていうことを黒板の前に来て，実際にやってみせてください。

写真２

S3：《Ｔから渡された細い棒をもって実演する（**写真２**）》

Ｔ：さあ，君らはどういうイメージを持ちますか。まずイメージを持って欲しいので，実際にやってみますね。

《再び模型を使い，天秤の傾き具合が反対になるまで，水槽Ａと水槽Ｂの水の出し入れのようすを実演する》

大丈夫？　イメージ持てた？　イメージが持てたという人は，ワークシートの最初の絵のそばに〇印を打ってください。

（2）表をつくる

Ｔ：それでは，もう少し詳しく調べてみましょう。その絵の下に①の表があります。時間が０分から始まって，１分，２分，３分と時間が経っていきます。水槽Ａの水の量，水槽Ｂの水の量は，どうなりますか。表に表してみてください。今のイ

メージを数字で実感してもらいましょう。そしたら，S4くん，黒板の表に数値を書き込んでくれますか。

S4：《黒板の表に数値を書き込む》

Ｔ：はい，大丈夫ですか。これまで，時間にともなって２つ水槽の水の量が変化する表を作ることはありませんでした。水槽Ａは６リットル初めにあって，２リットルずつ入るから，こんな調子ですね。水槽Ｂは２４リットル初めにあって，１リットルずつ減るからこんな調子です。それでは，この表の意味がわかったという人は，表のそばに〇印を打ってください。結局，水槽Ａが水槽Ｂより重くなるのは，何分後からですか。どのように判断しますか。はい，わかった人，手を挙げてください。

S5：６分後から。

Ｔ：その理由は？

S5：５分５９秒まではＢが重くて，６分になった瞬間に同じになって，６分１秒からＡが重くなるからです。

Ｔ：すごいな。こういう数字の並びで，６分の１秒前とか１秒後とかまで想像できるのですね。はい，要はここを見てくれたということですね。ちょうど１８リットルずつで，天秤が水平になったところ。ですから，６分をちょっとでも過ぎれば，この表で言えば，こちら側の範囲になれば，水槽Ａが水槽Ｂよりも重くなっているので，そのことから「６分後から」ということになります。はい，この６分という意味がわかった人，そのそばに〇印を書いてください。大丈夫かな？　はい，それでは次に，課題②を考えてもらいます。

２　学習内容を深める

（１）数値を変える　（２）イメージする　（３）表をつくる

Ｔ：ここの数字をちょっと変えてみます。まず文章中の括弧内に数字を入れてください。初めに水槽Ａには２リットル，水槽Ｂには２８リットルの水が入っています。水槽Ａには毎分３リットルの水が入り，水槽Ｂからは毎分２リットルの水が出ていきます。水槽Ａが水槽Ｂより重くなるのは，水の出し入れを始めてから何分後からかになりますか。はい，また同じように表を作って考えてみましょう。少し時間をとりますから作業をしてみてください。さあ，今度はどうですか。何分後からか？と言われたら，その表からどう判断しますか。S6くん，黒板の表に数値を書き込んでくれますか。

S6：《黒板の表に数値を書き込む》

Ｔ：はい，表を確認してくださいね。この表を見て，水槽Ａが水槽Ｂより重くなるのは，何分後からになりますか。ワークシートの(ア)という枠の中に，自分なりの意見を書いてください。(ア)という枠の中に，気が付いたことを書いてくれても構いません。何分後からかを求める方法を思い付けば，それを書いてみてくださ

い。課題①の表とは少し違うよね。時間をとりますね。

《約５分間，生徒たちは個別に考える》

Ｔ：それでは，何人かの人に発表してもらいましょう。手を挙げてください。はい，S7くん。

S7：水槽Ａの水の量と，水槽Ｂの水の量を等しくして，等しくなった時の時間をぴったりにする。

写真３

Ｔ：その等しいっていうのは，どのように考えるのですか。どうやって求めるって言った方がいいかな。良い視点だと思います。S7と似たような視点を持っていた人がいれば，手を挙げてください。はい，S5くん(**写真３**)。

S5：６分では水槽Ａの方が多くなっているから，５分と６分の間で水槽Ａが多くなったと考えて，５分Ｘ秒に水槽Ａが水槽Ｂより多くなったと考える。

Ｔ：《課題②の表の５分と６分の間を指し示しながら》ちょうど，このあたりを考えているのですね。S6くんはどのような考えを持っていたのですか。

S6：全く同じです。

Ｔ：今の３人は似たような考えとしてよいのですかね。他にこれに似た考えを持っている人がいれば，手を挙げてください。いろいろ書いてくれている人が，机の間を回っていたら見えるのですが，言葉で説明するとなったら難しいかな。それでは，これとはちょっと違うぞ！という考え方はないですか。S1くん，ちょっと言ってみる？　　　　S1くんは結構な量を書いているので，思い切ってみんなに説明してください。

S1：６分後では１６リットルと２０リットルで，差が４リットルだけど，５分後だと１７リットルと１８リットルで，差が１リットルなので，水槽Ａが水槽Ｂより多くなるのは，５分と数秒なので，５分後からだと思います。

Ｔ：５分後から？　でも，５分の時には明らかに水槽Ａの方が少ないから，５分といくらかというイメージは持てていましたか。《S1，うなずく》S1くんはここの差を見ている点が面白いですね。それでは，他にもいろいろと書いている人がいるのですが，１つの方向でまとめて，課題②を解決していこうかと思います。ちょうど，手を挙げて発表してくれた人のアイデアを生かせるかと思います。これまでの１次関数の単元で習ってきたものを総合して考えていきましょう。《課題②の表の５分と６分の間を指し示しながら》要はここ，ここがどうか？というのを

考えたいのですね。ということで，次のプリントを配ります。

《**ワークシート１の続き**を配布する》

ワークシート１の続きになります。まず一番上の枠囲みの中，(イ)としていますが，その点線部に「何分何秒後から」と書き入れてください。それでは，進めていきますね。先程，机の間を回っている中で，連立方程式という言葉を書いていた人がいました。非常に良い視点なのですが，その後もう１度回ってみた時にはそれが消されていました。ちょっと残念だったのですが，ここでは式を立てることで，解決の方法を見ていこうと思います。

（４）式化する

Ｔ：《黒板提示物を用いながら》このように，ｘとｙを使おうと思います。時間をｘ，その時の水槽Ａの水の量とか，水槽Ｂの水の量をｙで表すことにします。このような関係についての立式は以前授業でやりました。つい最近の期末テストにも出題しました。S8くん，水槽Ａの水の量をｙとしたら，どんな式が立ちますか？

S8：２＋３ｘ

Ｔ：うん。いいですね。《板書した式を指し示しながら》初めに２リットル入っていて，１分間に３リットルずつ増えるから，時間を掛けて足すということですね。はい。次，水槽Ｂについても式を立ててみましょう。S9さん，ここでも同じように水槽Ｂの水の量をｙとすると，どうなりますか。

S9：２８－２ｘ(**写真４**)

（５）グラフ化する

Ｔ：次に，ワークシートのグラフ用紙に，この２つの式のグラフを書いてみましょう。１次関数をやっている時には，表を作ったり，式を作ったり，グラフを書いたりということで変化のようすを調べたりしましたね。ｙ軸方向に長いグラフ用紙ですが，今までと同じように書いてください。

写真４

《約３分間，生徒たちは個別に作業する》

Ｔ：グラフが自分なりに書けたら，黒板と見比べてくださいね。水槽Ａの方は，切片が２，傾きが３なので，ｙ軸の２をスタートに，３／１，３／１という形で傾きをとっていきます。水槽Ｂの方は，切片が28，そして，－２という傾きなので，－２／１，－２／１という調子ですね。はい，それでは確認です。式の意味がわかった人，それからグラフが書けて，その意味がわかった人，〇印を打ってください。これまで君らは，ある事象の変化のようすを見るために，表，式，グラフ

に表して，いろいろとやってきました。今日の授業では課題②を解決するために，それらを総合的に取り上げています。さあ，解決の糸口はS5くん，S6くん，S7くんが言ってくれた，この部分（５分と６分の間の時間）を如何に求めるか？ということですが。君ら３人の中で，何か思い付く人はいませんか。他の人はどうですか。《S6くんがつぶやいていたので》S6くん，声を大きくして。

S6：１リットル何秒で入るかを求めたらよい。

Ｔ：１リットル何秒で入るかですか… 今日の授業の流れからすると，ちょっと遠ざかってしまったな… 式に表して，グラフに表した。S6くん，グラフの交点って何を意味していますか。

S6：同じ量です。

Ｔ：同じ量，それに気が付いたね。他の人はどうですか。グラフの交点は，水槽Ａの水の量と水槽Ｂの水の量が等しい，同じということですね。それでは，このことをワークシートに書き込みましょう。まず，(ウ)の点線部には「グラフの交点」と入れてください。そして，グラフの交点は何を表しているかについては，S6くんがしっかりと言ってくれましたね。はい，(エ)の点線部には「同じ」とか，「等しい」という言葉を入れてください。「何分何秒後から」を求めようとしたら，ここがポイントです。さあ，グラフの交点を求めるにはどうすればよかったですか。S10くん，どうでしょう？

S10：**連立方程式**

Ｔ：そうですね。それでは，ワークシートの計算欄にこの場合の連立方程式を解いてください。そして，「何分何秒後から」まで求めましょう。

《約３分間，生徒たちは個別に計算する》

Ｔ：この連立方程式を加減法で解いている人，または解いた人は手を挙げてください（授業後，ワークシートを点検すると，１１人であった)。代入法で解いている人，または解いた人は？ ２人ですか…(授業後，ワークシートを点検すると，４人であった）それでは，代入法で解いたS4くん，それを黒板に書いてくれますか。

S4：《黒板に計算の過程を書く》

<u>（６）必要な数値を考える</u>

Ｔ：S4くんは，ｘの値から５分１２秒後という答えを書いてくれています。ちょっと説明を加えて

おきますね。まず，２６／５を帯分数にすると，５と１／５となります。次に，１／５分は１２秒なので，水の出し入れを始めてから５分１２秒後に，天秤はつり合うことになります。そして，５分と１２秒後からは水槽Ａが水槽Ｂよりも重

くなります。このグラフで言えば，この交点からこちら側の範囲を考えているのです(**写真５**)。この交点がちょうど５分と１２秒のところです。ここで，
３ｘ＋２＝－２ｘ＋２８と書いてありますが，課題②の内容に照らし合わせると，この＝は＞となり，３ｘ＋２＞－２ｘ＋２８という式が考えられます(**写真６**)。

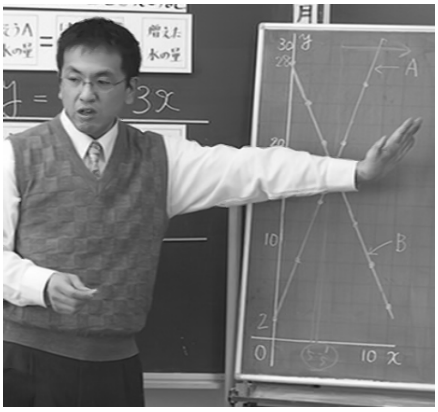


写真５

写真６

ということで，５分と６分の間の時間を求めるために，式を立てて，グラフの交点を利用しました。このグラフの交点というのは，君らから出てきた，水槽Ａと水槽Ｂの水の量が等しいというところです。他にもやりたいことがあったのですが，時間が無くなりました。次の時間にこの続きをやりたいと思います。号令をお願いします。

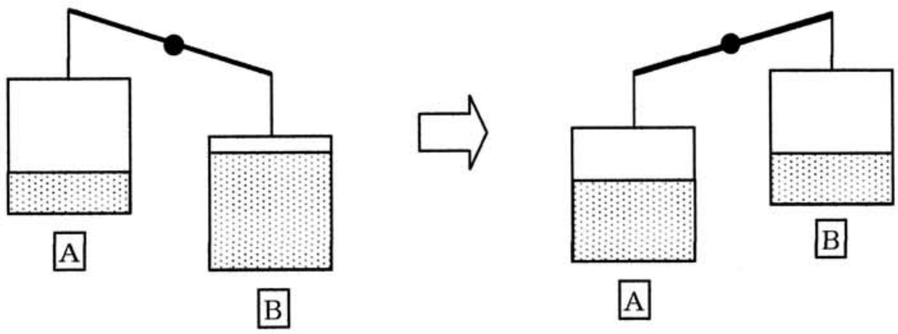
S1：起立。気を付け。礼。

６ 授業で活用したワークシート

／ **ワークシート１**　２年（　）組（　）番　名前（　　　　　　　）

課題　ここに，天びんにつるされた２つの水そうA，Bがある。

① はじめに，Aには6ℓ，Bには２４ℓの水が入っている。Aには毎分２ℓの水が入り，Bからは毎分１ℓの水が出ていく。AがBより重くなるのは，水の出し入れをはじめてから何分後からか。



時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
水そうAの水の量（ℓ）										…
水そうBの水の量（ℓ）										…

分後から

② はじめに，Aには（　　）ℓ，Bには（　　）ℓの水が入っている，Aには毎分（　　）ℓの水が入り，Bからは毎分（　　）ℓの水が出ていく。AがBよりも重くなるのは，水の出し入れをはじめてから何分後からか。

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
水そうAの水の量（ℓ）										…
水そうBの水の量（ℓ）										…

(ア)

(B5 用紙)

(イ)　AがBよりも重くなるのは，水の出し入れをはじめてから ＿＿＿＿＿＿＿＿ か。

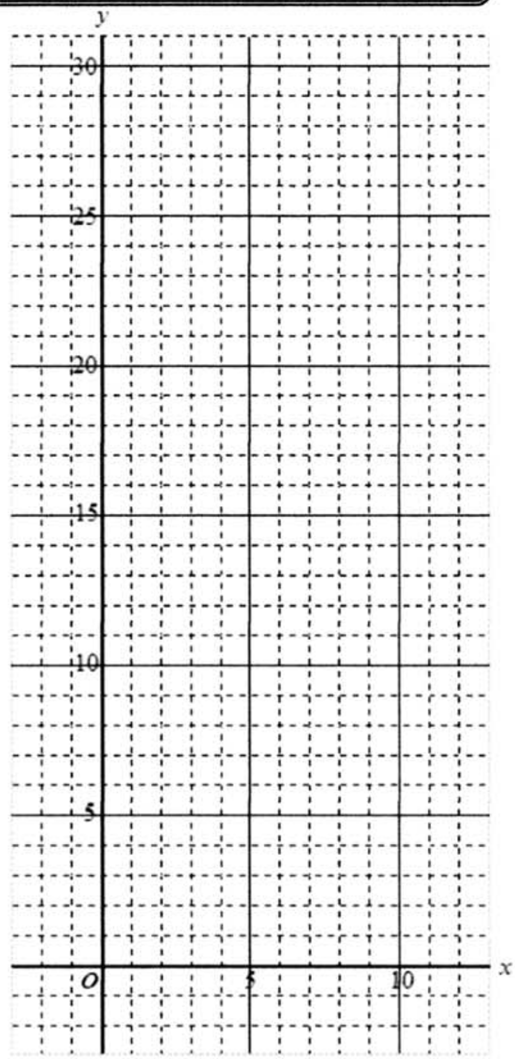
x 分後の水の量を y ℓとすると，

［1分間に入る水の量］×［時間(分)］

水そうAの水の量 ＝ はじめに入っていた水の量 ＋ 増えた水の量

［1分間に出る水の量］×［時間(分)］

水そうBの水の量 ＝ はじめに入っていた水の量 － 減った水の量



(ウ)　＿＿＿＿＿＿＿＿は，どのようなようすを表しているか。

(エ)　AとBの水の量が＿＿＿＿＿＿ようす

計算欄

分　　秒後から

（B5用紙）

／	ワークシート２　2年（　）組（　）番　名前（　）

例づくり１　次の（　　）には適当な数値を入れ，また《　　》からはどちらかの言葉を選び，水そうＡとＢの変化のようすについて調べよう。

水そうＡ … はじめに（　　）ℓの水が入っていて，毎分（　　）ℓの水が《入る・出る》

水そうＢ … はじめに（　　）ℓの水が入っていて，毎分（　　）ℓの水が《入る・出る》

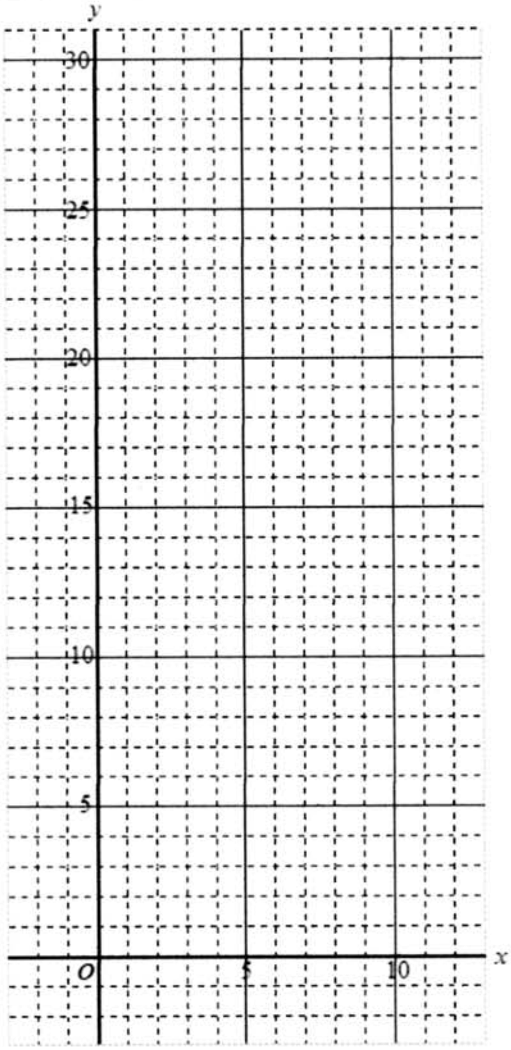
時間（分）	
水そうＡの水の量（ℓ）	
水そうＢの水の量（ℓ）	

x 分後の水の量を y ℓとすると，

水そうＡについての式は，

水そうＢについての式は，

計算など



天びんの動きについて，自分の言葉でまとめよう

例づくり２　次の（　　　）には適当な数値を入れ，また《　　　》からはどちらかの言葉を選び，水そうＡとＢの変化のようすについて調べよう。

水そうＡ … はじめに（　　　）ℓの水が入っていて，毎分（　　　）ℓの水が《入る・出る》

水そうＢ … はじめに（　　　）ℓの水が入っていて，毎分（　　　）ℓの水が《入る・出る》

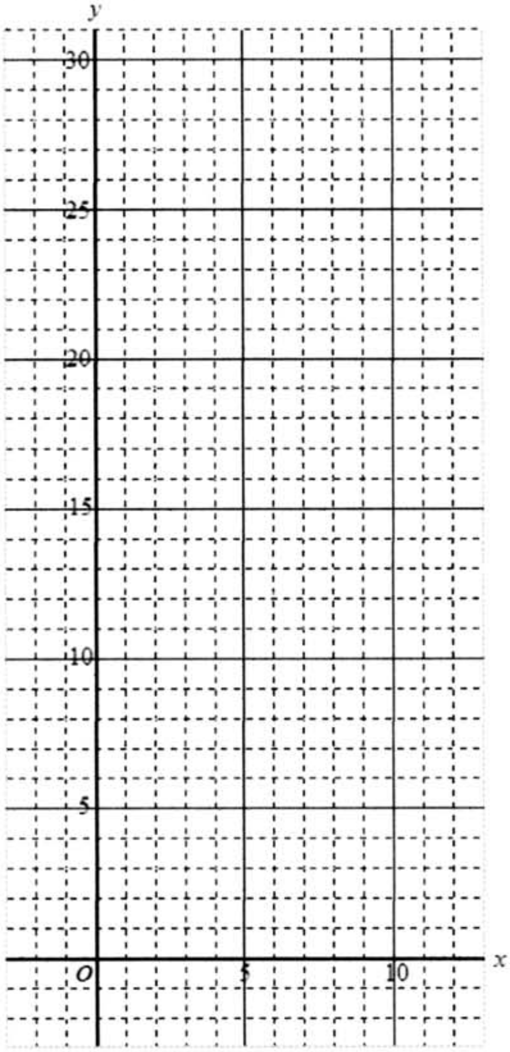
時間（分）	
水そうＡの水の量（ℓ）	
水そうＢの水の量（ℓ）	

x 分後の水の量を y ℓとすると，

水そうＡについての式は，

水そうＢについての式は，

計算など



天びんの動きについて，自分の言葉でまとめよう

ワークシート２については，生徒の試行錯誤による活動を想定して，例を４つまでつくることができるように両面刷り（B4 用紙，表面…「例づくり１」「例づくり２」，裏面…「例づくり３」「例づくり４」）とした。

7 わかっていることをどのように把握したか

本指導案による授業実践は，学校事情により４５分間で行うことになり，「２　学習内容を深める（６）必要な数値を考える」までしか進まなかった。本指導案は５０分授業を想定しており，「３　学習内容を振り返る（例をつくる)」を宿題とする予定であった。しかし，たとえ通常の授業時間であったとしても，２授業時間は必要であった。特に，次の２つの場面については十分な時間を確保し，生徒たちの意見交流を授業の中に盛り込むべきであったと考える。どちらも生徒からの様々な応答が期待され，授業の活性化を促すことができるであろう。

(a) 課題②において表をつくった後，生徒の自由な発想をもって課題解決に取り組ませる場面

(b) 本時の学習内容を振り返る際の例をつくらせる場面

本指導案による授業実践は，授業を公開したクラスを含め，２クラスで行った。対象となった生徒数は計３４名となる。ここでは，授業の活性化を促すには，生徒たちがこれまでの学習を踏まえて「わかっていること」を表現する活動が要となるという立場に立ち，生徒たちのワークシートへの記述をもとに，(a)と(b)の場面における「わかっていること」について考察する。

(a)の場面について　※ワークシート１(ア)より

この場面では，生徒たちが「これまでの学習を踏まえて，課題解決へ向けた糸口をわかっているか，さらに課題解決の方法をわかっているか」を捉えようとした。生徒の記述には，授業中の生徒の発言（７(2) 実際の授業の流れと生徒の反応）の他に，取り上げられなかった考えが多くあった。その一部を次に挙げておく。

《課題解決へ向けた糸口に関する生徒の記述》

・Ａの水そうとＢの水そうの５～６分の間の時間を考える。
・ＡとＢの水の量が同じになるのは，５分と６分の間。
・５と６の間に５．５を入れて，計算してみる。
・５と６の間に何か新しく数字を入れる。
・Ａは２０秒に１ℓ入る。Ｂは３０秒に１ℓ出る。５分と６分の間。
・水そうＡは，６０(秒)÷３で２０秒に１ℓ水が入ることがわかる。水そうＢは，６０(秒)÷２で３０秒に１ℓ水が出ることがわかる。５分２０秒後の時は，ほぼＡＢが均等だと思う。グラフや式で表すこともできる。
・水そうＢは毎分２ℓずつ出るので，３０秒では１ℓしか出ないので１７ℓになります。対してＡの水そうは毎分３ℓずつふえるので２０秒で１８ℓになります。だから５分３０秒にはＡの水そうの方がおもくなるということです。

・３０秒でAには１．５ℓ入って，Bからは１ℓの水が出ていく。５分３０秒のとき，Aは１８．５ℓ，Bは１７ℓになっている。５分３０秒より前にAはBより重くなっている。

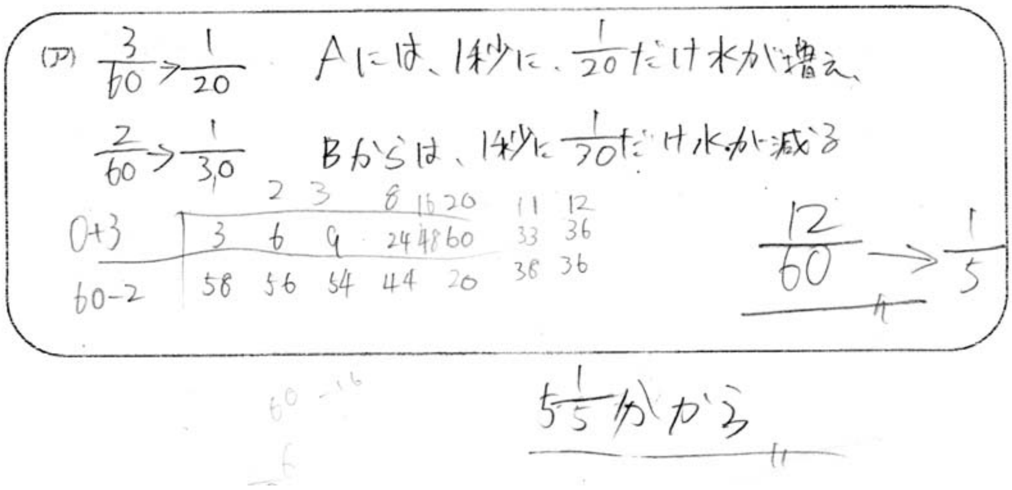
・ｙとｘを使って式であらわしてもとめる。

・水そうAをｘ，水そうBをｙとして，グラフや連立方程式で表すと出てくると思う。

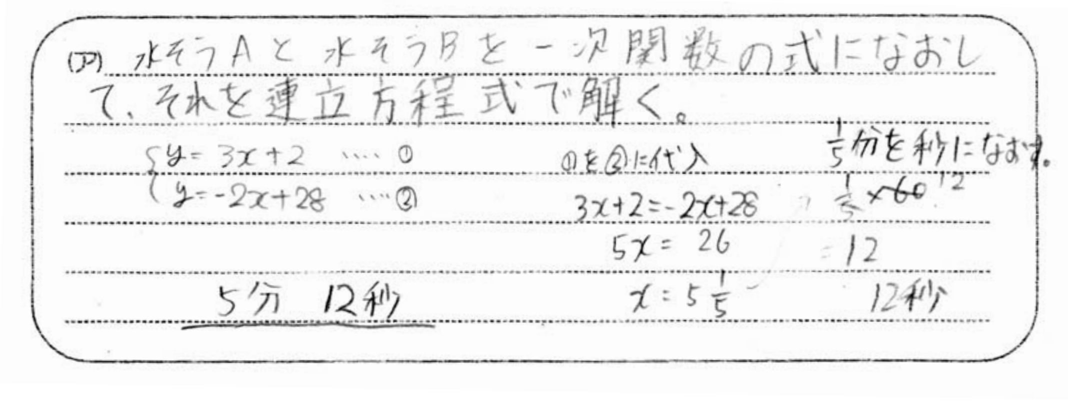
・水そうのAの水の量が５のときは５＝３ａ＋ｂ，Bの水の量は２６＝－２ａ＋ｂで連立方程式で解いたら解ける。

《課題を自力解決した生徒の記述》

（算術的解法）



（代数的解法）



課題解決へ向け，１９人（５６％）の生徒が何らかの糸口を記述している。また，課題を自力解決した生徒は２人（６％）で，算術的な視点と代数的な視点がそれぞれ１つずつ示された。この結果から，授業者は(a)の場面において机間観察をきめ細かく行い，各生徒の「わかっていること」を全体の場で表現させることで，その「わかっていること」を紡いでいくような立場をとるべきであると考えられる。

(b)の場面について　※**ワークシート２**より

本時の目標は，「ある事象の変化のようすについて連立方程式の解をもとに考察することができる」であった。この目標を生徒たちが達成しているかどうかを判断するために(b)の場面を設定している。本指導案を２授業時間分とするならば，２時間目に前時の復習を行った後，生徒に例をつくらせることになろう。評価の観点は次の通りである。

	Ｂ（おおむね満足できる）と見られる状況
数学的な見方や考え方	「ある事象の変化のようすについて連立方程式の解をもとにした考察」に関する例を１つつくることができる。

※Ａ（十分満足できる）と見られる状況
　例を２つ以上つくることができる。

※ Ｃ（努力を要する）生徒への支援
　表やグラフの読み取りを丁寧に振り返り，変化のようすを実感させる。

結局のところ，今回の授業実践は２授業時間を費やした。例をつくる活動は宿題にせず，２時間目に行った。適切な例と判断できた生徒の記述について，その一部を***生徒の記述 1～6***（次頁，次々頁）として挙げておく。なお，Ａと評価した生徒は<u>１６人（４７％）</u>，Ｂと評価した生徒は<u>５人（１５％）</u>，Ｃと評価した生徒は<u>１３人（３８％）</u>であった。ただし，Ｃと評価した生徒のうち<u>６人（１８％）</u>は，表，式，グラフ，連立方程式の計算及び解まで記述していた。

本指導案による授業実践では，ＡまたはＢと評価した生徒が<u>２１人（６２％）</u>であった。また，Ｃと評価した生徒の中にも，あともう少しでＢと評価できる生徒が<u>６人（１８％）</u>いた。これらの生徒数を合わせると，全体の<u>８０％</u>にあたる。この割合は，本指導案を修正することで，多くの生徒にとって「わかる授業」となり得ることを示唆するものであろう。さらに，「３　本時の授業でわかってほしいこと」の中で示した，ある事象の変化のようすをわかるための観点のうち，「ⅰ）絵や図などからイメージできる」「ⅱ）表を用いてとらえられる」「ⅲ）式化してとらえられる」「ⅳ）グラフ化してとらえられる」について，授業実践の中で生徒の自己評価を実施した。そのやり方は，ワークシートのそれぞれの項目に対して，わかれば○印をつけさせるものであった。すべての項目に○印をつけた生徒は<u>２６人（７６％）</u>であった。このうちの<u>１９人</u>が適切な例をつくることができ，ＡまたはＢの評価となっている。ＡまたはＢと評価した生徒が全体では<u>２１人</u>であったことから，本指導案では生徒に例をつくらせること（**ワークシート２**）が，生徒の「わかっていること」を把握するための１つの方法であると考えられる。

12/4 ワークシート２

例づくり１　次の（　　）には適当な数値を入れ，また《　　》からはどちらかの言葉を選び，水そうＡとＢの変化のようすについて調べよう。

水そうＡ … はじめに（ 4 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 3 ）ℓの水が《入る・出る》

水そうＢ … はじめに（ 16 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 1 ）ℓの水が《入る・出る》

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
水そうＡの水の量（ℓ）	4	7	10	13	17	20	23	27	30	33
水そうＢの水の量（ℓ）	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7

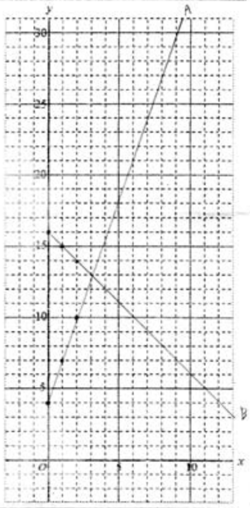
x 分後の水の量を y ℓとすると，

水そうＡについての式は，

$y=3x+4$

水そうＢについての式は，

$y=-x+16$



計算など

$-x+16=3x+4$

$-4x=-12$

$x=3$

$y=-3+16$

$y=13$

$\begin{cases} x=3 \\ y=13 \end{cases}$

A，3分後から

天びんの動きについて，自分の言葉でまとめよう

天びんは，3分ジャストでいっしゅんつり合って，その後A，Bのかたむき方が逆転し，Aの方が重くBの方が軽くなる。

生徒の記述１

12/4 ワークシート２

例づくり１　次の（　　）には適当な数値を入れ，また《　　》からはどちらかの言葉を選び，水そうＡとＢの変化のようすについて調べよう。

水そうＡ … はじめに（ 6 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 7 ）ℓの水が《入る・出る》

水そうＢ … はじめに（ 24 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 1 ）ℓの水が《入る・出る》

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8 …
水そうＡの水の量（ℓ）	6	13	20	27	34	41	48	55	62 …
水そうＢの水の量（ℓ）	24	23	22	21	20	19	18	17	16 …

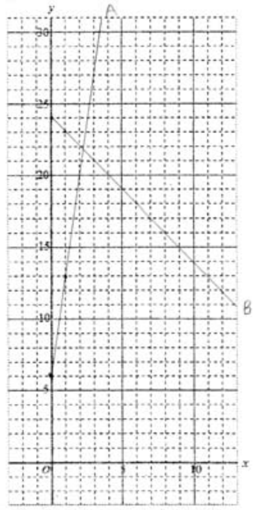
x 分後の水の量を y ℓとすると，

水そうＡについての式は，

$y=7x+6$

水そうＢについての式は，

$y=-x+24$



計算など

$\begin{cases} y=7x+6 \\ y=-x+24 \end{cases}$

$-7x+y=6$

$-)\ x+y=24$

$-8x=-18$

$x=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$

$x=\frac{9}{4} \longrightarrow 2\frac{1}{4} \quad \frac{15}{60}$

$y=7\times(-\frac{9}{4})+6$

$y=-\frac{63}{4}+6$

$y=-\frac{63}{4}+\frac{24}{4}$

$y=-\frac{39}{4}$

2分15秒

天びんの動きについて，自分の言葉でまとめよう

初めはAの水そうが上にかたむき，Bの水そうが下にかたむいた天びんになっているけど，Aに毎分7ℓの水が入ってBには毎分1ℓの水が出ると2分15秒後に天びんのかたむきが逆転する。

生徒の記述２

12/4 ワークシート２

例づくり１　次の（　　）には適当な数値を入れ，また《　　》からはどちらかの言葉を選び，水そうＡとＢの変化のようすについて調べよう。

水そうＡ … はじめに（ 4 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 6 ）ℓの水が《入る・出る》

水そうＢ … はじめに（ 30 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 2 ）ℓの水が《入る・出る》

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
水そうＡの水の量（ℓ）	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	…
水そうＢの水の量（ℓ）	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	…

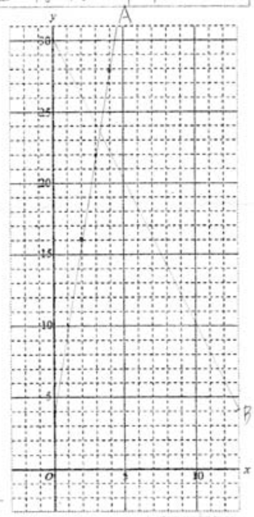
x 分後の水の量を y ℓとすると，

水そうＡについての式は，

$y=4+6x$

水そうＢについての式は，

$y=30-2x$



計算など

$4+6x=30-2x$

$6x+2x=30-4$

$8x=26$

$x=\frac{26}{8}$

$y=4+6\times\frac{26}{8}$

$y=4+\frac{78}{4}$

$y=\frac{16}{4}+\frac{78}{4}=\frac{94}{4}$

解 $\begin{cases} x=\frac{26}{8} \\ y=\frac{94}{4} \end{cases}$

$3\frac{2}{8}$

$\frac{2}{8}=\frac{}{60}$

A，3分15秒後から

天びんの動きについて，自分の言葉でまとめよう

3分15秒後からAの水そうが下へ行きBの水そうが上へ上がる

生徒の記述３

例づくり２　次の（　　）には適当な数値を入れ，また《　　》からはどちらかの言葉を選び，水そうＡとＢの変化のようすについて調べよう。

水そうＡ … はじめに（ 4 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 6 ）ℓの水が《入る・出る》

水そうＢ … はじめに（ 20 ）ℓの水が入っていて，毎分（ 2 ）ℓの水が《入る・出る》

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
水そうＡの水の量（ℓ）	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64
水そうＢの水の量（ℓ）	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40

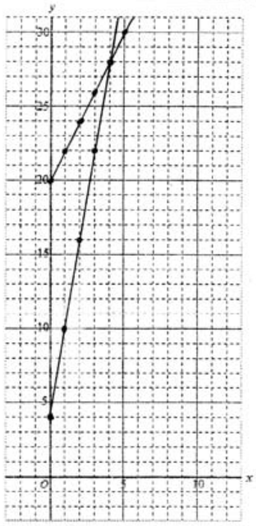
x 分後の水の量を y ℓとすると，

水そうＡについての式は，

$y=4+6x$

水そうＢについての式は，

$y=20+2x$



計算など

$\begin{cases} y=4+6x \quad \text{—①} \\ y=20+2x \quad \text{—②} \end{cases}$

$y=4+6x$

$\times 3\ \ -)\ 3y=60+6x$

$-2y=-56+0$

$2y=56$

$y=28$

$y=28$ を①に代入

$28=4+6x$

$-6x=4-28$

$6x=-4+28$

$6x=24$

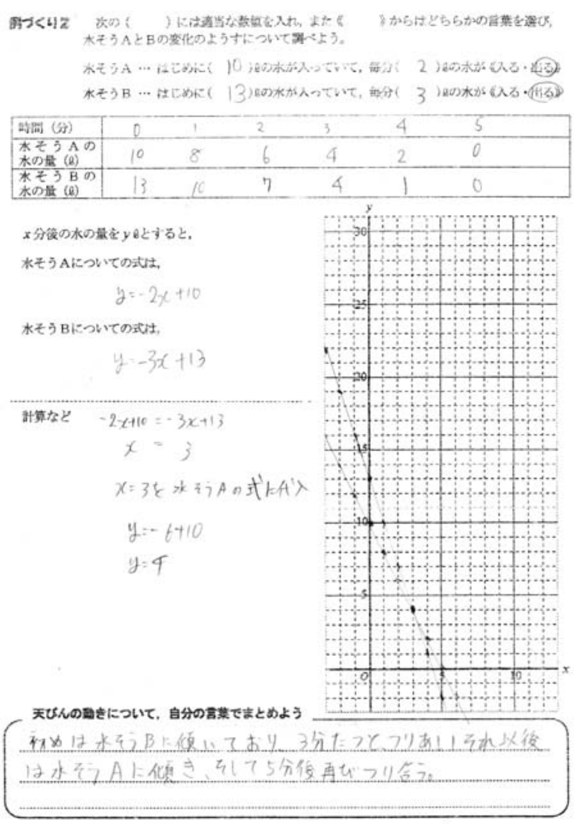
$x=4$

解 $\begin{cases} x=4 \\ y=28 \end{cases}$

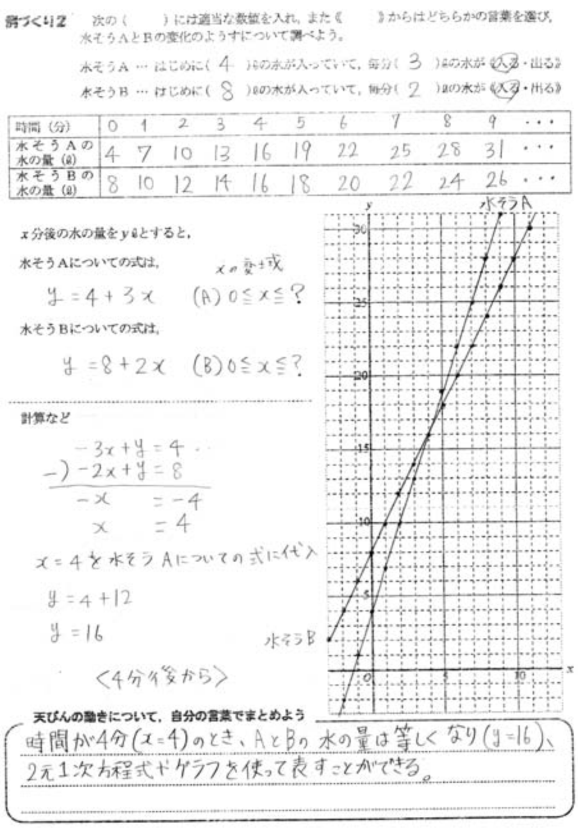
天びんの動きについて，自分の言葉でまとめよう

最初はBの方が重く4分後からAの方が重くなる。

生徒の記述４



生徒の記述５



生徒の記述６

８　本時がわかる授業であったか

授業実践後，授業者と参観者１１名（大学関係者６名，県教育委員会指導主事１名，中高の現職教員４名）による研究協議会を行った。主な論点は，「(1) 授業のねらい（わかる対象）は明確であったか」「(2) 教具（黒板提示物）は効果的であったか」「(3) スモールステップはわかる授業の工夫となり得るか」「(4) 不等関係（中高の接続）の扱いは適切であったか」「(5) 授業の展開はどこまで生徒に委ねられるか」「(6) 生徒に例をつくらせることは，「生徒がわかったこと」の評価として活用できるのか」の６つであった。ここでは，研究協議会の記録（各論点の点線枠内）をもとにして，本時がわかる授業であったかを振り返る。

(1) 授業のねらい（わかる対象）は明確であったか

- この授業の目指すところはどういうところだったのですか。本時の目標には「ある事象の変化のようすについて連立方程式の解をもとに考察することができる」とありますが，それを連立方程式の解で考察するということは何をねらっていたのですか。
- １次関数で総合的ということを前提にすると，わかる対象は内容ではなく，方法であったと思われます。それでは，その方法を次々と示してよかったのでしょうか。それを考え，見つけさせる必要があったはずです。

本指導案では授業のねらい（わかる対象）が明確であったとは言い難い。１次関数の単元末という時期から，これまでの学習内容を総合的に活用させることをねらいの１つとしていた。まずスモールステップで授業を進めることで，これまでの学習内容がわかっているかどうかを確かめようとした。しかし，本時は授業のねらい（わかる対象）が内容なのか，方法なのかが混乱した状況となってしまった。わかる授業を目指す上で，内容と方法の区別をより一層明確にし，方法の示し方についても工夫しなければならないと実感させられた。

(2) 教具（黒板提示物）は効果的であったか

・不等関係を導入するねらいがあるとしたら，良い教具を作ってもらっていて，最初は効果的だったと思います。ある生徒が，ＡがＢより重くということで，「５分５９秒まではＢが重くて，６分丁度ならつり合う，６分１秒からはＡが重い」というのがありましたが，まさに授業者のねらいを表していたのではないでしょうか。そこにもう少し時間をかければ，生徒と先生の間で教具の効果が循環し，変化の様相をつかめたと思います。
・本当なら時間は連続量でないといけません。でも，教具は１分毎の水の量という誘導をしてしまった。だから，秒単位まで言えばいいのかについて無理が生じた。連続量で考えないといけないということにしたいのなら，それはコンピューターで見せた方がよかったのかもしれない。結局，離散量として意識づけたことになってしまったのではないでしょうか。
・教具は現実にはあまりないことについてイメージすることを助けたとは思われますが，後の学習活動のどの部分に結びついたかがはっきりとわかりませんでした。

生徒に時間や水の量を離散量として意識づけたことは否めないだろう。本指導案は不等関係を盛り込みたいがため，現実にはあまりない現象を取り上げた。コンピューターで見せてしまうと，より一層非現実性を高めることが懸念されたため，模擬的な実演ができる今回の教具となった。また，教具を利用して，生徒の様々な考えを学習集団内で共有することは，少人数指導ゆえに実行しやすく，わかる授業の工夫となったであろう。本指導案では，教具は生徒に例をつくらせる時に再び利用することを想定していた。その時，生徒の様々な考えを学習集団内で共有し，わかる授業を目指す上での最終的な段階としていた。

(3) スモールステップはわかる授業の工夫となり得るか

・スモールステップだったから，授業者がイメージしたところしか出なかった。だから，生徒が１次関数の学習内容を総合的に扱えなかったのではないでしょうか。
・スモールステップにして，誘導形式にして，１つ１つ丸をつけるのが「わかる」の過程として見ることができるのでしょうか。それで本当にわかったと言えるのでし

ょうか。スモールステップで何をわかったのか，わからせたいことに集中させることはスモールステップの方が見つけにくかったのではないかと思われます。

・「わかる」というのは，足並みを揃えてゴールすることを考えると難しいです。でも個々の生徒を見て，最終的にそこにたどり着いたらいいのではないでしょうか。「せーの」でわかる必要はなく，個々で時間が違ってもよいのではないでしょうか。

授業の展開をスモールステップにした理由には，(1)で述べた「これまでの学習内容を確かめること」の他に，これまでの学習内容を総合的に扱うという視点から「各ステップ《段階ⅰ）～ⅶ)》を関連づけること」があった。このこともわかる授業の工夫の１つになると考えていたが，授業実践ではうまく関連づけられなかった。ある参観者の方からは次のようなご意見を頂いた。これは，スモールステップを実施する際，その順番が重要であることを示唆するものであろう。

・自分がこの授業するなら，やはり表から進めたいと思いました。今回の授業では，その後すぐに式に移られましたが，関数の値が変わる点を意識させることが大事だったのではないでしょうか。水槽Ａは増えていく，Ｂは減っていくということで，グラフに点をとることは生徒もできますから，イメージは見えてきます。表からグラフという方が生徒にはわかりやすいと思います。そして「重なっている点はどうなっているのか」ということから式につなげた方が，連続（時間，水）を感じ取れるのではないかと。「始めの水の量＋入っていく量」というのを言われたが，入るが「＋」，出るが「－」というのを生徒は抵抗なく受け入れたのでしょうか。グラフを入れる流れだと視覚的にもわかりやすかったのではないでしょうか。

(4) 不等関係（中高の接続）の扱いは適切であったか

・生徒の方では，「１次関数を使って連立方程式で解くと，こういう課題は楽になる」ということがわかればよかった。そうなると，方程式にするために不等式が出てくると，まず迷います。こういうことから，かつて不等式を扱っていたときに，それに反対していたグループがありました。不等式は方程式の解を見つけて左右確認すればよいのだから，等式に直してかけばよいという主張があり，「だから不等式を中学校では扱わなくてよろしい」ということがありました。しかし，方程式にもっていきたいのであれば，不等式にしないと解決できないという問題提示ではなくて，課題が１つでもよかったのではないでしょうか。つり合うということの方が方程式を出しやすいはずです。不等式に触れておきたかったというのは生徒を迷わせたことになります。最後に不等関係をグラフから読み取ることについて触れたのはいいですが，最初に算術的に解かないと解決しない問題をしていることを意識させてしまった。

本指導案では，中高の接続という観点から不等関係を扱ったが，上の参観者の方のご指摘の通り，多くの問題点が浮かび上がった。中学校の学習内容を踏まえると，方程式から不等式へとつなぐこと，あるいは発展させることが自然な学習の流れであり，わかる授業へと高まるだろう。このことは本指導案を修正する際の重要な点となる。

(5) 授業の展開はどこまで生徒に委ねられるか

・自力解決で考えが出る部分で，実際に授業したら何が出るのかということと併せて考えるとどうかと思います。アの考察をかくところに，ある女の子が「３０秒なら…１秒なら…」というのをしていましたけど，先生は「表ではできないから」と言って次にいってしまいました。その生徒からするとできていたはずなのに，流してしまった。生徒によっては表でも解決できたし，式，グラフでも解決できるということで，お互いに刺激して理解を高めていく構成でもよかったのではないでしょうか。

・扱う教材が章の最初の辺りなら，スモールステップでした方がいいのかもしれないですね。今日の場合は１次関数の内容が進んでいて，１次関数を利用するという立場だから，これは時期的には発散してもいいような取り組みではないでしょうか。前半で基礎をするときなら，スモールステップは有効だと思います。しかし，授業を考えようというときには，ひょっとしたら「生徒が主体的に考えて，それぞれ違うことで解決した」というのがあってもいいと思います。１次関数をどう使うかをみたいということでしたが，違いが出て当たり前です。

・全ての子どもが課題①，課題②をそれなりにできるならオープンにして収束することが可能だと思います。でも，２割の生徒しかできないとなると話が別で，２割の生徒のための授業になってしまいます。発散で設計するのなら，８，９割の子ができて，発散収束が可能かなと思います。今日の授業でいうと，課題①で発散して課題②で収束するということでもよかったのかもしれませんが，授業の時間との問題もまた難しいと思いました。

少人数指導なので，普段の授業から発散型の展開を適宜設定したい。しかし，時間的な制約や学習集団によっては生徒の応答があまり期待できない点などがあり，これまで発散型の展開をあまり実施してこなかった。本指導案では，《ⅶ）類似した例をつくることができる》段階で発散型を想定していたが，時間的な制約のため実践できなかった。ただ，生徒がつくった例を学習集団で共有することは，例自体や解決方法の違いから，わかる授業の工夫となり得ると考える。

(6) 生徒に例をつくらせることは，「生徒がわかったこと」の評価として活用できるのか

・わかる授業の評価の中で常に議論になることに，「『生徒の表情を見たりする』とい

うのは主観的ではないか」という意見があります。生徒がわかったというのはそう簡単に確証にはならないです。
・生徒に例をつくらせてみると，その内容から生徒がどうわかったか，どう発想したかを見ることができると思いました。
・例をつくることについて，指導案に挙げられたようなパターンが全部できることでわかったと捉えるのですか。それとも１つや２つでもわかったと捉えるのですか。
・片方が増えて片方減るというのが今日の課題ですが，両方増える，減るという例もありますから，今日の例を出す生徒と違う例を出す生徒では，同じ数の例をつくっても，レベルが違うのではないでしょうか。

生徒がつくった例を評価するには，例の「質的な面」をいかに判断するべきかという課題が明らかになった。生徒がつくる例は扱う題材や授業の展開などに大きな影響を受けると思われるので，その都度検討が必要になるだろう。本指導案では，生徒に例をつくらせることは「生徒がわかったこと」を捉えるための評価方法として適当であったと考える。しかし，すべての学習内容に適用できるものではないであろう。先の検討課題に「適用場面」を加え，実践を積み重ねながら整理していかなければならない。

９　おわりに

本指導案は，「わかる授業」「代数分野」「小中高の接続」という３つの立場に基づいている。さらに，授業実践を行う上で，筆者の勤務校の事情からその対象は中学２年生で，実施可能時期は１１月～１２月という制約があった。このような状況から，１次関数の単元において連立方程式の解による不等関係を扱う題材を設定した。本指導案の発想の出発点は，小中高の学習内容を貫くものとして，「不等関係」を取り上げようとしたところにある。見方を変えれば，「ある変数の動く範囲」となる。例えば，本題材の「水槽Ａが水槽Ｂより重くなるのは，水の出し入れをはじめてから６分後からである」について，「(水槽Ａの水の量) ＞ (水槽Ｂの水の量)」という「不等関係」が現れたり，水の出し入れをはじめてからの時間をｘ分とすると，「ｘ＞６」という「ある変数の動く範囲」が現れることである。小中高の学習内容において「不等関係」または「ある変数の動く範囲」に焦点を当て整理することは，小中高の接続を円滑にするための観点の１つと考えられ，今後に残された課題である。

また，生徒がつくった例を評価するには，例の「質的な面」をいかに判断するべきかという課題が明らかになった。本指導案では，生徒に例をつくらせることは「生徒がわかったこと」を捉えるための評価方法として適当であったと結んだが，すべての学習内容に適用できるものではない。様々な学習場面での実践を積み重ねながら，生徒の『例づくり』を検討していかなければならない。

平行線と線分の比の活用
—紙の３つ折りを通して—

丸井理恵
奈良県生駒市立生駒中学校

１．表題

分野　　幾何
校種　　公立中学校
学年　　３年生
単元名　　図形と相似　　平行線と線分の比の活用

２．小中間の接続

小学校では，比の意味と表し方及び等しい比があることを簡単に学習した。拡大図・縮図については，平成 10 年版学習指導要領では学習しないので注意したい。

中学校では、２年生で基本的な平面図形の性質を見いだし，平行線の性質を基にしてそれらを確かめる。また，三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の性質を確かめる。３年生では，図形と相似の単元で，数学的な意味での拡大・縮小の意味理解を図り，相似の概念を把握させる。そして，相似な図形の性質を学習した後，三角形の相似条件を学習し相似の証明をする。ここでは，既習の合同な図形の性質と関連づけながら合同は相似の特別な場合であると考え，相似について理解させたい。その後，比の性質について学習し，相似な図形の性質から平行線と線分の比の定理を導く。本時は，平行線と線分の比の活用として取り組ませたい。

３．本時の授業でわかってほしいこと

本時は，紙を３つ折りする活動，線分の３等分をする活動を通して，次のことを目標とする。

ア．日常生活の中に数学が利用されていることに気付き，平行線と線分の比の性質を利用し，課題を解決する。(数学的な見方・考え方) イ．線分が等分されていることを，平行線と線分の比の性質を使って筋道を立てて説明することができる。(表現・処理)

４．わかってもらうために配慮したこと

（１）学習過程の工夫

ア．日常生活の中に数学が利用されていることに気付かせるため，題材を日常生活の中にあることに設定する。また，既習の事項を使って問題が解決できることに気付かせるため，図を丁寧にかかせる。

イ．平行線を与え，平行線を用いて線分を等分させることによって，平行線を意識させる。また，図をかかせることによって，どこに着目するのかを図で確かめさせる。このことで，既習の平行線と線分の比の定理に結びつけることができると考えた。

（２）教材・教具の工夫

生徒が主体的に課題に取り組めるように，一人ひとりに紙を用意した。また，黒板での説明がわかりやすいように，透明シートに図をかき，重なりが見えるようにした。題材を日常の課題にし，実際に作業をすることで興味関心をもって課題を追究できると考える。

５．本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，またその特徴

本時の授業は，以下の「わかる授業の項目」にあてはまると考えられる。

項　　目	授業の特徴
「わかる対象の明確化」 ・関心・意欲・態度または価値観 ①面白さ・楽しさ ②有用性（活用・利用） ③意味と必要性，意義	紙を３つ折りする活動，線分の３等分をする活動を通して，課題の解決をする。
・概念・原理・法則 ①仕組み・成り立ち	課題を解決することで，平行線と線分の比の性質の概念を大局的に知らせる。
・思考・判断 ①数学的な見方や考え方 ②有用性（活用，利用） ③考え方の根拠	平行線と線分の比の性質を利用し，課題を解決する。
・表現・処理 ①手順，求め方，解き方，調べ方 ②表し方，まとめ方	平行線と線分の比の性質を使って筋道を立てて説明する
「わかるための工夫」 ・数学的活動の充実 ・子どもの学習活動の工夫 観察・操作の実施	課題追究の際，なぜ平行線を利用すれば線分を等分することができるのかを考えながら，試行錯誤する活動をさせる。
・表現させる （コミュニケーション・発表・討論）	課題解決の際，自分の考えを全体に発表する場を設定する。

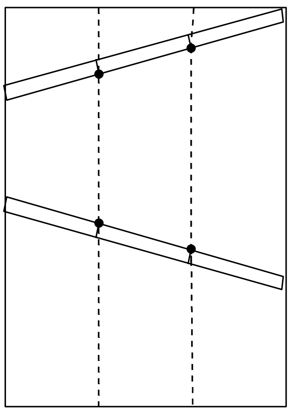
６．学習課題設定の意図

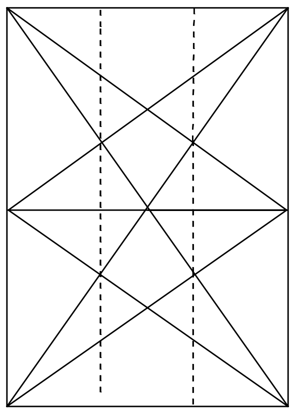
授業では，次の課題を設定した。

課題１　便せんを３つ折りにして封筒に入れたい。同じ幅にきっちり３つ折りにしたいのですが，どのように折ったらきれいに折れますか。 課題２　平行線を利用して，与えられた線分を３等分しよう。

「数学は日常生活に役立たない」と思っている生徒が多いことから，日常生活の中にあることがらで何か生徒の興味・関心をひくものはないか、また，教科書などによくある問題の中で，見方を少し変えれば日常の問題になるものはないかと考えた。その結果，線分をｎ等分する方法は知っていてもその方法が既習の定理と結びついてない生徒が多いことから，線分をｎ等分する方法を課題とすることにした。

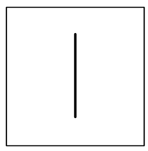
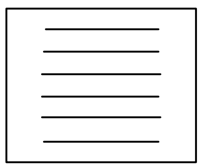
日常生活で線分をｎ等分する場面は，例えばノートの幅を三等分することなどが考えられる。ノートの幅を三等分するには，下図のように定規を使ったり，線分の交点を利用したりする方法がよく知られている。しかし，今回は特別な道具を使わせず「便箋を３つ折りする」という課題を設定した。便箋なので余計な折り目をつけてはいけないという制限をつけることができる。また，定規は使用しないという条件もつけ、便箋だけで課題に取り組み問題を解決させたい。そして，生活の中のことがらが既習の数学の知識で説明できる場合もあることに気付かせ，数学の有用性を味わわせたい。

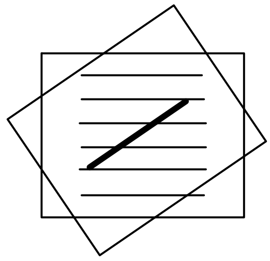
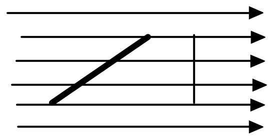
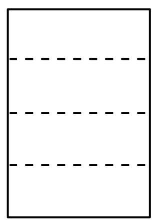




7．具体的展開

(1)　学習指導案

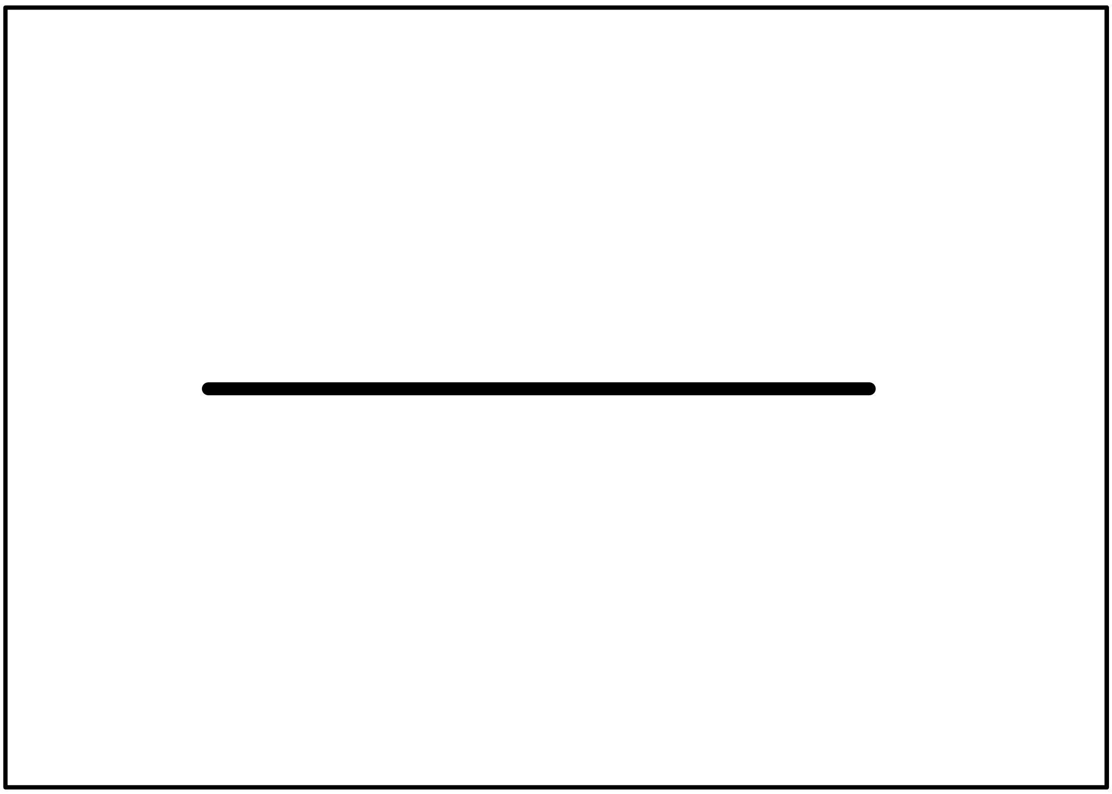
学習活動	教師の指導	指導上の留意点
導入 **課題１** ・課題の把握をする。 **展開** **課題２** ・与えられた線分を３等分する。	 ・便箋を４つ折りにして下さい。 ・次に，便せんを３つ折りにして封筒に入れたい。 ・同じ幅にきっちり３つ折りにしたいのですが，どのように折ったらきれいに折れますか。 ・紙を１枚ずつ渡すのでやってみてください。 ・紙の端の部分にしるしがあれば折りやすいですね。 ・紙の端に着目して，線分を３等分する方法を考えてみましょう。 ・この線分を３等分する方法を考えよう	 ・日常生活での場面設定 ・興味を持たせるように，また，課題を正確に把握させるようにする。 ・長さを測らず折る方法を考えさせる。 ・どこに着目するのかを明確にさせる。 ・線分のみ印刷したプリント配布 
・平行線を利用して考えさせる。 ・３等分する方法の発表をきく。	・このプリントには等間隔に平行線を引いてあります。 ・平行線のプリントを利用して線分を３等分しましょう。 ・方法が見つかった人は，発表してください。	・等間隔に平行線を引いたプリント配布  ・試行錯誤させる。 ・発表された方法で線分が３等分出来ることを確認させ

	・この方法で正確に３等分されているということを確かめましょう。	る。 
・図をかく ・図のどこに着目すればよいのか考える。	・図をかいてください。 ・図のどこに着目すればいいですか。	・正確に図をかかせる。 ・平行線に着目させる。 
・線分が３等分されていることを確かめる。	・平行線と線分にはどんな性質がありましたか。 ・線分が３等分できたことが確かめられましたね。	・平行線と線分の比の性質を思い出させる。 ・線分が３等分されていることの根拠をかく。
課題１にもう一度とりくむ。	・では，もう一度紙を同じ幅にきっちり３つ折りする方法を考えてみましょう。 ・この端を３等分すればよかったのですね。 ・等間隔の平行線は前に使った４つ折の紙を使って下さい。	・課題の再確認をする。 ・紙を４つ折りにした折り目が等間隔の平行線になっていることを確認する。 
・紙の端の３等分点を探す。	・２枚の紙を使って，紙の端を３等分してください。	・試行錯誤の時間をとる。
・３等分する方法の発表をきく。	・３等分点を探せましたか。探せた人は発表してくだ	・課題１と同じ図であることに気づかせる。

	さい。 ・さっきと同じ図になりましたね。	
・根拠の確認をする。	・紙の端の線分が３等分されていることの根拠は何ですか。	・きっちりと３つ折りできることを確認する。
まとめ ・日常生活の中のことがらが，既習の数学の知識を用いて説明できることを確認する。	・紙がきっちり３つ折りできていることが，平行線と線分の比の性質を使えば確かめられましたね。	・線分をコンパスを用いて３等分する課題を与える。

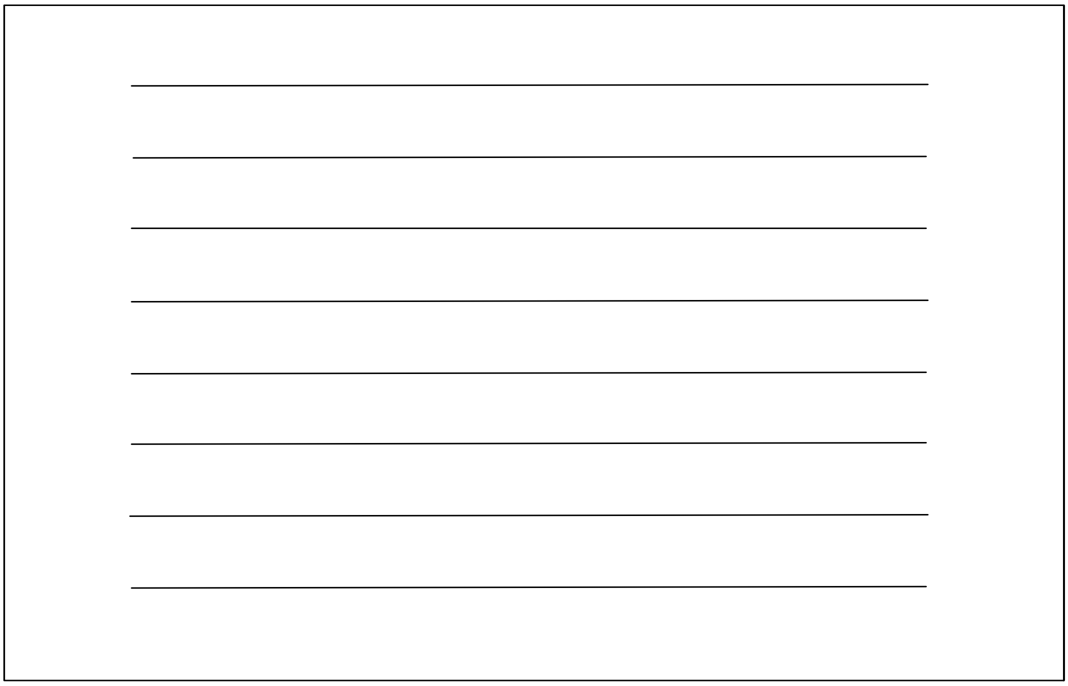
８．授業での準備物，活用したワークシート

①配布物１　　　実物大（Ｂ６のわら半紙に印刷）
線分が透けて見えるように太めに。



②配布物２　　　実物大（Ｂ６のわら半紙に印刷）

平行線は等間隔に８本引く。配布物１の線分が透けて見えるように薄いわら半紙を使用。



③配布物３，４　　色違いの上質紙各１枚
　　　　　　　　　便箋代わりに使用，３つ折りにしにくい様に大き目の紙を用意
④掲示用１，２　　配布物１，２をＢ４の大きさに拡大し透明シートに印刷したもの
⑤掲示用３，４　　配布物３，４の折り目を書き込んだもの

９．わかっていることをどのように把握したか

次のア，イ，ウ，エに分けて把握した。

ア　平行線を利用して線分の３等分ができる。
イ　３等分されていることを確かめるための図をかき，平行線の役割に気付く。
ウ　線分が３等分されていることの根拠を書くことができる。
エ　平行線と線分の比の性質を理解し，他の場面にも使うことができる。

アについては，具体物を使って試行錯誤させたこともあり，ほとんどの生徒が平行線を利用して線分の３等分をできた。このことは，作業の観察の中で把握した。

イについては，まず正確に図をかけたかどうかを点検し，その後，かいた図をもとに線分が３等分されていることを確かめるのに必要な線を図の中にかきいれさせて，平行線の幅が一定であることに着目できているかどうかを確かめた。

ウについては，平行線と線分の比の性質について確認した後，線分が３等分されていることの根拠を書くことができるかどうかをみた。

エについては，紙の３つ折りの課題の後，線分をコンパスを用いて３等分する課題を与え解決できるかどうかを観察した。

１０．本時がわかる授業であったか

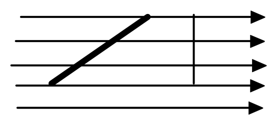
授業後の生徒のアンケートの結果から，ほとんどの生徒は生活の中のことがらが既習の数学の知識で説明できる場合もあることに気付き,「今まで気付かなかったけど平行線があるだけで３等分とか出来るなんて，便利。」と日常生活に使える喜びを素直に表現していた。また，授業中の活動の様子から，等間隔の平行線が用意されているときはその平行線を利用して線分を３等分したり，５等分したりすることはでき，図をかくことで平行線と線分の比の性質を利用していることにも気付かせることができた。このことから，９のア，イについては達成できたと考えている。

平行線を用意しないで線分だけを与え，その線分をコンパスを用いて３等分しなさいという課題を与えたところ,「平行線を使ってもよかったらできる」と発言した生徒が多数いた。逆に言えば，平行線がなければ出来ないというのである。ここに何かがあることがわかった。生徒が自ら平行線の必要性に気付き，線分を等分することができるようになることを,「わかる」授業ととらえるならば，本時はわかる授業であったとはいえないと思う。研究協議でも，はじめに平行線がなぜでてきたのか，平行線が必要であることを生徒に気付かせるようにできないのかとの指摘をいただいた。また，等間隔にひいた平行線の性質をきっちり押さえておく必要があるのではないかとの指摘もいただいた。これらの点は今後の課題として，この展開の前時か導入の場面で，平行線について考える時間をとりたい。さらに，時間の制約から急いだ展開になってしまったため, 1 時間での展開を考えたができれば２時間とりたい。そうすることで，図をきっちりとかきじっくり時間をかけて根拠を確認することできたと考える。特に，図をかきその中に既習の定理を見つけるところは時間をかけ，生徒に発見させるように大切に扱いたい。そのようにすることで，生徒の理解をさらに深めることができたと考える。

１１．わかっていないとみなされる例

９のアについては，ほとんど全員の生徒が試行錯誤の中で，直感で解決していた。

９のイについては，図はかけても等間隔の平行線であることの必要性がわかっていないため，下図のような平行線に垂直な線をかきこまず，適当な斜め線をかきいれたり，線をかきいれられない生徒が多数みられた。



９のウについては，イの図がかけなかった生徒はやはり平行線と線分の比の性質と結びつけられなかった。根拠をかけなかった生徒は，わかっていないと考えられる。

９のエについては，平行線と線分の比の性質を説明した後に課題に取り組んだのにもかかわらず，全く手をつけられない生徒が見られた。これらの生徒は，イの平行線の必要性が分かっていなかったと考えられる。

また，授業中「線分の比は移るから，…」と発言した生徒がいた。この生徒は平行線と線分の比の性質についてわかっている生徒と考えられる。別の生徒は授業後のアンケートで「今日の授業でやったことが何かわからない」と書いている。この生徒は問題を解く能力は高く，普段数学は得意といっているがエについては手がつけられなかった。この生徒は，平行線と線分の比の性質を利用できるが意味がわかっていないと考えられる。

１２．わからない生徒への対応例

１１で「わかっていないとみなされる」生徒に対しては，もう一度図を丁寧にかかせ，既習の定理を使えないかを考えさせることで再度課題に取り組ませた。また，９のエの課題では，先にかいた図と比べさせることでどんな線が必要であるかを考えさせ，作図の方針をたててから課題に取り組ませた。

また，わかったことや気づいたことを表現することは難しいので，継続して指導してことが大切である。

１３．参考資料

（１）文部科学省（2008)「中学校学習指導要領解説　数学編」

１４．今後の課題

日常生活の中に数学が利用されていることに気付いてほしい，日常生活の中にあることがらをとりあげることによって生徒の興味関心を高めたいと思い，「便箋を３つ折りする」という課題をとりあげたが，日常のことがらと授業の場面を結びつけることは生徒にとって難しいと思われる。普段から意識して日常の場面をとりあげ，生徒の意識を高めたい。

また，作図などの授業以外では図をかく機会は少ないが，問題を読んで自分で図をかいたり，定理を図で表したりする機会を増やすことで，平行線などの必要性を感じさせるようにしたい。

等積変形の指導におけるわかる授業の実践

横　弥直浩
奈良女子大学附属中等教育学校

１．表題

校種：国立大学附属中等教育学校（普通科）
分野：幾何
学年：中学２年
単元：平行線と線分の比

２．小中高校種間の接続および学びの系統

実践研究をした「等積変形」の内容を中心に述べる。本校前期課程（中学）2 年の幾何分野では，次の内容を学習する。

第１章　平行四辺形
第２章　図形と相似
第３章　平行線と線分の比
・平行線と線分の比　・・・3 時間
・中点連結定理　・・・3 時間
・メネラウスの定理　・・・3 時間
・等積変形　・・・2 時間（本時は１時間目）
第４章　円の五心

前章では，身近な事象としてコピーの拡大・縮小や，A3 用紙 A4 用紙などを，「図形と相似」という幾何の世界に持ち込んで性質や証明等を学習した。それをもとに，本章では平行線と線分の比について学習し，中点連結定理やメネラウスの定理まで発展させる。どうして中点連結定理やメネラウスの定理の発想が出てくるのかという不思議さを感じさせて，図形の相似や平行線と線分の比を用いると証明できることを知らせる。また，等積変形では，平行線を使うと基の図形から形が変わっても同じ面積の図形に変形できることを知る。

平行線の性質を用いた等積変形の内容自体は，高校への内容に直接つながるということはない。しかし，三角形の面積を求めることに着目すると次のような流れがある。

小学校５年で，三角形の面積を式「底辺×高さ÷２」を用いて求める。それ以後，三角形の面積のいろいろな求め方を学ぶ。中学校では，平行線の性質を用いて面積が変わらない三角形を学習するが，内容的には小学校での求め方の拡張（応

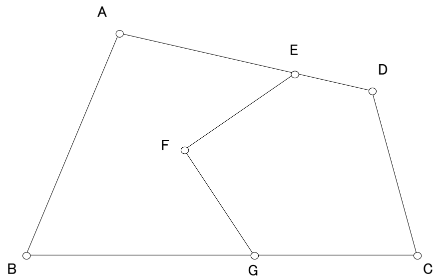
用）はない。それが，高校になって三角比（数学Ⅰ）を学習すると，$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$ のように，２辺の長さとその間の角の大きさによって求めることができる。ベクトル（数学 B）を学ぶと，内積を用いて求めることもでき，図形と方程式（数学Ⅱ）での座標平面上では，3 つの頂点の座標から面積は求めることができる。積分法（数学Ⅱ）では，定積分の計算によって求めることができる。このように，三角形の面積を求めることは，いろいろな数学の分野と関連しながら学習するといえる。

３．本時の授業でわかってほしいこと

本時の課題は次のものである。

【課題１】

図のように，四角形 ABCD の土地が折れ線 EFG を境界として，２つに分けられている。点 E を通る直線を新しい境界線に改め，２つの土地の面積を変えないで変形したい。どのような境界線を引けばよいか。



【課題２】

点 E は通らなくてよいとしたら，どんな直線でこの四角形を分けることができるか。ただし，面積は同じである。

この課題で，生徒にわかって欲しいことを評価の 4 つの観点から示すと次のようになる。

・土地についての分割問題を，等積変形という幾何の課題に数学化しようとする（関心・意欲・態度）
・平行線を使うと三角形の等積変形と見ることができ，いろいろな方法で等積変形が考えられる（数学的な見方や考え方）
・図形の等積変形ができる（表現･処理）
・三角形の等積変形を理解している（知識･理解）

【本時の評価規準】（わかって欲しい内容）

ア　平行線を使うと三角形の等積変形と見ることができ，いろいろな方法で等積変形が考えられる（数学的な見方や考え方）

イ　図形の等積変形ができる（表現・処理）

「十分満足できると判断される」状況(A)と評価する具体例

ア　平行線を使うと何通りでも直線が引けることが説明できる

　　イ　定点を通るときの等積変形だけでなく，図形を自由に等積変形できる

「努力を要すると判断される」状況(C)と評価される生徒への手だて

　　ア　平行線の見方を示す

　　イ　三角形の等積変形の方法を示す

4．わからせる方法について（指導上の工夫）

①　前時(授業)からの学習のつながりを意識化させる

前授業で，台形の対角線により内部にできる三角形の等積変形を学習する。このときに，台形に含まれる平行線を意識化しておく。

②　思考の支援となる条件を示す

点を固定して(最初は点 E を通るとする)，等積変形がしやすい状況で考えさせる。

③　現実問題としての興味付け

土地の問題として,「隣の住人と土地の有効利用をするのに区画整理することになった。そこで，面積は等しい状況で，使いやすい形になるように考えた。」というように等積変形の問題を，現実問題の文脈の中で考えるようにする。

④　教具の選択

2 年幾何の普段の授業は，PC 教室（コンピュータが 1 人 1 台使用できる環境）と自教室を 1 時間ずつ使用している。幾何ソフト（カブリ）を使用して，動的に図形を捉えて探究することを重視している。PC 教室で授業するときは，常に幾何ソフトを使用する授業になるのではなく，生徒が必要だと考えたとき，自ら PC を利用して探究できる雰囲気をこころがけている。

5．本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，またその特徴

本時の授業は，以下の「わかる授業の項目」に当てはまると考える。

項　目	授業の特徴
1．わかる対象の明確化 1.1　関心・意欲・態度または価値観 ①　面白さ・楽しさ ②　有用性（活用・利用） ③　意味と必要性	・土地の問題（現実の問題）から面積が等しい条件のもとで，境界線を変更するという図形の問題（数学の問題）に置き換えて考える。
1.2　思考・判断 ①　数学的な見方や考え方 ②　考え方の根拠	・図形の中に平行線を見つけ，その性質を考慮に入れて等積変形を考える。

1.3　表現・処理 ①　手順，求め方，解き方，調べ方 ②　表し方，まとめ方	・問題から，条件を明確化し，答を予想してから問題を解決する。 ・解決するとき，図による説明とことばによる説明をさせる。
２．わかるための工夫 2.1　数学的活動の充実 2.2　子どもの学習活動の工夫 ①　観察，操作，実験の実施 ②　表現させる 2.3　教具の活用 ①　プリント・ワークシートの工夫	 ・生徒が予想し，その根拠を明確にするための思考時間を十分に取った。 ・プリントに試行錯誤しながら作図すること，またそれをことばで表現することで，何がわかっているのかを明確化させる。 ・プリントに複数個の図を用意して，多様な解答を促すようにする。

６．学習課題設定の意図

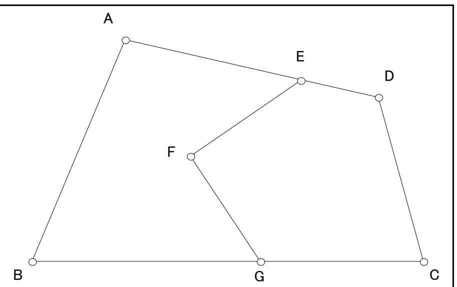
単元目標として，次の内容を考える。

「図形の相似や平行線の性質について，観察，実験や操作を通して理解し，さらに平行線と線分の比について理解を深める。平行線と線分の比の性質に興味や関心を持ち，その証明をしようとする。身近な問題にも相似や平行線の性質がひそんでいることを知り，幾何の内容を使って身近に起こる事象を問題解決しようとする。」

本時は等積変形を扱うので，身近に起こる問題として土地の有効利用という文脈で次のように課題設定をすることにした。

【課題１】

図のように，四角形 ABCD の土地が折れ線 EFG を境界として，２つに分けられている。点 E を通る直線を新しい境界線に改め，２つの土地の面積を変えないで変形したい。どのような境界線を引けばよいか。



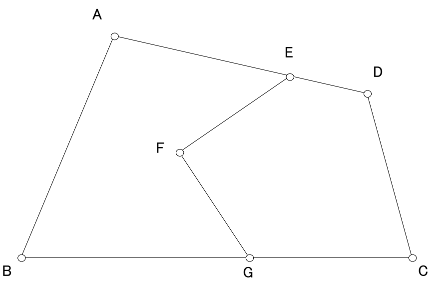
【課題２】

点 E は通らなくてよいとしたら，どんな直線でこの四角形を分けることができるか。ただし，面積は同じである。

本時授業(1 時間)では，「課題１」については全員が解決できる課題としたい。その次の発想として，点 E に固定されるのではなく，最初に予想した場所，つま

り自由に点 E の近くで点を取ったとして，そこから等積変形ができる直線を求めさせたい。この「課題２」を解くときにも平行線の性質を使った三角形の等積変形を使うのだが，かなり理解していないと解けない問題であると感じる。

７．具体的展開

<table>
<tr><td></td><td>学習活動
○予想される生徒の反応</td><td>指導上の留意点
◆教師の支援</td><td>□評価の
観点</td></tr>
<tr><td>課題提示</td><td>1. 土地の形についての問題である
・２軒の土地の形が不便なのでどうにかならないかと考えた
・境界線を変更したい
・直線で分割したい
○面積の大きさは，変更してはいけない
・理想的な直線を引く</td><td>◆現実の問題から幾何の課題に見方を変えよう
◆境界線変更の条件を確認する
◆どんな直線を引きたいか，予想しよう</td><td>□現実の問題から数学化しようとする
(関・意・態)</td></tr>
<tr><td>数学化</td><td colspan="2">２．実際直線を引くのは難しい
そこで，１つ条件を加えて課題を解決しよう
【課題１】
図のように，四角形 ABCD の土地が折れ線 EFG を境界として，２つに分けられている。点 E を通る直線を新しい境界線に改め，２つの土地の面積を変えないで変形したい。どのような境界線を引けばよいか。

</td><td>□点 E を通るという条件を加え，固定すれば等積変形できる（表・処）</td></tr>
<tr><td>探究活動</td><td>○点 E と線分 FG の中点を結んだ直線
○点 E と辺 BC の中点を結んだ直線
○点 E を通り辺 AB に平行な直線
○五角形 EFGCD に着目しよう
○三角形 EFG に着目しよう</td><td>◆どんな直線にすればよいか
◆その直線では面積の変化はないのか
◆どちらかの五角形に着目しよう</td><td>□三角形の等積変形がわかる
(知・理)
□平行線を引いて等積変形の方法を考える
(数学的な考</td></tr>
</table>

	○線分 EG を三角形の底辺とし，点 F を通り線分 EG と平行な直線を引く ○三角形 EFG の等積変形をすればよい	◆三角形で，等積変形は学習した	え方)
一般化活動	【課題２】 点 E は通らなくてよいとしたら，どんな直線でこの四角形を分けることができるか。ただし，面積は同じである。		
	○平行線を使って四角形を三角形に等積変形する ○点 E の横に点を取って，そこから直線が引ける方法を考える	◆点Eを通るという条件がなくなったら，自由に考えられる ◆点 E を通るときの考え方は，ヒントにならないか ◆やはり平行線を利用すれば等積変形ができる	□いろいろな方法で等積変形が考えられる(数学的な考え方) □等積変形ができる(表・処)
現実化	○現実的には四角形の土地が便利であろう	◆現実的には，どのように等積変形すればよいか	

８．授業で活用したワークシート

本時では，ワークシートを使用した。

課題から条件を見つけ，予想して，問題解決につなげる思考方法を生徒全員にわかって欲しいと考え，ノートに記述させるのではなく，ワークシートを作成した。図形の問題なので正確な図形で問題を解かせたいということもあり，ワークシートの使用となった。

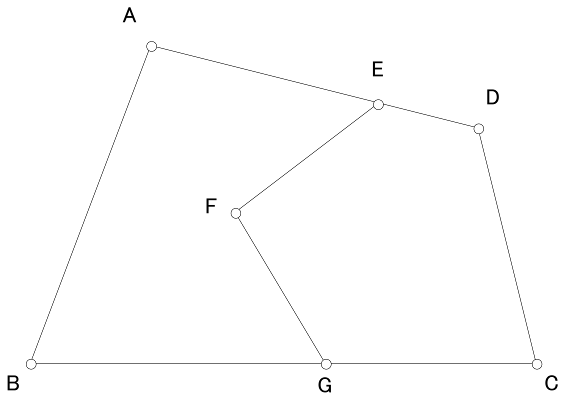
2年幾何（　　）組 　　番　名前（　　　　　　　　　　　　）

課題１

土地の問題である。四角形 ABCD の土地が折れ線 EFG を境界として，２つに分けられている。新しい直線を引いて，２つの土地に分けたい。どのような境界線を引けばよいか。

【条件】かくれた条件は何か。

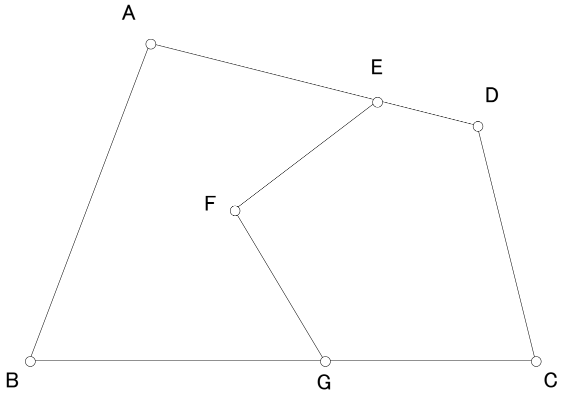
【予想】あなたなら，どんな直線を引くか。



ことばで説明せよ。

【条件の設定】「点 E を通る直線を新しい境界線にしたい」という条件があると，直線は引けるか。

＜考え方＞



ことばで説明せよ。

９．わかっていることをどのように把握したか

(1)　授業中の机間指導

生徒が作図をしている内容を，机間指導をしながら確認する。

(2)　授業で使ったプリント(ワークシート)の回収，確認

生徒の思考を確認するために，ノートではなく授業プリントを準備した。その特徴は，次のとおりである。

・課題を把握するために条件を記述させる。

・課題を解決する前に，予想を立てて見通しをつけさせる。

・課題解決は，図的な記述とことばでの説明を記述させる。

授業で使ったプリントを回収して，生徒がどんな作図やことばによる説明をしたのかを確認する。授業中では見つけられなかった生徒の発想が確認できる。

(3)　授業後のアンケートの実施

授業後，わかったことについてのアンケートを実施した。質問項目は，次のとおりである。

①今日の授業で，わかったことや気付いたことを書いてください。(自由記述)

②今日の授業で，わかりにくかったことはどんなところですか。(自由記述)

③今日の授業はどのような授業でしたか。（回答は，選択式，複数回答可）

10. 本時がわかる授業であったか

授業後のアンケートにおいて，上記質問項目①について，考察する。授業のねらいとする「わかってほしいこと」にかかわる回答は，「等積変形を使った二等分のしかた」「平行線の有効活用」等全体の 28%であったが，「数学が日々の生活に活用できる」「等積変形がいろいろなところで使える」「発想が大事」「前時のことが使える」「数学って自由だ」などの有用な回答を寄せていたのが 34%あり，「わかったこと」が教師の思惑以上に広がっていることが伺えた。

また，質問項目③では，「友達の意見を聞く時間のある授業（83%）」「進行速度が適当な授業（79%）」「じっくり考える時間のある授業（72%）」「自ら考えや解決法を発見できる授業（72%）」「今までの学習とのつながりがわかる授業（72%）」という回答がみられ，授業が生徒主導で進められたことが裏付けられている。

アンケート集計は，次のとおりである。

「質問事項」

①今日の授業で，わかったことや気付いたことを書いてください。

②今日の授業で，わかりにくかったことはどんなところですか。

③今日の授業はどのような授業でしたか。（回答は複数回答可）

アンケートに答えた生徒は，29 名である。

生徒	①わかったこと，気付いたこと	②わかりにくかったこと
1	台形を見つけたりすることができた	わかりにくかったことはなかったが，解くのに時間がかかった
2	等積変形を使った二等分の仕方	空欄
3	土地は分けられること	2つ目以降が早かった
4	空欄	空欄
5	特になし	生徒の考え方だけで何がいいたいのか？
6	前回勉強したことが出てきた	授業の途中なので明確には分からなかった
7	特になし	どのように考えを出すか
8	頭をやわらかくすればどんな問題でも解ける	特になし
9	長方形のときは，中点を通れば同じ面積になったのに台形だとそれがいかないのでもやもやした	空欄
10	具体的に数字がなくても二つに割れる	3個目以降の解き方
11	今日の授業はこの前に習ったことが使えるということ	考えて発見するのが難しかった
12	ポイントは平行線を引くこと	点E以外から直線を引くところ
13	数学は日々の生活に活用できる	特になし
14	空欄	空欄
15	数学って自由でいいんやと思った	特になし
16	台形として図形を見ると面積の等しい場所が見つかる	特になし
17	空欄	空欄
18	特になし	特になし
19	平行線の有効活用	細かい設定がなかった
20	特になし	特になし
21	等積変形の条件	特になし
22	条件付では分かるのに，何でもいいとなるとよくわからなくなることに気づいた	特になし

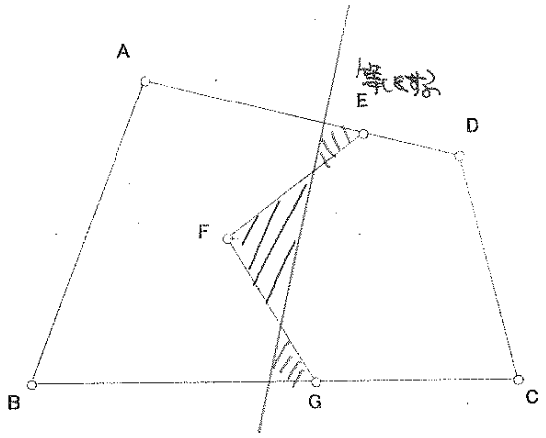
23	特になし	特になし
24	特になし	特になし
25	平行線をひき底辺が同じ長さのとき面積は同じ	説明がなかった
26	昨日習った台形の定理(?)は使えると思った	自分で答えを出すのが難しかった
27	発想は大事	特になし
28	規則性	特になし
29	等積変形がいろいろなところで使えること	特になし

合	③どのような授業でしたか
38%	①何を学習するかが明確な授業だった。
21%	②説明や解説が中心の授業だった。
55%	③私たちの理解度を見ながら進めている授業だった。
28%	④話の内容が変わるとき，既習の内容との関連を十分説明してくれる授業だった。
79%	⑤進行速度が適当な授業だった。
3%	⑥進行速度が遅すぎる授業だった。
72%	⑦じっくり考える時間がある授業だった。
28%	⑧ノートをとる時間が十分にある授業だった。
59%	⑨先生の指示がわかりやすい授業だった。
55%	⑩先生の説明がわかりやすい授業だった。
52%	⑪黒板にかかれた内容がわかりやすい授業だった。
62%	⑫配布資料（資料・プリント・道具のほか，映像も含む）が効果的な授業だった。
83%	⑬友達の意見を聞く時間がある授業だった。
72%	⑭自ら考えや解決法を発見できる授業だった。
45%	⑮自分の考えを発表できる授業だった。
28%	⑯発言しやすい授業だった。
59%	⑰予習はしなかったが，よく理解できる授業だった。
3%	⑱予習してきたので，よく理解できる授業だった。
55%	⑲授業のレベルが適切な授業だった。
41%	⑳説明の量が適切な授業だった。
38%	21 新しい内容に入る最初の部分が面白い授業だった。

72%	22 今までの学習とのつながりがわかる授業だった。
38%	23 学習の意味や意義がわかる授業だった。
41%	24 次の授業が楽しみに思える授業だった。

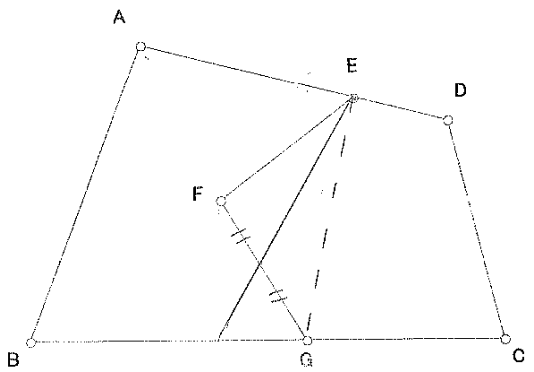
11. わかっていないと見なされる例

［生徒例１］



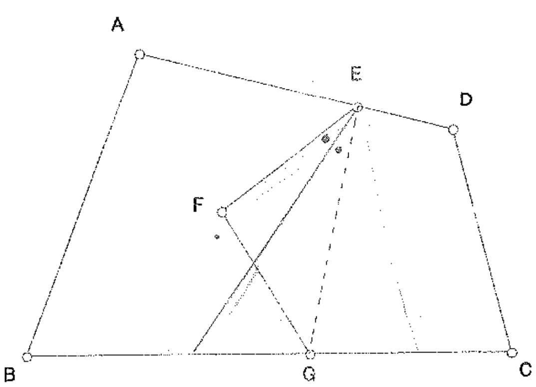
境界線より左側の三角形と右側 2 か所の三角形の和の面積が等しくなるように直線を引くとよいという考えである。これは，数学的な根拠がなく解決の見通しが立っていない。

［生徒例２］



線分 FG の中点と点 E を結んだ直線が境界線であるとしている。

［生徒例３］



∠FEG の二等分線が境界線であるとしている。

以上が主な間違い例である。［生徒例１］は，数学的根拠がなく，［生徒例２，３］

は，数学的な根拠はあるが，等積変形になる根拠がない。いずれも平行線に着目できていないので，わかっていないとみなされる。

12. わからない生徒への対応例

11.のわかっていないとみなされる[生徒例１]の場合，直感から数学的な根拠への思考に移りにくい生徒であるため，三角形の面積の求め方を確認するとともに，平行線の性質や三角形の底辺と高さの場所の確認等，知識・理解面で欠けているところをアドバイスする。また，[生徒例２]や[生徒例３]の場合，課題を数学的に意識しているので，前時間に学習した内容を思い出すようなメタ認知的なアドバイスをする。以上は，個々の生徒によって決まったものではないが，生徒とのコミュニケーションにより助言の内容やレベルを考えながら対応する。

上記のような指導は，机間指導のときに各生徒に行うものであるが，それでも生徒が理解できない場合は，授業後わからないところを確認しながら個人指導をする。

13. 参考資料

「中学校学習指導要領解説　数学編」，文部科学省（平成 20 年 9 月）

14. 本単元においてよく見られるつまずきとその原因及び克服のための指導例

「平行線と線分の比」の単元において，平行線の性質やそれを使った線分の比については，生徒はほぼ理解している。しかし，そこから中点連結定理やメネラウスの定理に発展すると，公式を覚えて問題を解くことはできるが，どうしてそのような定理が導かれるのか証明することができない。そんなときは，相似の概念まで振り返って学習したり，具体的な問題を解きながら生徒がわかるように助言をしている。また，本校では幾何の授業でコンピュータを使うことも多く，幾何ソフト「カブリ」を使って探究的に授業展開するときもある。「カブリ」は，図形を動的に考察できるので，紙と鉛筆による作図よりもイメージ化でき，理解の助けになるものと考える。

三角形の合同条件を見いだすこと

吉次憲保・宇都宮真
大阪市立夕陽丘中学校

１　分野・校種など

分野　　図形の性質と合同
校種　　公立中学校
学年　　第２学年
単元　　合同条件の導入

２　小中高校種間の接続

図１に示すように，本単元に関わる学習内容は小学校２年の学習内容にさかのぼることができる。

この授業では，特に，中学校１年における基本の作図で三角形の決定条件を扱っていることを直接関わらせて進めた。

３．本時の授業でわかってほしいこと

同じ三角形をかくことを通して，２つの三角形が合同になるための条件を見いだし，三角形の合同条件の意味を理解すること。

具体的な評価規準は次のように設定した。

・三角形の合同や合同条件を言葉や式などを用いて表すことができる。
（表現・処理）

・合同条件の意味を理解している。
（知識・理解）

４．わからせる方法について

本時では グループ学習を取り入れ，各グループごとに与えられた三角形と合同な三角形をかく方法を考えさせる。その際，三角形には辺や角があわせて６つあるが，そのうちの３つの要素で作図できることに気づかせるために，まず，一つの辺をノートにとらせて，そこからどのようにすれば与えられた三角形と合同な三角形がかけるかを考えさせる。

一つの辺を先にかかせるのは，分度器で角を測るためにも基準線が必要となるからである。その後，各グループごとに発表させ，発表させた意見が３つに分類できることを確認し，それらをもとにして合同条件を見いださせる。

図１　小中高の学びの系統

・直線の意味（小２）
・長方形，正方形，直角三角形の定義および基本的性質，方眼を利用してこれらの図形をかくこと（小３）
・角の定義（小４）
・二等辺三角形，正三角形の定義および基本的性質（小４）
・円の定義，円の中心，半径，直径の意味（小４）
・垂直の定義とその表し方，三角定規を使って垂直な直線をかくこと（小５）
・平行の定義と性質，三角定規を使って平行な直線をかくこと（小５）
・平行四辺形，ひし形，台形の定義および基本的性質（小５）

・三角形の内角の和は１８０度（小５）
・多角形の内角の和（小５）

【中学校】

平面図形（１年）
・平面図形の観察　・平面図形の作図

空間図形（１年）
・空間図形の観察　・図形の計量

図形の性質と合同（２年）
・角と平行線　・三角形の合同
・証明

三角形と四角形（２年）
・三角形　・平行四辺形

図形の相似（３年）
・相似な図形　・平行線と線分の比

三平方の定理（３年）
・三平方の定理　・三平方の定理の利用

・三角比，正弦定理，余弦定理，図形の計量（数Ｉ）
・点の座標，直線の方程式，円の方程式，円と直線（数Ⅱ）
・三角形の性質，円の性質（数Ａ）　・ベクトル（数Ｂ）

５．学習課題設定の意図

三角形の合同条件は，図形の基本性質であり，後で学習する論証の根拠となることがらであるため，知識として与えるのではなく，実感を通して体得させることが必要である。そのため，観察・操作などを通して，これまでに学んだ三角形の決定条件とも関連させて系統的に考えさせ，合同条件を見いだせるよう課題を設定した。

６．具体的展開

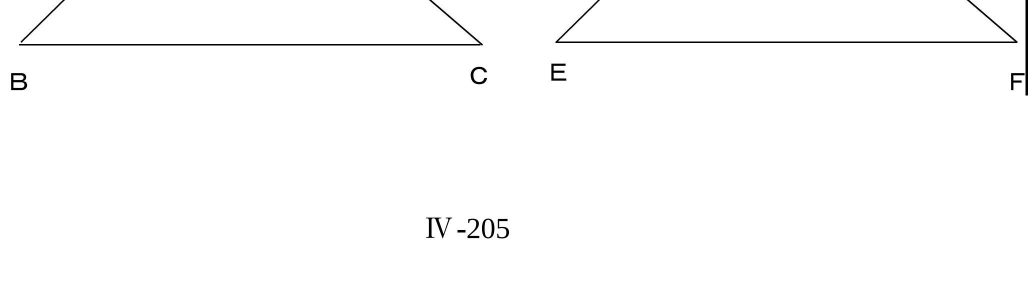
	学習内容・学習活動	学習指導の留意点	評価
導入 10分	前時の復習 １．合同について 合同とは 合同な図形の性質 答え合わせ	・合同な図形の対応する頂点，対応する辺，対応する角の意味を確認する。 ・合同の記号（≡）を正しく使うことができるかを確認する。 （いずれも「確認プリント」を使用）	
展開 30分	２．学習課題を提示する。 与えられた三角形と合同な三角形をかくための条件を見つけよう（ワークシート）。		
	３．グループごとに合同な三角形をかく方法について考える。	・ワークシートにかかれた三角形と，合同な三角形をかかせる。 ・合同な図形を書く手だてとして，対応する辺や角に注目させる。 ・６つの要素（３つの辺と３つの角）のうち，１つや２つの要素では作図できないことを確認し，３つの要素で作図できることに気づかせる。 ・どの辺の長さや，どの角の大きさを測ったかを記録させる。 ・厚紙の三角形を配布し，合同を確認させる。 ・どのグループも２個程度作図できるまで時	関心・意欲・態度

		間を十分にとる。	
	【予想される生徒の考え】 ①３つの辺　②１つの辺と２つの角 ③２つの辺と１つの角		
	４．発表する	・発表させた意見を画用紙に記入し，黒板に貼る ・③で，間の角でない場合は別の三角形がかけることを示す	
	５．各グループの発表について検討し，分類する	・発表された意見が３つに分類できることを確認させる	
まとめ10分	６．三角形の合同条件を示す ７．次時の予告 ８．自己評価	・分類したをものをもとに合同条件を示す	知識･理解

７．授業で使用した確認プリントとワークシート

（［確認プリント］は，ほとんどの生徒ができた。）

［確認プリント］



問①　△ＡＢＣと△ＤＥＦが合同なとき，対応する頂点を答えなさい。

頂点Ａと　　　　頂点Ｂと　　　　頂点Ｃと

問②　△ＡＢＣと△ＤＥＦが合同なとき，対応する辺を答えなさい。

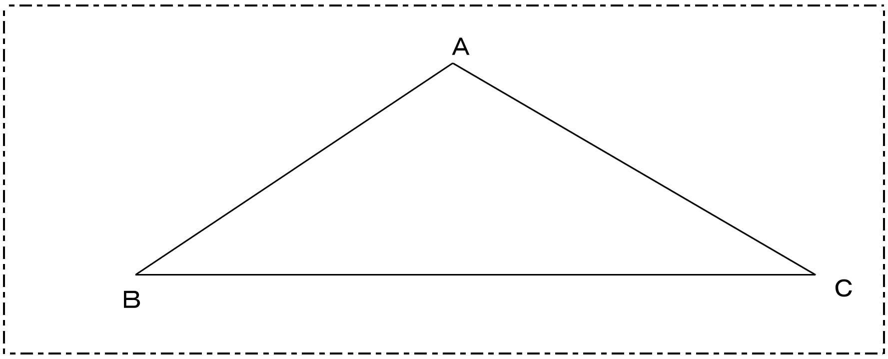
辺ＡＢと　　　　辺ＡＣと　　　　辺ＢＣと

問③　△ＡＢＣと△ＤＥＦが合同なとき，対応する角を答えなさい。

∠Ａと　　　　∠Ｂと　　　　∠Ｃと

問④　△ＡＢＣと△ＤＥＦが合同なとき，記号を使って表しなさい。

［ワークシート］



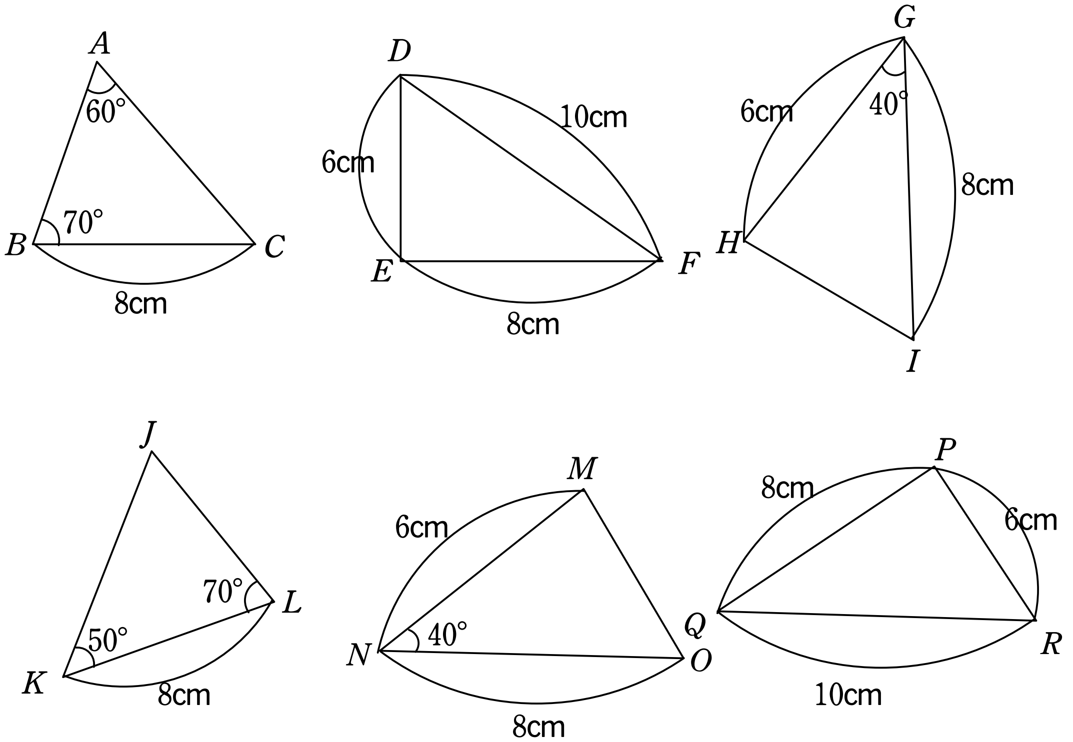
★上に書かれている三角形と合同な三角形をかいてみよう

８．わかっていることをどのように確認したか

【テスト問題】

・いくつかの三角形の中から合同な三角形を選び出し，その理由を三角形の合同条件を用いて説明できるかをみた。

下の図で、合同な三角形の組を、記号「≡」を使って対応する順に書きなさい。
また、そのときの合同条件も書きなさい。



合同な三角形	合同条件

【自己評価表】

授業への参加態度を確認するとともに，数学への興味・関心や今日の授業でわかったことを書かせた。

1．持ち物の用意は

①しっかりできた　②ほぼできた　③あまりできなかった　④できなかった

2．グループ内でお互いに質問などして解決に努めることが

①しっかりできた　②ほぼできた　③あまりできなかった　④できなかった

3．授業中は

①集中できた　②ほぼ集中できた　③やや集中力に欠けた　④集中できなかった

4．この授業で興味を持ったことは何ですか。（いくつでもＯＫ）

①確認プリント　②合同な三角形を書いたこと

③グループで話し合ったこと　④グループで発表しあったこと

⑤合同条件を見つけたこと　⑥その他

5．この授業を振り返ってわかったことは何ですか

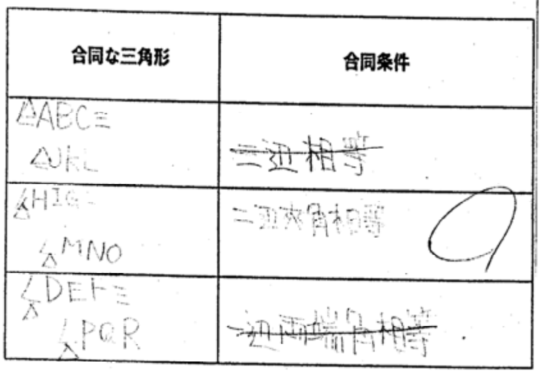
9．本時が，わかる授業であったかどうか

テストの結果は，正答率　88.2%であったので，多くの生徒は授業内容を理解しているとみなすことができる。

一方，いくつかの観点で誤答分析すると，次のようになった。（重複誤答あり）

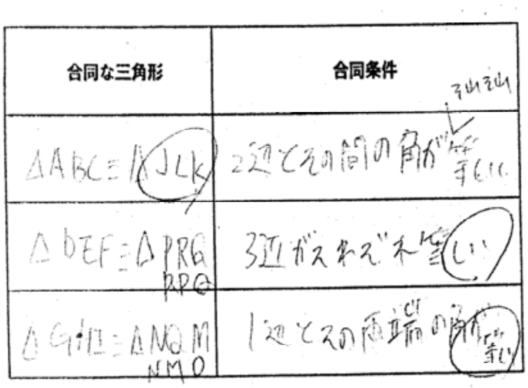
三角形の記号△がかけていない	9.4%
合同条件がわからない（誤解答）	4.4%
対応順にかけない	8.5%
合同条件がかけていない（無回答）	3.8%
合同条件が不十分（「それぞれ」が書けていない）	1.2%

誤答例１



合同な三角形	合同条件
△ABC≡△JKL	~~二辺相等~~
△HIG≡△MNO	二辺夾角相等
△DEF≡△PQR	~~一辺両端角相等~~

誤答例２



合同な三角形	合同条件
△ABC≡△JLK	2辺とその間の角が等しい
△DEF≡△PRQ RPQ	3辺がそれぞれ等しい
△GHI≡△NQM NMO	1辺とその両端の角が等しい

誤答例１では，△ ABC ≡△ JKL，△ HIG ≡△ MNO，△ DEF ≡△ PQR と答えていて，いずれも対応する頂点は異なっている。また，合同な図形とわかっていてもその条件が書けない。

誤答例２は，△ ABC ≡△ JLK，△ DEF ≡△ PRQ　RPQ，△ GHI ≡△ NQM　NMO と答えている。対応する頂点をどのように書けばよいか迷っている。また，合同であるとわかってもその条件が書けない。

このように，テスト問題では，合同な三角形を選ぶことはできても，合同条件が書けなかったり，合同条件を間違えていたりする生徒がいた。また，対応する頂点に着目していない生徒もいた。

これらは，与えられた三角形と合同な三角形をかかせることとによって理解した，三角形の決定条件と，かいた二つの三角形が合同になるための条件とを関連づけてとらえられなかったことを意味する。

また，自己評価表の結果は次のようになった。

項目１　① 73.9%　② 13.0%　③ 0%　④ 4.3%

項目２　① 47.8%　② 39.1%　③ 4.3%　④ 0%

項目３　① 28.3%　② 39.1%　③ 15.2%　④ 0%

項目４　① 13.0%　② 37.0%　③ 37.0%　④ 28.3%　⑤ 28.3%　⑥ 15.2%

項目５

・合同条件が分かって良かった。
・思ったより単純な図形だと思った。けどその単純な図形を３つの方法でかけることがわかった。
・三角形の合同条件。
・三角形の性質。
・合同条件は３つしかないということ。
・合同条件は３パターンあるといういうこと。
・２つの三角形が合同かどうか見分けられること。等

この自己評価表の結果を見ると，項目４では，②や③に関心を示していたものの，⑤に対する回答が十分高い値ではなかった。このことは，合同な図形を書くことの活動が，三角形合同条件への理解に結びついていない生徒がいることを意味する。

また，項目５では，わかったことの内容にばらつきがみられる。合同条件の意味を理解するという授業のねらいが，一部の生徒には十分伝わっていない可能性がある。

10. わかっていないと見なされる例とその対応

テスト問題の振り返りを通して，次のことが一層明らかとなった。

・いくつかの三角形の中から合同な三角形を選び出す際に，２つ三角形が合同になる理由（合同条件）が答えられない生徒がいること。

・三角形の合同条件が２つの三角形が合同となる理由であることを納得できない生徒がいること。

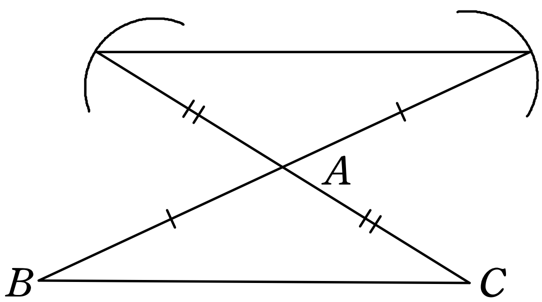
テストを通して明らかとなった理解が不十分な生徒には，「条件」という語句の説明をしたり，本授業の活動を振り返らせ操作活動が何を意味していたのかを考えさせたりして，再度授業で使ったワークシートに取り組ませた。

11. 授業の改善点

本指導案は，本校の教員の協力のもと，教員が生徒役となって模擬授業を実施したり，大阪市教育委員会の初任者研修の一つとして，初任者が生徒役となった模擬授業を実施したりした。これらの模擬授業を踏まえての改善点を記述する。

・ワークシートにかかれた三角形を枠の中に入れる。

　辺 AB,AC を延長し，コンパスの支点をＡにとった下図ような作図をさせないようにするため。

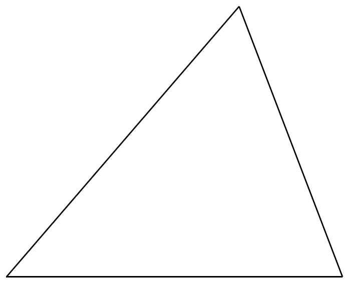


・生徒の発表を記入する画用紙には，あらかじめ，三角形の頂点に次ページの図のように小さな穴を空けて，$\boxed{あ}$ $\boxed{い}$ $\boxed{う}$ と記号をつけておく。

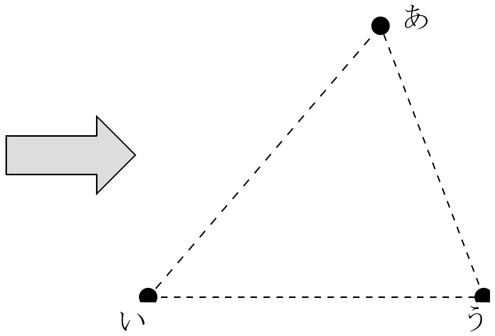
　穴を空けておくことによって，授業者が生徒の発表を図でかくときの手助けとなる（合同な三角形がすぐにかける）から。

　また，記号を付けることによって意見を分類しやすくできるから。

［図１］



［図２］



［図１］と合同な三角形がかきやすいように，黒い点の場所に印を打っておく(穴をあけておく)。

・生徒の発表を記入するとき，辺には青，角には赤で記入する。
　色を分けることによって，発表された意見が３つに分類できることに気づきやすいから。

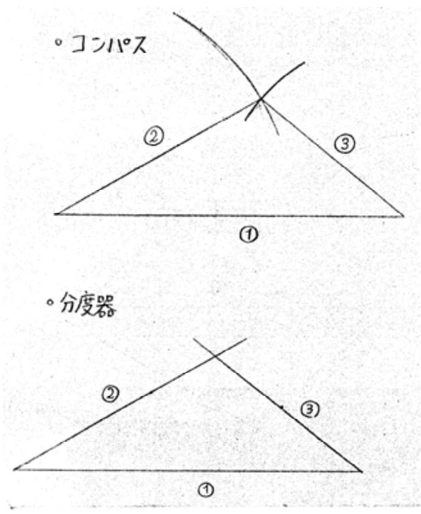
12. 指導のポイント

この授業のポイントは三角形の決定条件と，一つの三角形と合同な三角形をかく条件から，いかにして，二つ三角形が合同になるための条件を見いださせるかという点にある。

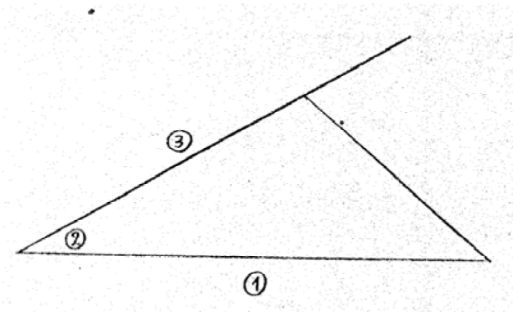
本校の多くの生徒は，同じ三角形をかけるので合同の意味は理解している（ワークシート作図例１，２）。また，合同な三角形の見当をつけることもできる。

これらのことを振り返らせながら，与えられた二つの三角形の辺の長さや角の大きさの情報から，それぞれ合同になっているかどうかを確認させ，本時の授業にフィードバックすることが本単元の目標を達成するための指導のポイントであると考える。

作図例１



作図例２



13. 授業後の研究協議で話題になったこと

【質問】

・授業の目的は作図であったのか，合同条件を見いだすことであったのか。どちらなのか。

・与えら得れた三角形の３つの角の大きさや，３つの辺の長さを測らせることは必要だったか。

【意見，感想】

・コンパス，直定規，分度器の３つの道具の使い方を明示したほうがよいのではないか。直定規は長さを測るものではなく，線を引くものであること。コンパスは長さを測りとるものという説明が必要だったのではないか。→ いままでそのような意識がなかったので，今後生かしていきたい。

・三角形の角や辺に，測った順に番号をつけるよう指示をしていたが，角度を測っているのに，番号を付ける際に辺のところにつけている生徒がいた。→ 作図の前にもっと丁寧に指示をすべきだった。

・グングン（発展）コースでは，最初の確認プリントは必要ないのでは？ →図形の合同を理解できているかの確認が前時ではできていなかったため，必要と感じている。ただ，もう少し短時間で済ませることができたと思う。

・かけない三角形にこだわらないと，「間の角」がいきてこないのではないか。→ その通りだと思う。生徒の多様な意見を引き出す問いかけをすることが必要だった。（例えば，間の角じゃなかったらどうなる？…など）

・決定条件（作図）と合同条件を接続することが不十分ではなかったか。→ 分類したものをもとに合同条件を示した後，いくつかの三角形を示し，合同な図形を見つけさせる，という授業展開が必要だと思う。

２－５　関数（解析）分野

微分の導入に着目して

梅田英之
静岡県立静岡商業高等学校

１ 領域・校種など

・領域　解析
・校種　公立全日制実業高校（商業科）　静岡県立静岡商業高等学校
・学年　高校３年
・科目　数学Ⅱ
・単元　微分の導入

２　小中高校種間の接続：学びの系統

微分・積分は，高等学校における数学の頂点に位置づけられている単元である。特に「微分」は，関数を解析する 1 つの方法であり，非常に強力な道具であるといえる。

関数の変化を解析する指導については，中学までに，次のような内容を順次扱っている。

・小学校 4 年　伴って変わる 2 つの数量（表をもとに，変化の決まりを見つける。）
・小学校 6 年　比例（表をもとに，変化の決まりを見つける。）
・中学校 1 年　比例（表をもとに，変化の決まりについて考察する。）
・中学校 2 年　1 次関数（変化の割合を調べる。）
・中学校 3 年　関数 $y = ax^2$（変化の割合を調べる。）

また，高校では，微分の内容に関わって，ここまでに次の内容を扱っている。

・数学Ⅰ　2 次関数
・数学Ⅱ　いろいろな関数（指数関数，対数関数，三角関数）

ただし，高校での関数の指導内容は，式をもとにグラフをかいてその特徴を調べることが中心であり，変化の割合に着目して関数の変化を解析する活動は，ほとんど行われていないのが実情である。

本時では，「微分の導入」として，「平均の速さ・瞬間の速さ」を扱った。

筆者の所属校では，全生徒が数学Ⅰと数学Ⅱを履修し，選択科目として数学 A

を開設している。関数領域に関しては以下のように学習している。

高校１年：２次関数

高校２年：三角関数

高校３年：指数・対数関数，微分・積分

筆者は，この単元を，次の流れで指導した。

５章　微分と積分

１節　微分係数と導関数・・・６時間

１　平均変化率・・・・・・・・・・・・・・・・２時間（本時は１時間目）

２　微分係数・・・・・・・・・・・・・・・・・１時間

３　導関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・１時間

４　導関数の計算・・・・・・・・・・・・・・・２時間

２節　導関数の応用・・・・・６時間

１　接線の方程式・・・・・・・・・・・・・・・１時間

２　関数の増減・・・・・・・・・・・・・・・・１時間

３　関数の極大・極小・・・・・・・・・・・・・２時間

４　関数の最大・最小・・・・・・・・・・・・・２時間

５　方程式・不等式への応用・・・・・・・・・０時間（省略）

３節　積分・・・・・・・・・９時間

１　不定積分・・・・・・・・・・・・・・・・・３時間

２　定積分・・・・・・・・・・・・・・・・・・２時間

３　定積分と面積・・・・・・・・・・・・・・・４時間

３　本時の授業でわかってほしいこと

本時の授業でわかってほしこいとは，次の通りである。

（１）瞬間の速さの概念を理解する。
（２）平均の速さから瞬間の速さを求める方法を理解する。

わかったかどうかの評価については，下記の通りである。

①全体に対して，わからない部分がないか確認する。

②個人追究，グループ討論の際に，机間指導して確認する。

生徒のワークシート（プリント）の記述を，授業後に確認する。

③授業終了直後にアンケートをとり確認する。

4　わからせる方法について

（１）教材の工夫

以下の点について，教材を工夫した。

ア　実際に，実験をする。さらに，実験結果から時間と距離の関係を発見させる。

イ　距離が，時間の関数（$y=20x^2$）になるように傾斜を工夫する

ウ　考える時間を十分に設け，さらに，手がかりを与える。

エ　問題を解決するための方針を，生徒とのやりとりで明らかにする。

オ　生徒に発表させ，教師が補足説明する。

（２）学習過程の工夫

以下の点について，学習過程を工夫した。

ア　中学校や数学Ⅰとの接続については，グラフの概形を思い起こさせる。

イ　解法を振り返る。

ウ　グループ活動を取り入れ，生徒同士で考えたり教えあったりする。

5　本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，また，その特徴

項　目	授業の特徴
「わかる対象の明確化」 ・関心・意欲・態度または価値観 ①面白さ・楽しさ ②有用性（活用・利用） ③意味と必要性，意義	距離が，時間の関数（$y=20x^2$）になるように傾斜を工夫する。
・概念・原理・法則 ①仕組み・成り立ち	平均の速さや瞬間の速さの課題を解決することで，微分のよさを感じさせる。
「わかるための工夫」 ・数学的活動の充実 ・生徒の学習活動の工夫 観察・操作・実験の実施	実際に，実験をする。さらに，実験結果から時間と距離の関係を発見させる。
・表現させる	個人追究，グループ討論の時間を設ける。

（グループ討論・発表）	
・ワークシートの工夫	ワークシートに自分の考えや予想を書かせる。
・接続 既習内容と関連づける	既習事項を確認（復習）しながら授業を展開する。

6　学習課題設定の意図

本時は，次の課題を設定した。

> 課題
>
> 段々速くなっていることを具体的な数値で確かめましょう。そこで，１秒後や２秒後の瞬間の速さは，わかりますか？
>
> とりあえず，２秒後の瞬間の速さはどの位でしょうか？次のア～オから選びましょう。
>
> ア　約 1km/h　　イ　約２ km/h　　ウ　約３ km/h
>
> エ　約４ km/h　　オ　約５ km/h 以上

この課題を設定したねらいは，次の通りである。

①　現実事象と結び付けた「平均の速さ」を取り上げることで，生徒の興味・関心を高める。

②　ボールを転がす実験を実際に行うことを通して，瞬間の速さの概念を容易に理解できるようにする。

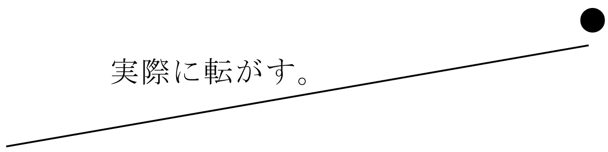
7　具体例

（１）指導案

段階	学習活動	教師の活動	指導上の留意点
	 「１秒」,	「ボールを転がします，何秒で下まで行くでしょう？」 実験を見せる。（カーテンレール上に，小さな	（用意） カーテンレール，

<table>
<tr>
<td>導入
5
分</td>
<td>「2秒」，
「3秒」
等

◎実験を見る。
実験は，よく見る。

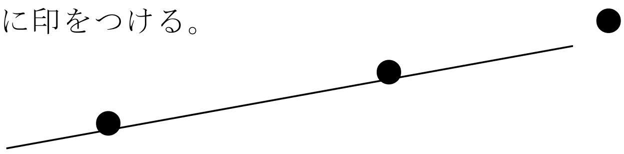
意見が出る。</td>
<td>ボール を転がす。）


「段々速くなっていることを具体的な数値で確かめましょう。そこで，1秒後や2秒後の瞬間の速さは，わかりますか？
　とりあえず，2秒後の瞬間の速さはどの位でしょうか？　次のア～オから選びましょう。」
ア　約 1km/h　　イ　約２ km/h　　ウ 約３ km/h
エ　約４ km/h　 オ　約５ km/h 以上</td>
<td>小さなボール，定規。

段々，速くなっていることを確認する。$\boxed{\text{重要}}$
　生徒は，秒速何 cm よりも，時速何 Km の方がわかりやすいであろう。</td>
</tr>
<tr>
<td>展

開

I

20
分</td>
<td>実験を，よく見る。</td>
<td>再度実験をして，1秒後，2秒後，3秒後の位置に印をつける。


印までの距離を測定する。
　1秒後 20cm （1から2秒の間：60cm）
　2秒後 80cm　（2から3秒の間：100cm）
　3秒後 180cm
<table>
<tr><td>秒後</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>④</td><td>(x)</td></tr>
<tr><td>位置</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td>秒後</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>④</td><td>(x)</td></tr>
<tr><td>位置</td><td>0</td><td>20</td><td>80</td><td>180</td><td>320</td><td>$20x^2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>→</td><td>→</td><td>→</td><td>→</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>20</td><td>60</td><td>100</td><td>140</td><td></td></tr>
</table></td>
<td>「数学で調べよう。」

$y=20x^2$ となるように測定する。（少し作為的ですが，・・・。）

（評価）
問題の意味がわかったか。</td>
</tr>
</table>

	$y=20x^2$ 瞬間の速さって何？	ここで，おまけの問題です，実験はしていませんが，4秒後の位置は，わかりますか？ （ﾋﾝﾄ;位置の差を計算する。） さらに，おまけのおまけの問題です，ｘ秒後の位置は，ｘをつかってどう表せますか？ （ﾋﾝﾄ;２乗した数値を秒後の上に書く。） 「ここで，最初の問題に帰ります。２秒後の瞬間の速さはわかりますか。」 「たとえば，電車や自動車等の速度計はｽﾋﾟｰﾄﾞに応じて動いていますが，この速度計の針が指している値は，その時刻における乗り物の<u>**瞬間の速さ**</u>を表しています。」	おまけの問題は，省略して，展開Ⅱに進み必要に応じて考えさせてもよい。
展開Ⅱ 15分	班で考えて意見が出ることを期待する。 （たとえば 80cm÷２秒＝40cm/s等） 「速さ＝道のり÷時間」等のつぶやきがある。 ①	４人班をつくって班で考えさせる。 手がかりⅠ（ヒント） ①２秒後から３秒後の平均の速さ？ 答え $\frac{180\text{-}80}{3\text{-}2}$ ＝ 100cm/s ②２秒後から２．５秒後の平均の速さ？ 答え $\frac{125\text{-}80}{2.5\text{-}2}$ ＝ 90cm/s （③２秒後から２．１秒後の平均の速さ？） 答え $\frac{88.2\text{-}80}{2.1\text{-}2}$ ＝ 82cm/s 「どこに近づきそう？」	班活動では，問題の意味を理解させる。 速さは時々刻々変化することを強調する。 ③は，時間がなければ提示しない電卓使用可とする。 （評価）

	100cm/s ② 90cm/s （③ 82cm/s） 80cm/s	正解は，80cm/s です。（2.3km/h）	解決の指針がわかったか。 （評価） 解決の仕方が自力でわかったか。
まとめ 5	この問題の解法と結果をふり返る。		

（２）実際の授業の流れと生徒の反応

ア　課題提示の場面

（プリント配布）

T：今日はこんなものをもってきました。カーテンレールです。

T：今から転がします。どうなるでしょうか？

S：転がる。

T：ここからここまで転がるのに何秒かかるでしょうか

S：２秒，３秒，４秒・・・

T：ワークシートに自分の答えを書いてください。

T：では今から実験をします。そこでこれを使います。これは何かわかりますか。キッチンタイマーやストップウオッチではありません。

S：タマごっち。

T：これはメトロノームです。

T：これは１分間に６０回鳴ります。

T：では，やってみます。

S：３秒，４秒

T：(実際に転がす。）だいたい３秒くらいです。

T：この玉はどうなりますか。

S：速くなる。
S：加速する。


イ　課題を共有する場面

T：これから速くなるということを数学というか数字で表現してほしい。何を言えば速くなっていると言うことになりますか？

S：１秒間に進む距離。

S：みはじ。

T：みはじって何。

S：道のり・速さ・時間

T：道のり・速さ・時間？

S：ﾃﾝﾄｳﾑｼみたいの。

T：それでこれを使って何をするの

S：全部

T：１秒後，２秒後の何が言えれば速くなっていると言うことになる？

T：速さは道のり÷時間です。では２秒後の速さはわかる？

S：・・・

T：速さを求めるためには，道のりと時間がわからないと求まりません。そこでもう一度実験します。

T：１秒後にどこまで転がっているか。２秒後にどこまで転がっているか。３秒後にどこまで転がっているか。これは瞬間芸だからね。

（実験）

S：１秒ごとで止めると思った。

T：ここが１秒後，ここが２秒後の場所，３秒後はこの辺。

T：０秒のところは何ｃｍ？

S：０ｃｍ

T：１秒のところは何ｃｍ？

S：２０

T：２秒のところは何ｃｍ？

S：８０

T：３秒のところは何ｃｍ？

S：１６０

S：１８０

T：これで２秒後の瞬間の速さがわかりますか。

S：単純にできますか？

T：２秒後の瞬間の速さがわかりますか。Mさん

S：５０ cm/秒

S：１００÷２　　うそ

S：８０÷２＝４０

T：６０÷２

S：ざわざわ。

ウ　課題追求の場面

T：８０÷２　もう一度確認するよ。

T：２秒後８０ｃｍ，３秒後１８０ｃｍ

T：Mさん言って。理由言って。

S：道のりが８０ｃm時間が２秒だから。

T：みんないい。４０ｃm/秒とは何かというと，０秒から２秒後までにどの位転がってるの？

S：８０ｃｍ

T：何秒間？

S：２秒間

T：この玉にスピードメーターついている？

S：奥の方についてる。

S：ついてない。

T：ついてないような気がします。どうやったら瞬間の速さが求まりますか。

S：１秒と２秒の間が６０ｃｍで１秒だから６０ｃｍ／秒。

T：これは１秒後から２秒後の間の平均の速さだよ。

S：スピードガンもってくればいい。

S：一瞬が何秒か，わからない。ヒント言って。

T：ヒント。

S：瞬間の速さ？　瞬間の速さ？

T：Hさん。

S：わからない。

T：どうすればいい？

S：０．１で割る。

T：ヒントを言うよ。１．５秒後から２秒後の間の平均の速さがわからない。

S：１．５ｃｍの場所がわからない。

T：もし４秒のときはどの位のところまで転がっているかわかりますか。

S：２３０ｃｍ，２５０ｃｍ位

T：理由は？

S：ピーンとでてきた。

S：３２０，３６０

T：Cさん理由言って。

S：２のとき，２の２乗かける２０。

T：よくわかるね。これがヒントです。１．５秒後のときどこまで転がっていますか。

S：４５ｃｍ

T：１．５秒後から２秒後の間の平均の速さを言って。

S：８０－４５を２－１．５で割ると７０ｃｍ／秒。

エ　課題解決の場面

T：では２秒後の瞬間の速さがわかりますか。

S：１．９秒後から２秒後までの平均の速さ。

T：５番目，１．９秒後から２秒後までの平均の速さ。

S：８０ｃｍ／秒

S：７８ｃｍ／秒

T：７８と言ってる人が多いですが。

S：２秒後から２．１

S：１．９９から２

T：瞬間の速さを求められるか。

S：１．９９９から２

S：永遠にやる。

８　授業で活用したワークシート

授業で活用したワークシートは次の通りで，実際の用紙サイズは B4 である。

◎数学（微分のことは微分でやろう）　PART2

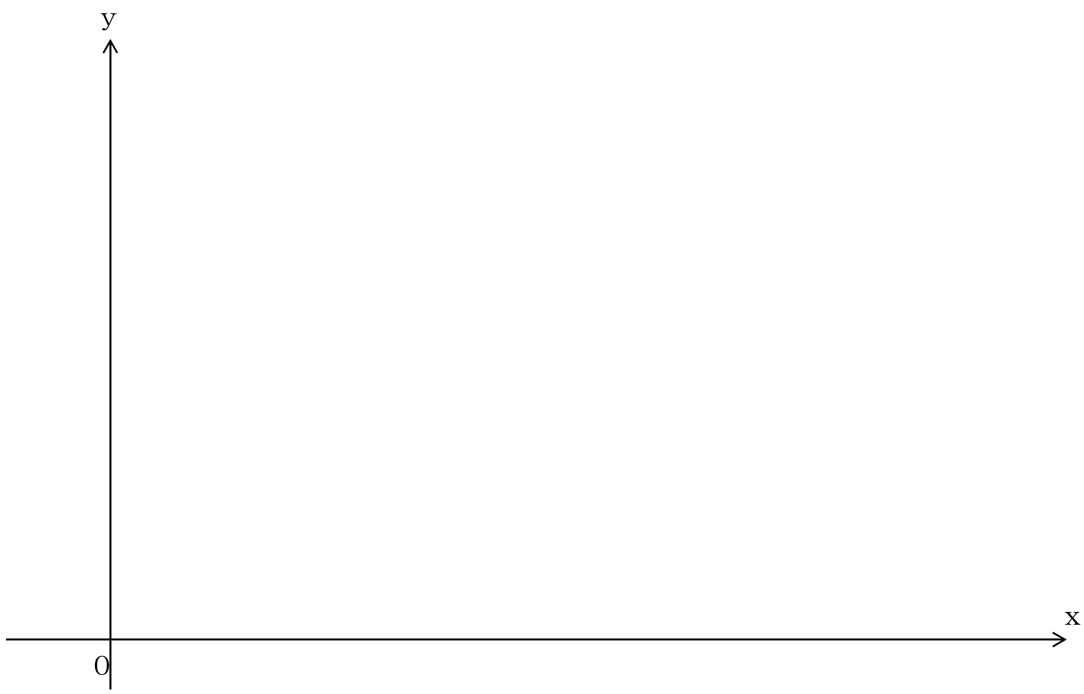
HRNO（　　　　）Name（　　　　　　　　　　　　　　）

ズバリ当てましょう。

＜　自分の考え　＞

$\boxed{\text{Ⅰ}}$　２秒後の瞬間の速さは？

$\boxed{\text{Ⅱ}}$　$y=20x^2$のグラフをかけ。



９　わかっていることをどのように把握したか

授業前と授業後にアンケート調査を実施した。

（１）アンケート調査（事前調査）の結果について

授業の前（平成２０年１０月２２日）に実施した。回答数は３８人で，質問項目と集計結果は以下の通りである。

①　数学の授業内容に興味・関心をもっていますか。
②　数学の授業に積極的に参加していますか。
③　あなたは数学が好きですか。
④　あなたは数学が得意ですか。

ア　そう思う　イ　どちらかといえばそう思う　ウ　どちらかといえばそう思わない　エ　そう思わない

	ア	イ	ウ	エ
①	１３	５０	２９	8
②	１１	４２	３９	8
③	１３	３９	２９	１８
④	3	２１	４２	３４

（単位：％）

（２）アンケート調査（事後調査）の結果について

授業の後（平成２０年１０月３０日）に実施した。回答数は３７人で，質問項目と集計結果は以下の通りである。

①　本日の数学の授業の内容に興味・関心をもてましたか。
②　本日の数学の授業に積極的に参加していましたか。
③　本日の数学の授業の内容が理解できましたか。
④　本日の数学の授業内容を学ぶ意義を実感することができましたか。
⑤　瞬間の速さの意味はわかりましたか。

ア　そう思う　　　　　　　　　　　　イ　どちらかといえばそう思う
ウ　どちらかといえばそう思わない　　エ　そう思わない

	ア	イ	ウ	エ
①	１１	３０	５７	３
②	５	３５	５４	５
③	５	３８	５４	３
④	１１	３０	４９	１１
⑤	５	３０	４６	１９

（単位：％）

⑥　瞬間の速さとは何ですか。具体的に記してください。

・動いている物のその時の一瞬の速さ。
・動いているのは，どんどん速くなる。
・瞬間の速さは，０秒後の速さに近づく。
・瞬間と０秒後はすごく近くにある。
・瞬間の速さとは，そのグラフの求めたい数との接線の傾き。
・瞬間の速さ＝接線の傾き
・速さ＝道のり÷時間
・グラフの接線の傾き。
・そのときの求める秒数に近づけるか。（どれだけ）
・限りなく正解に近づける。
・グラフの傾きの接線。（接線の傾き）・・・多数
・今日やった問題は，80cm/秒
・秒間に進む距離。
・その時求めるべきである秒数にどれだけ近づけるか。
・ある区間を何秒で行けるか。
・限りなく２秒後（80cm/秒）に近づく。
・瞬間の速さは接線になる。
・ほんの一瞬の間に進んだ距離を時間で割って出た速さ。

⑦　瞬間の速さの求め方はわかりましたか。

　1　そう思う　2　どちらかといえばそう思う　3　どちらかといえばそう思わない　　4　そう思わない

	1	2	3	4
人数	3	8	１４	7
％	9	２５	４４	２２

⑧　瞬間の速さの求め方を具体的に記してください。

・２秒後の瞬間の速さを求めるには，２秒後までの平均の速さを求める。
・２秒に限りなく近くまでの平均の速さを求めると瞬間の速さも分かる。
・平均の速さをグラフにすると，瞬間の速さも分かる。
・その瞬間の速さの接線の傾きだと思います。・・・多数
・（ｙの増加量／ｘの増加量）の秒数も限りなく近づけて計算する。
・速さ＝道のり÷時間
・グラフをかく。

⑨　本日の数学の授業の感想を書いて下さい。

・分かりにくいところもあったが，説明がよかったので，しっかり理解することができた。もう少し問題をこなして，やり方を覚えたいと思った。
・色々な物を使ってよく理解できる授業でした。
・大学でも必要だから，しっかりやりたい。
・すっきりしない分野です。
・あまりよくわからなかったけど，何となくわかった。
・最初は求め方なんてわかんないんじゃないかと思ったけど，他の人の発言や先生のヒントなどを参考にして考えるとだんだんわかってきました。
・楽しさはあった。
・いつもやっている数学とはちがって，以前習った「みはじ」やグラフなどを使ってわかりやすかった。

・何となく分かるけれど，だから何を求めるのが問題になるのかわからなかった。
・中学の授業でやったような感じでわかりやすかった。
・難しいけど楽しい授業だったと思う。こうやってみんなで考えるのは楽しい。
・むずかしくてよくわからない。
・難しい。
・３時間にも及ぶ長編授業は初めてだったので正直モヤモヤしてましたが，ちょっとわかったので気持ちがスッキリした。
・特に接線の見つけ方？がよくわからないことです。これが，これから習う微分というものにどうつながっていくのかよくわからないです。

１０　本時がわかる授業であったかどうか

９に記述した調査の結果及び授業後の研究協議会での指摘を基に，本時がわかる授業であったかどうかについて考察した。

（１）アンケート調査の結果より

アンケート調査項目とその結果は，下記の通りである。（平成 20 年 10 月 30 日実施：35 名回答）

１.今日の授業はどのような授業でしたか。次の１～24　のうち，当てはまるものすべてを選び，○で囲んでください。

上位５位まで

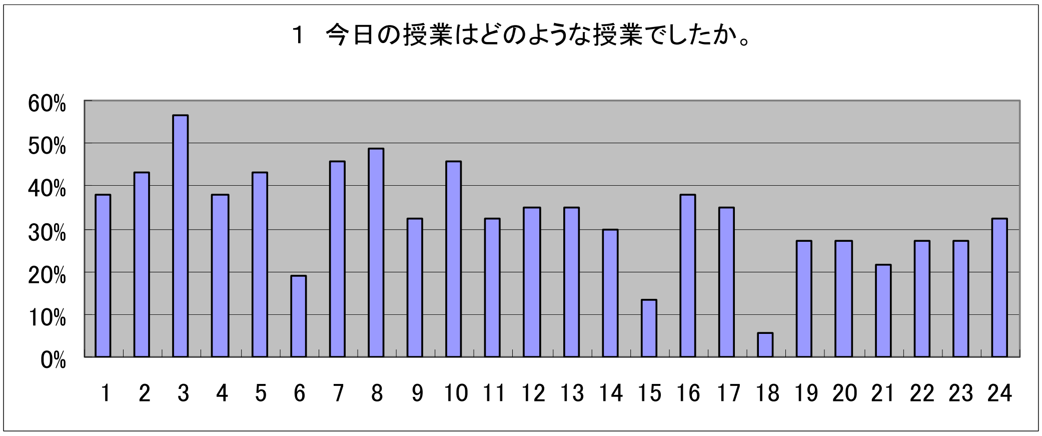
位	質問番号	アンケート内容	人	%
1	3	私たちの理解度を見ながら進めている授業だった。	21	57%
2	8	ノートをとる時間が十分にある授業だった。	18	49%
3	7	じっくり考える時間がある授業だった。	17	46%
4	10	先生の説明がわかりやすい授業だった。	17	46%
5	2	説明や解説が中心の授業だった。	16	43%

下位５位まで

位	質問番号	アンケート内容	人	%
1	18	予習してきたので、よく理解できる授業だった。	2	5%
2	15	自分の考えを発表できる授業だった。	5	14%
3	6	進行速度が遅すぎる授業だった。	7	19%
4	21	新しい内容に入る最初の部分が面白い授業だった。	8	22%
5	19	授業のレベルが適切な授業だった。	10	27%

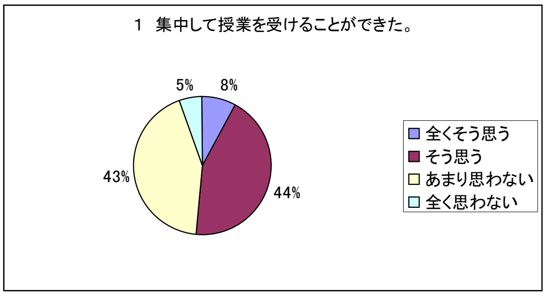
質問番号	アンケート内容	人	%
1	何を学習するかが明確な授業だった。	14	38%
2	説明や解説が中心の授業だった。	16	43%
3	私たちの理解度を見ながら進めている授業だった。	21	57%
4	話の内容が変わるとき、既習の内容との関連を十分説明してくれる授業だった。	14	38%
5	進行速度が適当な授業だった。	16	43%
6	進行速度が遅すぎる授業だった。	7	19%
7	じっくり考える時間がある授業だった。	17	46%
8	ノートをとる時間が十分にある授業だった。	18	49%
9	先生の指示がわかりやすい授業だった。	12	32%
10	先生の説明がわかりやすい授業だった。	17	46%
11	黒板にかかれた内容がわかりやすい授業だった。	12	32%
12	配布資料(資料・プリント・道具のほか、映像も含む)が効果的な授業だった。	13	35%
13	友達の意見を聞く時間がある授業だった。	13	35%
14	自ら考えや解決法を発見できる授業だった。	11	30%
15	自分の考えを発表できる授業だった。	5	14%
16	発言しやすい授業だった。	14	38%
17	予習はしなかったが、よく理解できる授業だった。	13	35%
18	予習してきたので、よく理解できる授業だった。	2	5%
19	授業のレベルが適切な授業だった。	10	27%
20	説明の量が適切な授業だった。	10	27%
21	新しい内容に入る最初の部分が面白い授業だった。	8	22%
22	今までの学習とのつながりがわかる授業だった。	10	27%
23	学習の意味や意義がわかる授業だった。	10	27%
24	次の授業が楽しみに思える授業だった。	12	32%

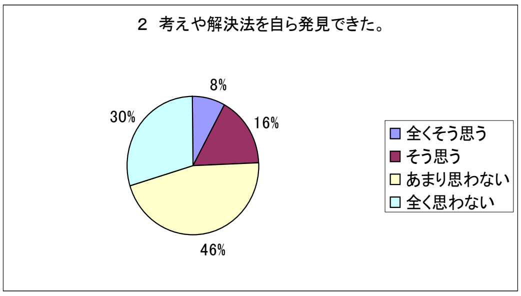
(回答者:37名)

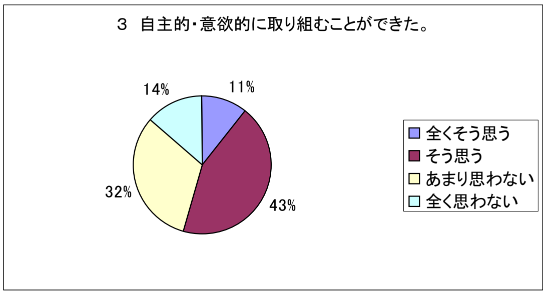


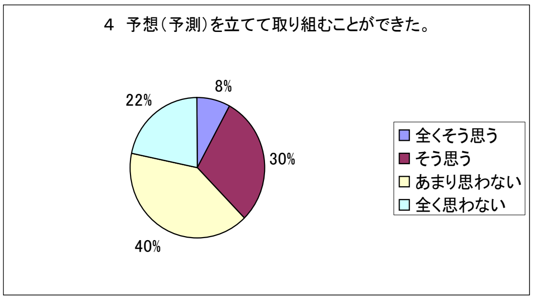
２.今日の授業について，次に示すように１～４で自己評価し，右側の目盛りを○で選んで囲んでください。なお，⑧～⑩については，項目ア，イ，ウから当てはまるものすべてを選び，○で囲んでください。

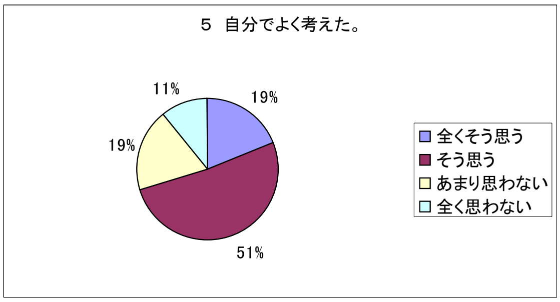
４全くそう思う　　３そう思う　　２あまり思わない　　１全く思わない

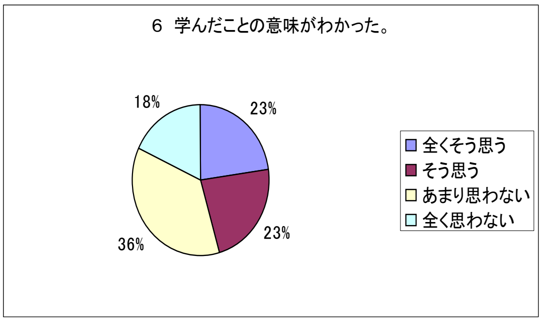

1 集中して授業を受けることができた。
5%
8%
43%
44%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

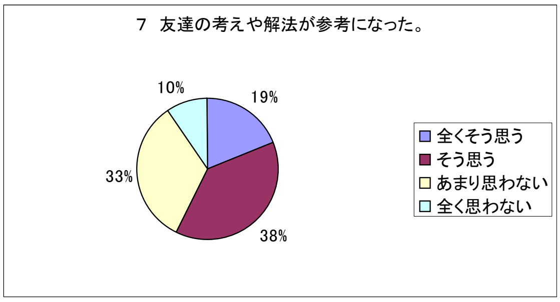

2 考えや解決法を自ら発見できた。
8%
30%
16%
46%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

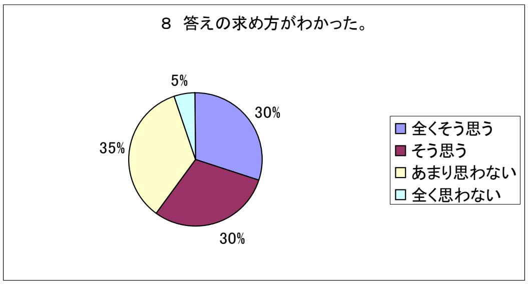

3 自主的・意欲的に取り組むことができた。
14%
11%
32%
43%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

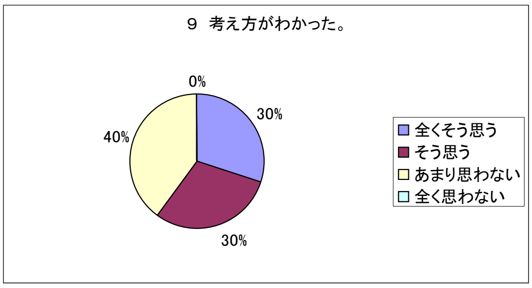

4 予想(予測)を立てて取り組むことができた。
8%
22%
30%
40%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

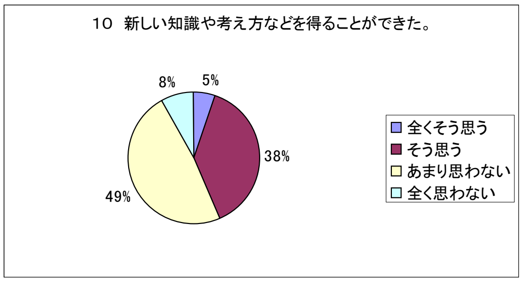

5 自分でよく考えた。
11%
19%
19%
51%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

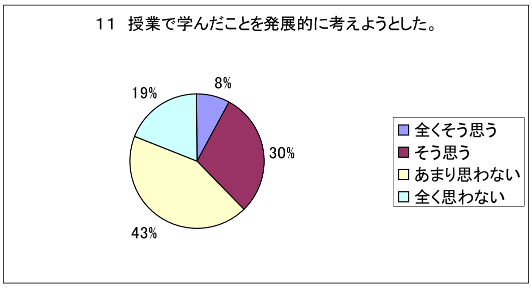

6 学んだことの意味がわかった。
18%
23%
36%
23%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

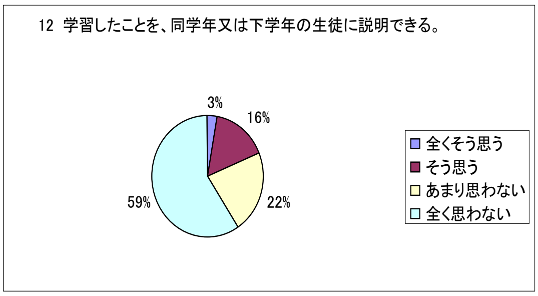

7 友達の考えや解法が参考になった。
10%
19%
33%
38%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

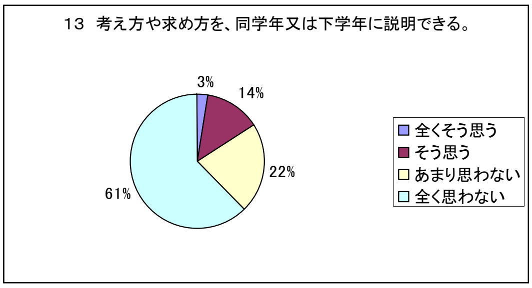

8 答えの求め方がわかった。
5%
30%
35%
30%
全くそう思う
そう思う
あまり思わない
全く思わない

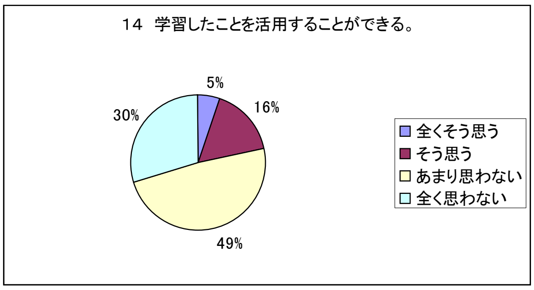












アンケートの結果より，多くの生徒は，集中して授業を受けていたことが読み取れる。また，多数の生徒が自分で考えていたことがわかる。

次に，「３の本時の授業でわかってほしいこと」とのかかわりについては，以下の通りである。

（ア）「瞬間の速さの概念を理解する。」ことについて

学んだことの意味が分かったかどうかという質問に対して，そう思うと回答した生徒が４６％であり，瞬間の速さの概念を理解できなかった生徒が多かったことになる。

（イ）「平均の速さから瞬間の速さを求める方法を理解する。」について

アンケート調査の項目の「瞬間の速さの求め方を具体的に記してください。」

という質問に対して，「２秒に限りなく近くまでの平均の速さを求めると瞬間の速さも分かる。」という記述があった。さらに，アンケート調査の質問項目⑦の「瞬間の速さの求め方はわかりましたか。」に対して，「そう思う」と「どちらかといえばそう思う」と回答した生徒の割合が，わずか３４％であった。これらのことから，残念ながら，「瞬間の速さの求め方は，わからなかった生徒が多くいたことになる。

（２）研究協議会より

研究協議会では，下記の意見が出た。（抜粋）

A：電卓を使わせると，最初はいいけど，ずっと使ってしまう。どこまで使わせるか。電卓を使わないとどうするかと話をもっていく。どこかで電卓無しにしないと計算のしっぱなし。（最後の１．９秒後から２秒後のところ。）

B：大学生は因数分解が役に立たないと思っている。

C：生徒から一瞬がわからないという声があった。瞬間というのが何かというのを生徒に話さないと。直感的イメージで説明した方がよい。

D：実験の点の打ち方もよかった。平均の速さなしに瞬間の速さを言っていた。瞬間と言う言葉にこだわらなければならなかった。単語にこだわらなければならなかった。

E：小さな声で「瞬間ていうのは何秒か？」と言っていた生徒がいた。１．９秒後から２秒後は０．１秒の平均だと言っていた。２０，４０，６０，と言っていた。表の完成を気にしていた生徒がいた。先生が０．１秒の平均，０．０１秒の平均，０．００１秒の平均とやればいい。

F：根本的な質問だが，手がかりがなくて，平均の速さの極限が瞬間の速さである。生徒とのやりとりで，手がかりがなくて質問しているところがあった。

G：速さが変化している。瞬間の速さがよくわからないので，平均の速さを求める。平均の速さの意味の説明がなかった。

H：スピード違反の取り締まりだって，平均の速さを求めている。

I：箱作りと異なり，時間は目に見えないのがネック。

J：グラフをつかったらどうか。

K：ｈを入れないほうがいい。因数分解をいれてほしい。

L：今日は，瞬間の速さのぼわっとした概念がわかればいい。

M：瞬間の速さは，平均の速さを区間を短くしていくのが極限そのものの考え方。

N：次の時間は，「近づけると言うことが，微分だよ。」とする。

１１　わかっていないと見なされる例

（１）瞬間の速さの概念を理解する

このことに関してわかっていないと見なされる事例は，以下の通りである。

アンケートの質問の，「瞬間の速さとは何ですか具体的に記してください。」に対して，「動いているのは，どんどん速くなる。」という回答があった。

（２）平均の速さから瞬間の速さを求める方法を理解する

このことに関してわかっていないと見なされる事例は，以下の通りである。

アンケートの質問の，「瞬間の速さの求め方を具体的に記してください。」に対して，「速さ＝道のり÷時間　や　グラフをかく」という回答があった。

１２　わからない生徒への対応

わからない生徒に対しては，再度，研究授業と同じ内容で，瞬間の速さを説明した。なお，これは授業内の時間に，わかる生徒にとっては復習という位置づけで行った。

１３　研究資料

特になし。

１４　本単元において，よく見られるつまずきとその原因および克服のための指導例

「微分とは何か？」と聞くと，「指数を前に出して，その指数－１を，その指数のところに書く。」と解答が返ってくることが多々ある。このことから，微分の計算ができても，微分の本質的な意味がわからない生徒が多くいることが予想される。そこで，この授業のように，坂を転がるボールの時間と位置の関係を実験して，平均の速さと瞬間の速さを求め，その意味を改めて確認することにより，微分の学習の根底にあることを意識してくれるのではないだろうか。特に，筆者の所属校のように数学があまり得意でない生徒が多く集まった学校では，実験等を用いて身近な事象で生徒に示すということは，生徒のつまずきを回避するための一つの手段ではないだろうかと考えている。

微分の応用に着目して

梅田英之
静岡県立静岡商業高等学校

１　領域・校種等

・領域　解析
・校種　公立全日制実業高校（商業科）　静岡県立静岡商業高等学校
・学年　高校３年
・科目　数学Ⅱ
・単元　微分の応用

２　小中高校種間の接続：学びの系統

微分・積分は，高等学校における数学の頂点に位置づけられている単元である。特に「微分」は，関数を解析する 1 つの方法であり，非常に強力な道具であるといえる。

関数を活用する指導については，中学までに，次のような内容を順次扱っている。

・小学校 4 年　伴って変わる 2 つの数量
（表をもとに変化の決まりを見つけて，未知の量を求める。）
・小学校 6 年　比例
（表をもとに変化の決まりを見つけて，未知の量を求める。）
・中学校 1 年 比例（事象をもとに関数の式を求めて，未知の量を求める。）
・中学校 2 年　1 次関数（事象をもとに関数を式を求めて，未知の量を求める。）
・中学校 3 年　関数 $y = ax^2$
（事象をもとに関数を式を求めて，未知の量を求める。）

上記のように，活用場面の多くは，「関数の式を求めて未知の量を求める」課題が多い。

また，高校では，次の内容を指導している。

・数学Ⅰ　2 次関数（事象をもとに関数を式を求めて，最大値・最小値を求める。）
・数学Ⅱ　いろいろな関数＜指数関数，対数関数，三角関数＞
（事象をもとに関数を式を求めて，未知の量を求める。)）

特に，2 次関数の活用場面で，最大・最小となる場合を調べることを扱ってい

る。

本時では，関数の活用場面の 1 つである「微分の応用」として，「容積が最大となる箱の作成」の問題を扱い，「閉区間における３次関数の最大値」を追究させる。具体的には，箱を実際に作成し，電卓を用いて容積を求めさせる。容積が最大となる値を追究する活動を通して，微分の必要性と有用性を感じさせることをねらいとした。

なお，筆者の所属校では，全生徒が数学Ⅰと数学Ⅱを履修し，選択科目として数学 A を開設している。関数領域に関しては以下のように学習している。

高校１年：２次関数

高校２年：三角関数

高校３年：指数・対数関数，微分・積分

筆者は，この単元を，次の流れで指導した。

平均の速さ→瞬間の速さ→平均変化率→微分係数→接線の傾き→導関数→関数の増加・減少→極大・極小→方程式・不等式への応用。

３　本時の授業でわかってほしいこと

本時の授業でわかってほしいことは，次の通りである。

（１）　問題の意味を把握する。

（２）　問題の解決の仕方を理解する。

ア．解決の方針を示すこと

イ．容積 y を切り取る一辺の長さ x の式で表すこと

ウ．微分を用いて増減表をつくり，グラフの概形を描くこと

エ．グラフの概形から，容積が最大となる x の値を読み取ること

オ．変数 x の範囲を表すこと

（３）　微分を用いることのよさを理解する。

４　わからせる方法について

（１）教材の工夫

以下の点について，教材を工夫した。

ア　実際に，箱を作成する。

イ　最大値を求めるのに，生徒が容易には結果を予想できない数値を工夫する。

（２）学習過程の工夫

以下の点について，学習過程を工夫した。

ア　問題を解決するための方針を，生徒とのやりとりで明らかにする。

イ　関数の式をつくるところを丁寧に説明する。

ウ　グループ活動を取り入れ，生徒同士で考えたり教えあったりする。

オ　生徒に発表させ，教師が補足説明する。

カ　解法を振り返る。

5　本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，また，その特徴

項　目	授業の特徴
「わかる対象の明確化」 ・関心・意欲・態度または価値観　①面白さ・楽しさ ②有用性（活用・利用） ③意味と必要性，意義	日常生活の中の問題を取り上げ，箱の容積の最大値を追究させる。
・概念・原理・法則 ①仕組み・成り立ち	課題を解決することで，微分のよさを感じさせる。
「わかるための工夫」 ・数学的活動の充実 ・生徒の学習活動の工夫 観察・操作・実験の実施	課題追求の際，実際に箱を作成させ，電卓を用いて実際に容積を求めさせる。そして，容積が最大となる値を追究するという体験を通して，微分の必要性とその有用性を感じさせる。
・表現させる （グループ討論・発表）	個人追究，グループ討論の時間を設ける。
・ワークシートの工夫	ワークシートに自分の考えや予想を書かせる。
・接続 既習内容と関連づける	既習事項を確認（復習）しながら授業を展開する。

６　学習課題設定の意図

本時は，次の課題を設定した。

課題　　　　　**砂金をたくさんもらおう！** 「 ある所では，箱を持っていくと，ちょうど一杯分の砂金がもらえます。 ただし，その箱は，一辺２０ｃｍの正方形の紙を使って，その四隅から同じ大きさの正方形を切り取って作ったものでなければなりません。 たくさん砂金をもらいたいあなたは，どのような箱を作りますか？実際に，たくさん砂金の入る箱を作ってみましょう。」

この課題を設定したねらいは，次の通りである。

①　「砂金をたくさんもらおう」という現実事象と関連づけた課題設定とすることにより，生徒の興味・関心を高める。

②　実際に，箱を作って容積を求める活動を通して，容積が切り取る正方形の一辺の長さの関数になることを理解し，容積を表す式を容易につくれるようにする。

③　この課題の解決を通して，微分の必要性と有用性を実感させる。

７　具体例

（１）指導案

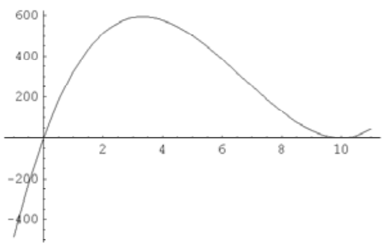
段階	学習活動	教師の活動	指導上の留意点
導入 10 分	**◎　砂金をたくさんもらおう！** ① 「 ある所では，箱を持っていくと，ちょうど一杯分の砂金がもらえます。 ただし，その箱は，一辺２０ｃｍの正方形の紙を使って，その四隅から同じ大きさの正方形を切り取って作ったものでなければなりません。 たくさん砂金をもらいたいあなたは，どのような箱を作りますか？実際に，たくさん砂金の入る箱を作っ	プリント①を配布して問題文を各自に読ませる。 問題文の意味を理解できない生徒も少なからずいると思われるので，授業者が問題文を丁寧に読み，生徒とのやり取りを通して解説する。 マス目のある折り紙	説明の際は，ふたのない箱の見本をみせる。 （評価）

	てみましょう。」 　はさみを使ったり，紙を折ったりしながら試行錯誤をして，容積ができるだけ大きくなるような箱を実際に作る。 　各自が箱を作った後，電卓を使って容積を計算する。	(20cm × 20cm)を配布する。 生徒に，勘で容積最大の箱を作らせ，容積を計算させる。（電卓使用可） 容積最大と考えられる箱を全員の前でいくつか提示する。	問題の意味がわかったか。
展開 35分	**◎　砂金をたくさんもらおう！②** （解決の方針） 　切り取る一辺の長さを x ㎝，箱の容積を y ㎝^{3}として，この関数のグラフの概形を微分を用いて増減表をもとにかき，最大となる x を求めればよい。 （解答例） 　切り取る一辺の長さを x ㎝，箱の容積を y ㎝^{3}とする。 $y=x(20-2x)^2$ $\quad =4x^3-80x^2+400x$ $y'=12x^2-160x+400$ $\quad =4(3x^2-40x+100)$ $\quad =4(3x-10)(x-10)$ $y'=0$を解くと， $x=\dfrac{10}{3},\ 10$ 切り取る正方形の一辺の長さ x のとり得る値の範囲は，$x>0$，$20-2x>0$より $0<x<10$ この区間で y の増減表をつくる	プリント②を配布する。 まず最初に，何を x，y とし，何を求めればよいかについて，生徒とのやりとりを通して，全体で確認する。 またそのために，y のグラフの概形が描ければよいことを確認する。 まずは，個人でしばらく考えさせる。 生徒の様子を見ながら，必要に応じて，次の点を確認する。 ・底面の正方形の一辺の長さは，x を用いてどのように表されるか。 ・容積 y は，x を用いてどのように表されるか。	生徒が作成した（あるいは教師が準備した）いろいろな容積の箱を並べてみせて，一辺の長さ x が変化すると容積 y が変化することに着目させ，y が x の関数であることを確認する。 （評価）

と次のようになる。

x	0	…	$\frac{10}{3}$	…	１０
y'		＋	0	−	
y		↑	極大	↓	

グラフの概形は，次の通り。



すなわち x ＝ $\frac{10}{3}$ のとき y の値は最大となる。よって切り取る 1 辺の長さは $\frac{10}{3}$ ｃｍである。

次に，4 人班をつくって班で考えさせる。

最後に，解決できた生徒 1 人を指名し，解法を黒板に書かせて説明させる。
必要に応じて，教師が補足説明をする。
この際，x のとりうる値の範囲についても強調する。

解決の指針がわかったか。

机間指導をする。

（評価）
解決の仕方が自力でわかったか。

極限値は求めさせる必要はなことに触れる。

班活動では，わかった生徒がわからない生徒に教えたり，互いに解法を見せ合うことを促す。

			（評価） 解決の仕方が，他の生徒の説明を聞いてわかったか。
まとめ5分	この問題の解法と結果を振り返る。 解法を振り返って，微分のよさを説明する。	底面の正方形の一辺が，高さの何倍になっているかを予想させ，4 倍になっていることを示す。	教師が準備した容積最大の箱を見せる。 （評価） 微分を用いることのよさがわかったか。

（２）実際の授業の流れと生徒の反応

ア　課題提示の場面

（プリント配布）

T：問題を読んでみます。

「 ある所では，箱を持っていくと，ちょうど一杯分の砂金がもらえます。ただし，その箱は，一辺20cmの正方形の紙を使って，その四隅から同じ大きさの正方形を切り取って作ったものでなければなりません。たくさん砂金をもらいたいあなたは，どのような箱を作りますか？実際に，たくさん砂金の入る箱を作ってみましょう。」

今日はこれだけやろうと思います。

ハサミを使います。作り方だけど，例えばこんな感じで，四隅を上手く切り取って，それで２つ作れるので，１つは失敗しても大丈夫です。例えば，こんな箱ができます。みんないろいろ考えて，一番砂金がもらえそうな箱，つまり，ふたのない箱の中に砂金をたくさん入れたいわけです。どのくらい切り落としたらい

いでしょうか。２つ例を作ってきました。こんなふうに，四隅を切り落とすと，こんな箱ができます。３ｃｍ×３ｃｍかな。それでは，今から厳しいかもしれないけど５分間でやって。


Ｔ：それでは自分が作った箱の容積を計算できる？　例えば，今回一番多いのがこれかな？　５ｃｍ×５ｃｍの正方形を切り落としている人が結構多いかなと思います。とりあえず自分が作ったものでいいので，容積（体積と言ってもいいと思いますが）を計算してみて下さい。電卓を使ってもいいよ。
５ｃｍ×５ｃｍを切り落としてる人が一番多いと思うのですが，これを作ったという人どの位いる？　ちょっと手を挙げて。

Ｔ：(生徒を指名する。）容積ってどうやって計算するんだっけ。

Ｓ：縦×横・・・　　縦５ｃｍ

Ｔ：横は？

Ｓ：５×１０×１０＝５００

イ　課題を共有する場面

Ｔ：自分が作った箱の容積を計算してみて。

Ｔ：こういう人も多かったです。４ｃｍ×４ｃｍ

Ｔ：３ｃｍ×３ｃｍという人も多かったです

Ｔ：１ｃｍ×１ｃｍという人もいました。

Ｔ：(生徒を指名する。）３ｃｍ×３ｃｍを切り取ったときの箱はどうですか。

Ｓ：１４×１４×３＝５８８

Ｔ：４ｃｍ×４ｃｍを切り取ったときの箱はどうですか。この箱を作った人は手を挙げて。(生徒を指名する。)

Ｓ：４×１２×１２＝５７６

Ｔ：どれが一番大きそうですか？見ればすぐにわかるね。５８８の３ cm ×３ cm を切り落としたときだね。これより大きくなった人いますか？　どうですか？

Ｓ：・・・

Ｔ：何となくこれが大きそうです。３ｃｍずつ切り落とすと，底辺が１４ｃｍね。これが一番大きそうです。でも，これが本当に一番大きいと思う？　これより大きいのは無い？　絶対無いですか？

Ｔ：今せっかく微分をやっているので，微分を使って解いてもらおうと思います。本当にあれが一番大きいか確かめてもらいたいと思います。

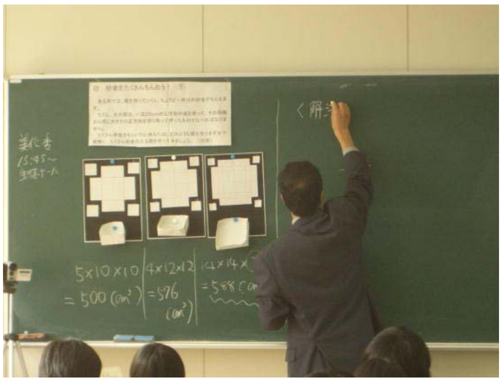
Ｔ：計算でこれが本当に一番大きいか確かめてもらいます。プリントにも書いてありますが，解決の方針はどうですか。どうやって解いたらよいのでしょうか。だれかわかりますか？

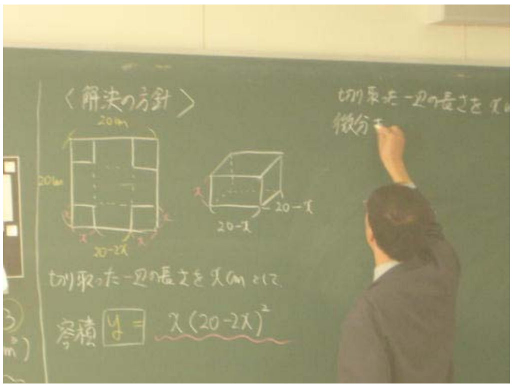
Ｔ：今四隅から同じ大きさの正方形を切り落とすわけです。そして，この点線のところで折り返して，こんな箱を作ります。あまりきれいに描けませんがいいですか。そうすると，何を求めればいいかな。（生徒を指名する。）

Ｓ：四隅の切り取った１辺の長さ。

Ｔ：はい，いいね。切り取る１辺の長さだね。これを求めればいい訳だね。これが，この問題の目標です。そこで，みんな適当に３ｃｍや４ｃｍや５ｃｍを切り取ったり，１ｃｍだった人もいるわけです。

授業の板書





ウ　課題追究の場面

Ｔ：これ（切り取った一辺の長さ）を何かで置くといいと思います。わからないところを何と置けばいいですか？　これをｘｃｍと置いてみましょう。

Ｔ：一辺が２０ｃｍの正方形です。わからないところ，ようするに，今求めたいところはここです。こちらの図でｘはどこになるかわかる？（生徒を指名する。）

Ｓ：高さ。

Ｔ：今何を求めたいかと言うと…

Ｓ：容積。

T：この箱の容積ってどうやって求める？
S：縦×横×高さ
T：この長さ（横）わかる？
S：２０－ｘ。
T：こっち（縦）は？
S：２０－ｘ。
T：こちらの図で考えましょう。
S：違う。
S：２０－２ｘ。
T：何で２０－２ｘ？
S：（手振りで）こっちとこっちを折り返すので。
T：こっちの図でいうと何ｃｍ？　同じ正方形を切り落とすのでね。今両方を折り曲げるので手でやってくれましたが，ここの長さは全部で２０ｃｍだから，２０－２ｘね。
T：ｘｃｍとして，あとはこの容積をどうやって計算する？　この図を見てわかる？
前の方の人はできてるね。ｘ（２０－２ｘ）^{2} ということです。今までやってきたことに結びつけたいので，これ（ｘ（２０－２ｘ）^{2}）を何かと置きたいです。
S：ｙ。
T：容積をｙとして，ｙ＝ｘ（２０－２ｘ）^{2} となって，１０月からやってきたことを思い出してもらって，これを何か計算していくと，わかることがあります。

エ　課題解決の場面

T：解決の方針を書くよ。切り取った１辺の長さをｘｃｍ，箱の容積をｙｃｍ^{3}として，何をすると求まるかというと，今まで自分でやってきたことですが，何でしょうか？どうですか？　自分でやることと言えば？
S：微分。
S：グラフ。
T：そうグラフね。グラフは正確でなくていいです。概形をかいて。そうすると，グラフの中のどこを読み取ればこの答えがわかる？（生徒を指名する。）
S：最大となるｘ。
T：そうです。ｙの値が最大となるｘの値を求めればよい。
T：解決の方針は，切り取った１辺の長さをｘｃｍ，箱の容積をｙｃｍ^{3}として，

微分を用いて，増減表をかき，この関数のグラフの概形をかき，yが最大となるxを求めればよい。後１０分しかないけれども，とりあえず自分で考えてもらって，後は班で考えてもらいます。１，２分各自で考えてもらいます。

T：後１分で考えて。

T：後９分しかないですが，班で考えてもらいます。机動かしていいよ。

T：たすきがけが，難しいかな。黒板でやってもらっていますが・・・。

T：机を前に向けて。それでは，ちょっと中途半端になってしまいますが，まず，自分のプリントみてよ。ほとんどの人が，ここ（下の計算）まではできているかな。

$$
\begin{aligned}
y &= x(20-2x)^2 \\
&= x(400-80x+4x^2) \\
&= 400x-80x^2+4x^3 \\
y' &= 400-160x+12x^2 \\
&= 4(100-40x+3x^2) \\
&= 4(3x^2-40x+100)
\end{aligned}
$$

その後のたすきがけで困っている人が多いので，たすきがけがここに書いてありますが，１年の時こう習った？

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \underline{-40} \\
3 & \times & -10 & \rightarrow & -10 \\
1 & & -10 & \rightarrow & -30 \\
\hline
3 & & 100 & &
\end{array}
$$

よって，$=4(3x-10)(x-10)$となって，これを$=0$と置いてxを

求めると，$x=\frac{10}{3}$，１０ になります。これは，３ｘ－１０＝０だから３ｘ＝１０で，$x=\frac{10}{3}$ ということです。

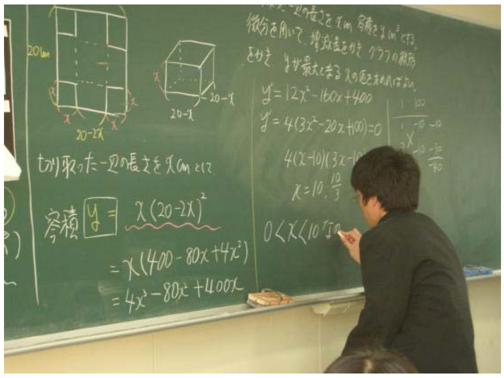
T：ちょっと厳しいけど，これ（０＜ｘ＜１０）どういうこと？

S：立方体を作らなければならないので，０以上でなければならないし，もし 10 にすると，１０と１０で何も残らないことになるので，せめて１ｍｍ位は残さなくていけないので，１０より小さい。

T：みんな言ってることわかる？　例えば１１ｃｍを切り落とすことなんてできる？

１０ｃｍ×１０ｃｍを切り落とすと箱できないでしょ。１０ｃｍより，ちょっとは小さくなければいけないよ。なのでｘ＝$\frac{10}{3}$となる。次の時間に，増減表をかいて，グラフをかいて，ｙが最大となるｘの値を求める。

T：後ろからプリント送って下さい。それでは，終わりましょう。

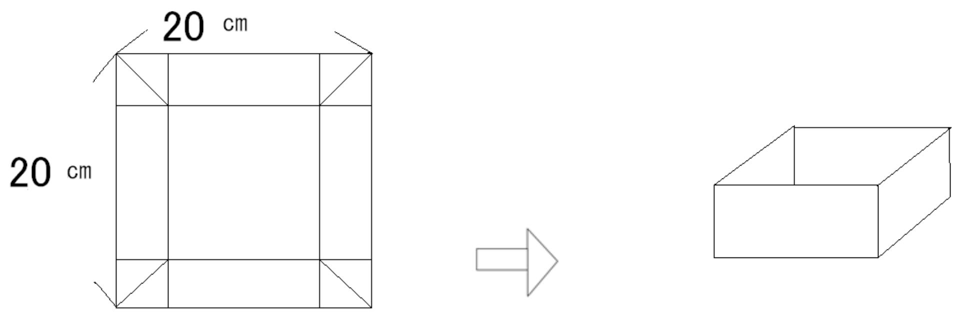


８　授業で活用したワークシート

授業で活用したワークシートは次ページの通りで，実際の用紙サイズは B4 である。

◎　砂金をたくさんもらおう！　①

　ある所では，箱を持っていくと，ちょうど一杯分の砂金がもらえます。
　ただし，その箱は，一辺２０ｃｍの正方形の紙を使って，その四隅から同じ大きさの正方形を切り取って作ったものでなければなりません。
　たくさん砂金をもらいたいあなたは，どのような箱を作りますか？実際に，たくさん砂金の入る箱を作ってみましょう。（別紙）



ズバリ当てましょう。

９　わかっていることをどのように把握したか

授業後に，小テスト及びアンケート調査を実施した。また，生徒のワークシート（プリント）の記述を，授業後に確認した。

（１）小テストの結果について

授業で扱った問題の数値を変えただけのもので小テストを実施した。
（平成 19 年 11 月 22 日実施;35 名回答）

> **＜問題＞**　１辺の長さが１２ｃｍの正方形の紙がある。いま，この４隅から１辺の長さがｘｃｍの同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない高さｘｃｍの箱を作る。この箱の容積を最大 にするには，切り取る正方形の１辺の長さをいくらにすればよいか。

結果は次の通りである。

解答例

箱の容積を $y\,\mathrm{cm}^3$ とする。

$y = x(12-2x)^2$

$\quad = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

$y' = 12x^2 - 96x + 144$

$\quad = 12(x^2 - 8x + 12)$

$\quad = 12(x-2)(x-6)$

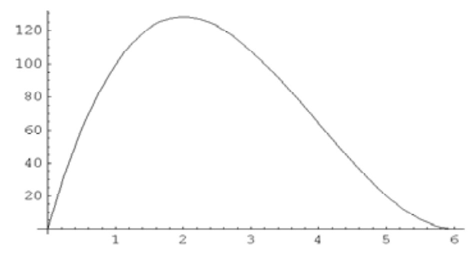
$y' = 0$ を解くと，　$x = 2,\ 6$

切り取る正方形の１辺の長さｘのとり得る値の範囲は，

$x > 0,\ 12 - 2x > 0$

より　$0 < x < 6$

この区間でｙの増減表をつくると



答え　２ｃｍ

分析結果

無答（白紙）；３人

解答の２ｃｍだけ書いた生徒；１人

下記のような誤答があった。

$(12-2x)^2$　；２人

$x^2 - 12$　；１人

$x(12-x)^2$　；３人

$x > 0,\ 12 - 2x > 0$　まで，解答した生徒；３人

増減表が書けた生徒は，８人。

ｘの範囲が解答できた生徒；６人

グラフが描けた生徒；４人

完全な正答が書けた生徒は１人。

（２）アンケート調査の結果について

アンケート調査の結果は下記の通りである。　（平成 19 年 11 月 22 日実施：35 名回答）

ア「今日の授業で，わかったことや気付いたことを書いてください。」という質問に対して，下記のような回答があった。

・勉強してきた微分が箱をつくるというので，「ああ，こうやって使えるんだ」ということがわかっておもしろかったと思います。（生徒 A）
・容積の極大値を微分で解くことができるということ。（生徒 B）
・微分の使われ方がイメージできました。（生徒 C）
・微分を使うことで，より大きな容積を求めることができ，便利だと思った。（生徒 D）
・自分の見た目で一番砂金がもらえそうだと思う箱と，計算してだした箱の大きさでは全然ちがうと思った。今までやってきた微分を使って計算していくと簡単に大きさが求められることがわかった。（生徒 E）
・中に入る量が，箱の形によって変わること。（生徒 F）
・全部同じ容積になると思っていた。（生徒 G）
・実際に箱を作ったのでわかりやすかったです。（生徒 H）

イ「今日の授業で，わかりにくかったことはどんなところですか。自由に書いてください。」という質問に対して，下記のような回答があった。

・なんで微分しなきゃいけないのかよくわからなかった。（生徒 I ）
・なぜあの問題で微分を使えば解けてしまうのかが，よく理解できなかった。（生徒 J ）

１０　本時がわかる授業であったかどうか

９に記述した小テストやアンケート調査の結果及び授業後の研究協議会での指摘を基に，本時がわかる授業であったかどうかについて考察した。

（１）アンケート調査の結果より

アンケート調査項目とその結果は以下の通りである。

今日の授業について，次に示すように１～４で自己評価し，右側の目盛りを○で囲んでください。

4　全くそう思う	3　そう思う	2　あまり思わない	1　全く思わない
（全くその通り）	（その通り）	（ややそうではない）	（全くそうではない）

①集中して授業を受けることができた。

選択肢	4	3	2	1
回答数	7	２３	4	1

②考えや解決法を自ら発見できた。

選択肢	4	3	2	1
回答数	2	１５	１７	1

③自分でよく考えた。

選択肢	4	3	2	1
回答数	6	２３	1	5

④学んだことの意味がわかった。

選択肢	4	3	2	1
回答数	3	１７	2	2

⑤答えの求め方がわかった。

選択肢	4	3	2	1
回答数	3	１７	2	2

⑥考え方がわかった。

選択肢	4	3	2	1
回答数	**3**	**１７**	**2**	**2**

アンケートの結果より，多くの生徒は，集中して授業を受けていたことが読み取れる。また，多数の生徒が自分で考えていたことがわかる。

３の「本時の授業でわかってほしいこと」との関わりについては，以下の通りである。　（１）の「問題の意味を把握する。」ことについては，全ての生徒が箱作りに積極的に参加している様子を観察することができ，更に各生徒が理想とする箱を作り上げることができたことと，アンケート調査の質問①の「集中して授業を受けることができた。」と回答した生徒が８５％以上もいることから，概ね全ての生徒が問題の意味を把握できたと考えられる。

（２）の「問題の解決の仕方を理解する。」ことに関しては，アンケート調査の質問⑤「答えの求め方がわかった。」や質問⑥の「考え方がわかった。」と回答している生徒がいずれの項目でも８０％以上もいることから，概ね問題解決の仕方は理解することができていたといえる。

（３）の「微分を用いることのよさを理解する。」ことに関しては，アンケート調査の質問④「学んだことの意味がわかった。」と回答している生徒が８０％以上もいることから，微分を用いることのよさは理解することができたと考えている。また，アンケート調査の結果の中に，下記の記述があった。

・微分を使うことで，より大きな容積を求めることができ，便利だと思った。（生徒 D）
・自分の見た目で一番砂金がもらえそうだと思う箱と，計算してだした箱の大きさでは全然ちがうと思った。今までやってきた微分を使って計算していくと簡単に大きさが求められることがわかった。（生徒 E）

このことから，微分を用いることのよさを理解することができたといえる。

（２）研究協議会より

研究協議会では，下記の意見が出た。（抜粋）

A：実は先ほどコピーをとらせていただいた学生のワークシートをみると，電卓を使ったのはかなり効果的であったのではないかと思う。本質的な数学的活動をしていた。K 君と Y 君という２人の男の子がいたが，最初からグループ活動のように２人でやっていたので，どんなことをやっているのだろうと見

た。最大となる値が割り切れる数なら，子どもが偶然見つける可能性があるが，$\frac{10}{3}$というのは割り切れない数なので，電卓でやることで限界がでてくると考えていた。授業の後で生徒に聞いたら，最初は切り取る長さが短い方が，容積が最大になると本人は思っていた。先生が５の場合をやったのを見ると，そちらの方が容積が大きくなっているので，３の場合はどうだろうとやっていって，３.３１２５までいって，グラフもイメージできて，だいたいそのあたりが答えになりそうだと予想をつけていた。先生の授業と並行して，実は２人でずっと調べていた。私は，高校でこういう授業をやるのが重要で，グループでやっていたのが非常に印象的でよかったと思った。たまたま，これをやっていたのが２人だけだったので，授業の最初に紹介されてもよかったかなと思う。こういう活動でつめていくのはいいけれど，正確な値がでないのでどうしたらよいのだろうかと感じた。割り切れる数にすると，また違った授業になったかと思う。

B：たまたま小学校で箱の体積が最大になるのをみつけるという授業を見た。そのとき研究会で議論になったのが，「これは高校生の微分の内容ではないか」ということであった。グラフをプロットしていくわけだが，ここが最大になりそうだというところまではいくが，その後ができない。高校になって，微分でなければとどめをさすことができない。おもしろい授業だった。

C：評価の話になると，今日の活動は何をねらうかということで，授業を受けようと受けまいとできるような小テストでチェックするのではなく，授業でやったことが身に付いたかどうかをみていくことが重要であると思う。

D：今日は微分だったが，その前に使うのは関数である。その関数が生徒はわかっていたのかが気になる。例えば，先生自身も最終的な目標は何かと聞いたときに，切り取る長さをｘといったり容積を最大にするところといったりしていた。「ｙ＝」と置くところは生徒から全然出てこなくて，結局クイズみたいに「なんだっけ」と言って思い出させる。あと，後半で「グラフから読みとれることは何か」と聞いているけど，生徒から返事がなかった。たぶん，あのとき生徒はグラフのイメージなんか全然ないから，どこを読み取ればいいと言われても，たぶんポカーンとする。せっかく箱を作らせたが，関数として，Y 先生がおっしゃったグラフのイメージをもっていたのはあの 2 人ぐらいで，他の子は自分の作った箱の容積を求めて終わっていた。何かワンステップあると，「関数に表してよかった」，「さらに今まで習ってきた微分を使うと最大値が求まる」という流れでいったのかなと思う。生徒の考えている部分と，先生が自分で考えている部分がちょっと離れているように感じた。

E：カリキュラムの関連で，関数として見ていなかったということは，この時間というよりもむしろ，これまでにそういう見方が身に付いていないことの証のような部分があるのかなと思う。先ほどのＫ先生のお話から，「微分ができるようになったから，これをやりましょう」みたいな日本の教科書になっているが，位置づけがもっと違うところにあるのかなと思う。もう一点は，授業を見ていて最後のところで，生徒が「たすきがけ」ができない様子を見てすごく感じたことだが，今までのカリキュラムは，微分がわかることがグラフをかくことの手法という位置づけになっている。しかし，この時代にそれでいいのか。結局グラフは電卓でかける。むしろ微分でわからせることは，その手法に慣れるというよりは，接線の傾きに着目していって，あるところで接線の傾きが０になるから，最大・最小になるということがつかめていればよい。それ以上のことは，理系でがんがんやる子はいいが，数Ⅱで終わる多くの子にはどうかなと考える。生徒が勢いよくやっていたのに，「たすきがけ」でパタッと止まってしまうのをみると，その辺のことを考える必要があるのかなと思う。

F：結果論だが，授業改善のことを考えると，このグループは３ｃｍ，このグループは４ｃｍとしてやれば時間的ロスも少ないのではないか。それをプロットしても，やっている内容は同じなので共通理解ができるのではないか。それで全体に出せば時間は短縮できる。

１１　わかっていないと見なされる例

（１）問題の意味を把握することについて

箱を作ったこともあって，ほぼ全員がわかったと考えている。

（２）問題の解決の仕方を理解することについて

このことに関しては，以下の通りである。

ア．解決の方針を示すこと

授業者が何回も説明したので，概ねわかったと考えている。

イ．容積ｙを切り取る一辺の長さｘの式で表すこと

この単元以前の「式の展開」ができないために，そこで解答が止まってしまった生徒が数名いた。

ウ．微分を用いて増減表をつくり，グラフの概形を描くこと

イ．と同様に，この単元以前の「因数分解（たすきがけ）」ができないために，そこで解答が止まってしまった生徒が数名いた。

エ．グラフの概形から，容積が最大となるｘの値を読み取ること

グラフの概形がかけた生徒については，容積が最大となるｘの値を読

み取ることが出来たと考えられる。

オ．変数 x の範囲を表すこと

授業者が何回も説明したので，概ねわかったと考えている。

（３）微分を用いることのよさを理解する

このことに関しては，数名であるが，以下のような感想を書いた生徒がいた。

・なんで微分しなきゃいけないのかよくわからなかった。（生徒Ｉ）

・なぜあの問題で微分を使えば解けてしまうのかが，よく理解できなかった。（生徒Ｊ）

少なくとも，この２人の生徒は，わかっていないと考えられる。

１２　わからない生徒への対応

まず，式の展開や因数分解（たすきがけ）ができない生徒に対しては，簡単な問題（プリント）を与えて，練習をした。次に微分を用いることのよさを理解する点に関しては，この研究授業の次の授業で，再度同じ内容をゆっくり説明した。

１３　研究資料

特になし。

１４　本単元において，よく見られるつまずきとその原因および克服のための指導例

「微分とは何か？」と聞くと，「指数を前に出して，その指数－１を，その指数のところに書く。」と解答が返ってくることがある。このことから，微分の計算ができても，微分とは何かがわからない生徒が多くいることが予想される。

本時で扱う教材は，微分・積分の単元の中でも，身近な事象に結びつけることが可能で，多くの生徒が興味を示してくれるものであると考えている。ただ，本時の題材を扱うとき，多くの授業は，微分の計算のみに力点がおかれた授業展開が一般的になると考えられる。しかし，数学的活動を通して問題を実感させることにより，今まで以上にこの問題を身近なものに感じさせ，さらに問題に取り組む姿勢を強固なものにできると考えている。

繰り返しになるが，この授業では，「微分の応用」として，「容積が最大となる箱の作成」の問題を扱った。すなわち，「閉区間における３次関数の最大値」を追究させた。その際，実際に箱を作成させて，電卓を用いて容積を求めさせた。そして，容積が最大となる値を追究するという体験を通して，微分の必要性とその有用性を感じさせることができた。

表・式・グラフをもとに関数の値の変化を調べること
～ＩＣＴを活用して～

逸見　幸弘
藤村女子中学高等学校

１　校種・領域など

・領域　　関数
・校種　　私立中学校　　藤村女子中学校
・学年　　中学３年
・単元　　$y=ax^2$　の導入

２　小中高種間の接続及び校種間の接続　学びの系統

関数を学習する目的は，さまざまな変化の現象から，ともなって変わる量を取り出し，変化の様子を表・グラフ・式に表して，その変化の様子を考察することにある。

中学では，第１学年で比例と反比例，２年で１次関数，３年で$y=ax^2$ と学習を進めていく。そのうえで，高校では数学Ｉで２次関数，数学Ⅱで三角関数，指数関数，対数関数などのいろいろな関数，微分と積分と学習を進めていく。

関数の学習において，変化の割合（平均変化率）についてみると，中学１，２年で学習する比例と１次関数では,変化の割合が一定である直線的な変化であったものが,関数　$y=ax^2$　では変化の割合が変わっていき，頂点をはさんで増加と減少が変化する。そして，高校では，変化の割合の考え方を発展させ，微分の考え方に進んでいく。

しかし，実際の指導においては，高校数学Ⅱの微分の学習において，微分係数から関数の値の変化（増加・減少）に注目するが，そこまでは，関数の式とグラフのあらわす図形についての学習に力点がおかれる傾向があり，変化の様子を考察することが弱い傾向がある。

そこで，中学３年で関数　$y=ax^2$　の学習するまえに，具体的な問題のなかで関数を考え，その式・表・グラフを考察し，グラフから変化の様子を考えることをねらいとした。

また，中学３年での$y=ax^2$，および高校の数学Ｉにおける二次関数，数学Ⅱにおける微分の学習において，最大値・最小値（極大・極小）への接続を考慮し，グラフにおいて極大となる周辺の増加・減少について理解させることもねらいとした。

３　本時の授業でわかってほしいこと

具体的な問題の中で関数を考え，その値の変化の様子をどのように考えるのか，授業を構成してみた。本時の授業でわかってほしいことは次の通りである。

「関数の値の変化に注目する」
ア　関数の表を作成し，その表からグラフを作成し関数の値の変化を理解する。
イ　関数の最大値を求める問題を通して，関数の値の増加・減少を理解する。
ウ　関数の表し方として，式・表・グラフの３つがあることを確認する。

中学・高校での関数の学習においては，関数の式からグラフがどのような直線，または曲線になるのかが，学習の中心になっている。特に中学では一次関数の学習において，変化の割合について学習し，関数の値の変化について学習する。しかし，グラフの直線の傾きと切片からグラフをかく学習が中心であり，関数の式ｙ＝ａｘ＋ｂとグラフの表す直線の関係についての学習が多くなる。

そこで，グラフが曲線となる関数$y=ax^2$を学習するにあたり，始めに関数について学習したときのように，関数の値を求め，その値からグラフの点をプロットしてグラフの概形を調べ, 関数の値の変化の様子を理解できるようになることを目指した。

１次関数の学習において,「式」と「グラフ」との関係に関心がいきがちだった関数の学習において，値の変化を調べるために，まず「表」の作成から始め，そこからグラフを作成し，関数の最大値を求めるという問題を通して，関数の値の変化について理解させたい。

そして関数の表し方として，式・表・グラフの３つがあることを確認し，今後の関数の学習に対して，関数の見方を理解させたい。

４　指導上の工夫

(1)「正方形の箱に四隅を切り取り，箱を作る」という，具体的な課題を設定し，問題に取り組みやすくする。

(2)　実際に箱を作る作業を通して, 興味関心を持って授業に取り組めるようにする。また，切り取る部分の大きさを変えると箱の体積が変化することに気がつかせる。

(3)　電卓などを用いて，具体的な計算はできるだけ簡略にできるようにすませ，詳細なグラフの形などは，パソコンのグラフ作成ソフトを使い表示して見せて，値の変化や最大値の意味をグラフから考えられるようにする。

また，今回の授業は２時間連続の授業であったため，前半の１時間を作業やできあがった箱の大きさの観察に十分な時間を配分できた。

５　本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，またその特徴

本時の授業は，以下の「わかる授業の項目」にあてはまると考えられる。

項目	授業の特徴
「わかる対象の明確化」 ・ 関心・意欲・態度または価値観 ① 面白さ・楽しさ ② 有用性（活用・利用） ③ 意味と必要性，意義 ・ 思考・判断 ① 数学的な見方や考え方	日常生活の中の問題を取り上げ，箱の容積の最大値を追求させる。 面積を調べて表を作成し，その結果からどのようにグラフをかくのが適当なのか。また，そのグラフから，関数の値の増加・減少の変化，最大値をどのように判断すればよいかを考える。
「わかるための工夫」 ・数学的活動の充実 ・子どもの学習活動の工夫 観察・操作・実験の実施 ・教具の活用 ＩＣＴの活用 ・授業形態の工夫 ① 習熟度別　　② 少人数	実際に，立体の箱を作る作業を通して，ともなって変わる量を見つけ，その変化の様子を表，グラフ，式に表し，その関連を考察する。 パソコンのグラフ作成ソフトを使い関数のグラフをかく。今回はプロジェクターを用いてグラフを表示し，そのグラフの考察をする。 本校では，数学の授業は２クラス・３展開の少人数，習熟度別クラス編成でおこなっている。今回の授業は生徒数１３人，習熟度の最も低いクラスでの実施である。 習熟度の低い生徒にも取り組みやすいように，数値計算などの複雑なものはなるべく使わずにできるように，教材を工夫した。

６　学習課題設定の意図

今回の授業では，次の課題を設定した。

課題 １辺が１５㎝の正方形の紙がある。いま，この四隅から同じサイズの正方形を切り取り，ふたのない直方体をつくる。直方体の容積を最大にするには，切り取る正方形の１辺の長さを何㎝にすればよいか。

この課題は，次のことをねらいとして作成した。

「実際に作業を通して箱を作り，箱の容積の変化することが理解できる。」

生徒一人一人が実際に箱を作り，切り取る正方形の１辺の長さを変えると，箱の大きさが変わることが体感できる。それぞれの生徒に何種類か箱を作り，箱の容積を求める立式が難しい生徒にとっても，それぞれの容積を求め，それを表にまとめ，その表からグラフを作成することができる。

また，表と，その表から作成したグラフを用いて，最大値を求めようとすることにより，関数の値の変化（増加と減少）をグラフから推測し，そして最大値の近くではグラフがなだらかな山のようになることを理解させたい。

今回の授業は，習熟度の低いクラスで授業をおこなうので，複雑な計算や処理を避けて，生徒が意欲的に授業に取り組めるような課題となるように工夫した。

７　具体的展開

(1)　学習指導案

【１時間目】

段階	指　導　内　容	指導上の留意点および評価
導入 (10)	課題１　　砂金をたくさんもらおう！ 「あるところでは，箱を持って行くと，ちょうど一杯分の砂金がもらえます。ただし，その箱は，一辺１５㎝の正方形の紙を使って，その四隅から同じ大きさの正方形を切り取って作ったものでなければなりません。 　たくさん砂金がもらいたいあなたは，どのような箱を作りますか？実際に，たくさん砂金の入る箱を作ってみましょう。」	・問題文の意味を理解できない生徒もいるので，授業者が問題文を丁寧に読み，生徒とのやりとりを通して解説する。

	・課題を提示して，問題の内容を把握する。	
	・マス目のある折り紙(15 ㎝× 15 ㎝)を配布して，生徒にいろいろな大きさの箱を作らせる。 ・生徒が作成した箱をいくつか提示して，箱の大きさを比較し，どのような箱が一番大きくなるか考えさせる。 ・生徒が作成したいろいろな大きさの箱の容積を計算する。(電卓なども利用してどんどん計算する。) ・箱の容積を計算させた結果から，切り取った正方形の１辺の長さをｘ(㎝)，箱の容積をｙ(㎝)として，ｘとｙの値を表にまとめる。 ・表の結果をグラフ用紙にプロットする。そのプロットした点を線で結び,グラフを作成する。 ・ｘとｙはいろいろな値をとり，ｘの値が変わるときｙの値が変化することから「ｙはｘの関数である」ことを確認する。	・箱の作り方がわからない生徒もいると考えられるので，丁寧に作り方を指導する。 (評価)積極的に，作業に取り組んでいるか。 (関心・意欲・態度) ・箱の高さが高ければ底面が狭く，高さが低ければ底面は広いことをわからせる。 体積を計算するとき，切り取った正方形の１辺の長さと，箱の高さ・底面の正方形の１辺の長さをそれぞれ考えて，丁寧に計算させる) ・作成した表から，どの箱が一番大きいかを確認する。 ・プロットした点を線で結ぶとき，直線で結ばないように注意する。中学１年で反比例を学習したときと同様に，すべての点を通るようになめらかな曲線で結ぶことを注意する。 (評価)ｘの値を変化させると，ｙの値が変化することが理解できているか。(数学的な見方・考え方)

	・ｙをｘの式で表す。 切り取る正方形の１辺の長さをｘとすると，できあがる箱の高さはｘ，底面の正方形の１辺の長さは １５－２ｘ となるので $y=x(15-2x)^2$ と表すことができる。 ・・・２時間目に続く。	・関数を表すのに，表・グラフ・式の３つがあることを確認する。 ・式で表すことが苦手な生徒が多いので，丁寧に導いていく。

【２時間目】

段階	指　導　内　容	指導上の留意点および評価
導入 (10)	・関数の式がわかったので，パソコンの表計算ソフトを利用して，いろいろなｘの値に対するｙの値を調べてみる。	・表計算ソフトは事前にこの関数の値が計算できるように，関数の設定をおこなっておく。 また，表計算ソフトの機能をよくわからない生徒もいるので，いくつかの値を入力したりして，簡単に機能を説明する。 またパソコンの画面をプロジェクターを使って提示し，パソコンの操作は教師がおこなう。
	・１時間目に調べた表の結果から，ｘ＝３のときが最大になるが，グラフ用紙にプロットした点を結んだ結果から，ｘ＝２とｘ＝３の間に最大値が存在しそうだと予想できる。	

展開 (30)	・グラフの　ｘ＝２とｘ＝３の間をさらに正確にグラフを作成するために，その区間の関数の値を計算する。 　ｘ＝２からｘ＝３まで 0.1　刻みでｙの値を調べてみる。 　さらにｘ＝ 2.49 やｘ＝ 2.51 などのときのｙの値を確認し，やはりｘ＝ 2.5 のときが最大であると確認する。 ・以上の調べた結果より，ｘ＝ 2.5 のとき最大となり，最大値はｙ＝ 250 となる。 　このことを理解して，もう一度グラフをかいてみる。 ・グラフ作成ソフトを利用して 　　$ｙ＝ｘ（１５－２ｘ）^2$ のグラフを表示して，生徒がかいたグラフと比べてみる。 「最大値の近くはなだらかな山のようになっている」ことを確認する。そして，「なめらかな曲線のグラフでは，最大値の周辺ではグラフの曲線がだんだん平らになっていく」ことを理解させる。 練習 　一辺が２０㎝の正方形の紙から，四隅を同じ大きさの正方形を切り取り，箱を作る。 　このとき，切り取る正方形の一辺の長さをｘ（㎝），箱の容積をｙ（$㎝^3$）として，表を完成させ，グラフをかきなさい。 ・できた表とグラフから，容積の最大値を予想する。	・ｘ＝２．５のときが一番大きいことを確認する。 ・最大値のあたりでグラフがどのような曲線になるかを考えさせる。 ・表計算の画面を見せたときと同様に，グラフ作成ソフトがどのような機能があるのかを，簡単なグラフなどを見せて説明してから，課題のグラフの説明をする。 ・計算に手間取っている生徒には，表の作成まではどんどん教師が補助して，グラフの作成に取り組めるようにする。 ・正確にはｘ＝ 10 ／３のときが極大であるが，この判断は生徒には難しい。ｘ＝３とｘ＝４の間のどのあた

		りが最大になるか考えさせる。 （評価）学習した内容を活用して問題に取り組んでいるか。（関心・意欲・態度） （評価）表の作成が正確に計算できて，グラフをかく際に極大値の周辺をなめらかな曲線でかけているか。（表現・処理） （評価）グラフの極大値の周辺を正しく推測できるか。（見方・考え方）
まとめ（10）	・今日の授業を振り返る。 どのようにｘ，ｙの値が変化するのか調べるためには，表やグラフをつくって調べればよい。 変化の様子を調べれば，最大値などが求められる。 今日の授業は，表とグラフを中心に変化の様子を調べることをおこなった。 この変化の様子を調べるのが関数の大事な勉強であり，関数を表すのには，表・グラフと式の３つの表し方がある。	・また，最大値の周辺ではグラフはなめらかな山になっており，最大になるのはその山の頂点であることにも触れたい。

(2)　実際の授業の流れ

【１時間目】

実際に箱を作る作業は順調にいった。切り取る正方形の大きさを色々と変えた箱を見せて大きさを比べるとき，はじめは単純に見た目だけで大きさを比較していた。それぞれの大きさを計算する際に，計算に手間取る生徒には教師が計算の補助をして，グラフをかく作業に進ませた。

グラフをかくときに，プロットした点を直線で結ぶ生徒もいたが，注意をすると全員がなめらかな曲線で結ぶことができた。

この段階で，生徒がかいたグラフから箱の大きさの最大値を求めさせると，ｘ＝３

のときと考える者もいた。

関数の式を求めるときには，切り取る正方形の１辺の長さをｘ（㎝）としたとき，底面の正方形の１辺の長さが，なかなか求めることが難しく，教師が丁寧に途中の式を順序よく説明することが必要であった。

【２時間目】

関数の値がｘ＝２からｘ＝３の間のときの計算を表計算ソフトを使って計算した。生徒がパソコンの操作に習熟していれば，パソコン教室で生徒自身がいろいろなｘの値の時のｙの値を計算することも考えられる。しかし，生徒はパソコンの操作に慣れていないと思われたので，今回は教師がパソコンで表計算ソフトを使って計算し，その画面をプロジェクターを使って生徒に見せながら説明した。ｘ＝ 2.5 の周辺の値をあてはめて計算することにより，ｘ＝ 2.5 のときに最大になることは，ほとんどの生徒は理解できたようである。

ｘ＝ 2.5 のときに最大となることを確認してからかかせたグラフでは，ほとんどの生徒が頂点の付近の曲線の様子など正しいグラフをかいていた。

グラフ作成ソフトで正しいグラフをプロジェクターを使って教師側で表示したが，表計算ソフトの使い方と同様に，生徒自身に操作させて使わせることができればよいと思う。

表計算ソフトやグラフ作成ソフトのように，単に計算するとか，式からグラフをかく，というようなことはパソコンでできることであるので，グラフを読み取る，グラフから判断する，ということが大切であることを生徒には強調した。

最後の練習問題は時間的に難しかったので，数値の計算はほとんど教師側で手助けしたが，グラフはほとんど正しくかけていた。しかし，最大になるのが 10 ／３という値になるのは難しかったようである。

８　授業で活用したワークシート

①

ミッション　その１

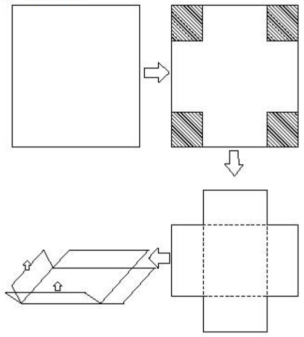
砂金をたくさんもらおう！

ある所では，箱をもっていくと，ちょうど一杯分の砂金がもらえます。ただし，その箱は，一辺１５㎝の正方形の紙を使って，その四隅から同じ大きさの正方形を切り取って作ったものでなければなりません。

たくさんの砂金をもらいたいあなたは，どのような箱を作りますか？実際に，たくさんの砂金の入る箱を作ってみましょう。

みんなで箱を作ってみよう？

※　箱の作り方



②

あなたの作った箱の大きさはいくら？

・・・次の手順で，箱の大きさを計算してみましょう。

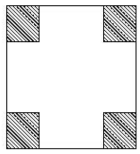
① あなたの作った箱の高さは何㎝ですか。

② あなたの作った箱の底面積は何㎝^{2} ですか。

③　あなたの作った箱の大きさ（容積，体積）は何㎝^{3} ですか。

このようにして箱をつくるとき，箱の大きさを次のようにして考えてみましょう。

切り取る正方形の１辺の長さをｘ㎝とします。



・ｘ＝１㎝　のとき
①　箱の高さは？
②　箱の底面積は？
③　箱の大きさは？

・ｘ＝２㎝　のとき
①　箱の高さは？
②　箱の底面積は？
③　箱の大きさは？

・ｘ＝３㎝　のとき
①　箱の高さは？
②　箱の底面積は？
③　箱の大きさは？

③

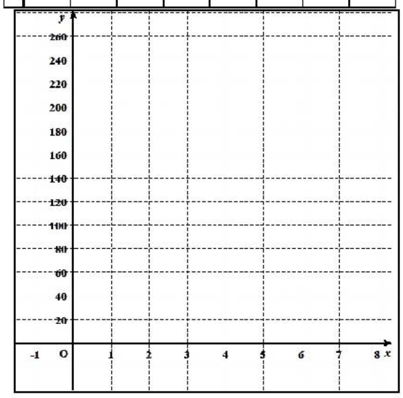
計算した結果を表にまとめてみよう！

・・・切り取る正方形の１辺の長さがいろいろと変わるとき，箱の大きさは変わっていきます。

その変化の様子を表にまとめてみましょう。

切り取る正方形の１辺の長さをｘ㎝，そのときの箱の大きさをｙ㎝^{3} として，表に数値をかきいれましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								



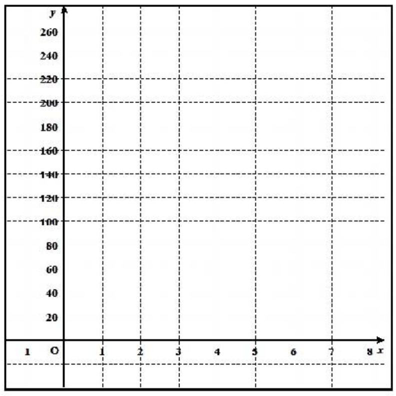
④

ｘの値がいくつのとき最大になるのでしょうか？

ｘ＝２からｘ＝３の間の値を調べてみましょう。

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
y											

ここまで調べたことをもとに，もう一度グラフをかいてみましょう。



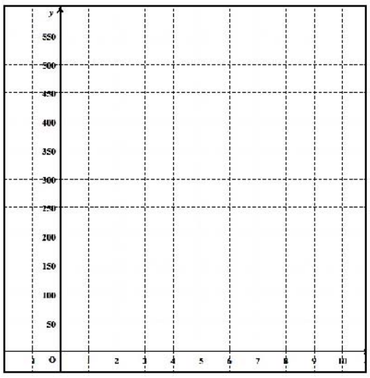
⑤

それでは，次の問題をやってみましょう。

問題

一辺が２０㎝の正方形の紙から，四隅を同じ大きさの正方形を切り取り，箱を作ります。このとき，切り取る正方形の一辺の長さをｘ（㎝），箱の容積をｙ（㎝³）として，次の表を完成させ，その結果からグラフをかきましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 0
y											



このワークシートの他に，授業の最初に１辺が１５㎝の正方形の紙（１㎝の方眼が入った上質紙）を２枚ずつ配り，箱を作るのに使った。

９　わかっていることをどのように把握したか

本時では，次の２点でわかっていることを把握した。

(1)　授業後にわかる科研で作成した共通アンケートを実施

アンケートの内容は以下の通り

「何を学習するかが明確な授業だったか」

「先生の説明がわかりやすい授業だったか」

などの授業についての感想

「わかったことや気付いたこと」

「わかりにくかったこと」

を自由記述

「集中して授業を受けることができたか」

などの生徒の自己評価

(2)　授業中の取り組みの様子

授業中の生徒の様子を確認したが，授業中の様子をビデオ撮影しておいたものを授

業後に確認した。

１０　本時がわかる授業であったか

授業後にアンケートをおこない，約７０％の生徒がわかりやすい授業だった，よく理解できる授業だった，と回答した。

また，アンケートの生徒の自己評価も「集中して授業を受けることができた。」「自主的・意欲的に取り組むことができた。」「予想（予測）を立てて取り組むことができた。」「自分でよく考えた。」などの項目で多くの生徒が「全くそう思う」，「そう思う」と回答した。

生徒は授業に積極的に取り組んでおり，作業や計算など，面倒がってあまりやりたがらない生徒が多いのだが，この授業はよく取り組んでいた。また，最後の練習問題もほとんどの生徒がよくできていた。

以上のことから，わかる授業であったと判断してよいと考える。

ただし，授業後のアンケートにおいて「今日の授業でわかったことや気づいたことを書いてください。」（記述式）の質問については，未記入の回答が多かった。教師の指示に従って手順を追って考えたり，問題を解いたりはできるものの，学んだことを表現するということはなかなか難しいようである。特に本時の授業においてわかって欲しいことが，関数の値の変化をどのようにとらえるか，というような抽象的な考え方を含んであるため，「わかったことや気づいたこと」を表現するのが難しいのではないかと思う。

１回の授業だけで，関数の見方や考え方が身につくわけはないので，関数の学習のいろいろな場面で何回も指導していくことが必要だろう。

１１　わかっていないと見なされる例

今回の授業では，箱を作ることや箱の大きさを計算する，などの作業を多く用いた。生徒が意欲的に授業に取り組めることをねらってのことであるが，その作業や計算で手間取る生徒にとっては，そこでいっぱいになってしまい，グラフの見方やそこから何を考えればよいのか，というところまでなかなか進めないでいた。今回は特に習熟度の低い生徒のクラスで授業を実施したということもあり，意欲的に取り組めるように，また作業を通して学習内容が理解できることなどを目的とした作業や計算に手間取り，なかなか先に進めない生徒が何人かみられた。

１２　わからない生徒への対応例

上記「わかっていないと見なされる」生徒に対しては教師が適宜補助をして，作業や計算をはやく終わらせ，次のステップに進められるように援助した。

また，１０の「本時がわかる授業であったか」にも書いたが，「わかったことや気づいたこと」を表現するのはなかなか難しいので，１回の授業だけでなくいろいろな場面で指導していくことが大切であろう。

１３　参考資料

特になし

１４　本指導単元においてよく見られるつまずきとその原因，及び克服のための指導例

関数の指導においては，表，グラフ，式のバランスのとれた指導が大切である。学習の中心が「関数の式」から「グラフの形」を理解することにいっており，関数の値が変化する様子の理解が十分でない。特に一次関数では変化の割合が一定の関数であるが，生徒にとっては，それが単にグラフが直線，という認識しかできない。

一次関数のような変化の様子が単調な関数の学習する前後に，今回の指導案のような複雑な関数を学習することにより，一次関数の変化の様子が単調であるということのメリットが生徒にしっかりと理解できるのではないかと考える。

微分の導入の指導と評価

八　田　弘　恵
渋谷教育学園幕張中・高等学校

１　領域・校種など

領域　　解析
校種　　私立中高一貫校（普通科）
学年　　高校１年
科目　　数学Ⅱ
単元　　微分の導入

２　小中高校種間の接続：学びの系統

関数を学習する意義として，さまざまな変化の現象から，ともなって変わる量を取り出し，変化の様子を表・グラフ・式に表して，未知の部分を予測することが挙げられる。中学校では，関数の変化の割合を扱い，高校では，平均の速さ→瞬間の速さ→平均変化率→微分係数→接線の傾き→導関数→関数の増加・減少→極大・極小→関数の利用→微分の応用という流れで指導されることが多い。

今回の研究授業では，このような中・高の接続に配慮し，微分の概念を大局的に理解させることがねらいである。具体的には，「微分の導入」として，「箱の問題」すなわち，「３次関数の最大値を求める課題」を追究させた。その際，表・グラフ・式に表して，変化を考察させ，中学で学習した「変化の割合」の考えを基にして，微分係数の考えを直観的に知ることをねらいとして授業を展開した。また，未習の３次関数の最大値を求める際に，グラフを自由にかかせ，ｘ＝２とｘ＝３の間のグラフを細かくとって追究するという作業と，微少な変化を追究するという体験を通して，中２で学習した「変化の割合」を思い出させた。そのような数学的活動を通して，最大値のところでは，接線の傾きが０になるという直観的な発想をする生徒が多く表れた。さらに，２次関数のグラフで，ｘ＝１における接線の傾きを平均変化率の近づく値として実際に計算させた。微分係数の意味を知る上で，３次関数での微分係数の計算は壁が厚く，展開や計算が困難な生徒も存在するので，「２次関数」での微分係数を扱ったのは有効であった。

この授業の後は，大局的に理解した微分の概念を，中学で学習した「平均の速さ」と「瞬間の速さ」を 再度微分の考えを基に扱い，この授業で紹介するにとどめた $f'(a)$ の考えを「導関数」として取り上げ，明確に定義した。

本校は中高一貫校で，次のように中・高の接続に配慮して，関数領域を学習している。

中学１年：比例・反比例・１次関数

中学２年：２乗に比例する関数・いろいろな事象と関数

中学３年：数学Ⅰの２次関数　数学Ⅱの三角・指数・対数関数

高校１年：数学Ⅱの微分・積分

本時の授業は，高校１年の微分の導入にあたる。

数学Ⅱ　６章　微分法と積分法

第１節　微分係数と導関数

１　微分係数　3h（本時は導入の１・２時間目）

２　導関数　3h

３　本時の授業でわかってほしいこと

本時の授業でわかってほしいことは，次の通りである。

「微分法の**必要性**と**意味**を知る」

ア　関数の増加・減少が微分係数という局所的な考え方から導かれることを知る。

イ　関数の値の変化の状態を調べるのが微分法の目的であることを知る。

ウ　関数の最大値を求める方法を知る。

ア～ウを通して，微分とは，微少な部分の変化の様子をとらえていくことであることを理解させる。

「微分とは何ですか」と高校２年生を終了した本校の生徒のアンケートの結果,「計算や解き方はわかるが，微分の本質はわからない」と答える生徒が多い。さまざまな変化の現象から，ともなって変わる量を取り出し，変化の様子を表・グラフ・式に表して，未知の部分を予測することは関数を学習する意義である。数学Ⅱの「微分」では，平均変化率，微分係数，導関数，関数の増加・減少，極大・極小，微分の応用という流れで学習していく。しかし，ひとつひとつの学習内容を理解していても，微少な部分の変化の様子を微分という新しい発想で解いているといった新鮮な感動と大局的な微分の概念の理解が生徒には乏しいと感じる。

本時の授業では，微分の応用に使われる課題を微分の導入に取り上げ，微分法の全体像を最初につかませること，課題を解決することで，微分の概念を大局的に知ることをねらいとした。さらに，本時の授業以降，微分の授業で微分係数・導関数・極大・極小という学習材料を厳密に扱うときに，それらを理解するときに，本時の授業での体験が学習場面で有効に働いていくことをねらいとした。

4　わかる授業の工夫

(1)　教材の工夫

①　実際に作業が入り，興味関心を持つ日常の題材を設定し最大値を追究させる。

②　最大値を求めるのに，生徒が容易には結論を判断できない数値を工夫する。

(2)　学習過程の工夫

①　具体的な事象の追究を通して，表やグラフを用い，電卓を使用して計算したり，生徒自らが試行錯誤しながら活動する場面とじっくりと考える場面を設定する。

②　課題追究の際，生徒の予想や誤答を活かし，生徒同士のコミュニケーションの場面を設定する。

③　試行錯誤しながら活動する際，タイミングよく課題追究の本質にせまる生徒の意見を促すような発問をする。

5　本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，また，その特徴

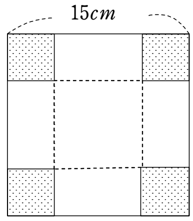
本時の授業は，以下の「わかる授業の項目」にあてはまると考えられる。

項目	授業の特徴
わかる対象の明確化	
・関心・意欲・態度または価値観 ①面白さ・楽しさ ②有用性（活用・利用） ③意味と必要性，意義	日常生活の中の問題を取り上げ，箱の容積の最大値を追究させる。
・概念・原理・法則 ①仕組み・成り立ち	課題を解決することで，微分の概念を大局的に知らせる。
わかるための工夫	
・数学的活動の充実 ・子どもの学習活動の工夫 観察・操作・実験の実施	課題追究の際，ともなって変わる量を取り出し，変化の様子を表・グラフ・式に表して，未知の部分を予測しながら，試行錯誤する活動をさせる。
・表現させる コミュニケーション・発表・討論 ワークシートの工夫	課題追究の際，生徒の予想や誤答を活かし，生徒同士のコミュニケーションの場面を設定する。 ワークシートに自分の考えや予想を書かせ，また，目盛りを与えないグラフを使用させる。
・発問の工夫	試行錯誤しながら活動する際，課題追究の本質にせまる生徒の意見を促すような発問をする。
・接続	微分係数の考えを既習の２次関数で考

既習内容と関連づける	察し理解させる。

６　学習課題設定の意図

授業では，(1) (2) をねらいとして，次の課題を設定した。

課題　１辺が 15cm の正方形の紙がある。 いま，この４隅から同じサイズの正方形を切り取り，ふたのない直方体をつくる。直方体の容積を最大にするには，正方形の１辺の長さを何 cm にすればよいか。 

(1)　実際に作業を通して箱を作ることができ，変化が観察できる。

微分を導入するときに，平均の速さと瞬間の速さを扱うことがあるが，実際に変化を生徒自身が体験することがなく，微少な変化をとらえているという実感が乏しい。この素材だと，式を作ることが困難な生徒がいる学校でも直方体を作るという作業が入れば，何を追究しているか生徒には明確になる。実際に授業をした学校では，すべての生徒が立式できたので，グラフ上での課題の追究が生徒の主な活動になった。

(2)　最大値を求めるのに，正方形の１辺の長さが生徒が容易には結論を判断できない数値を工夫し，微少に変化するものに，興味関心をいだかせる。

実際には，直方体の容積が最大になるのは，正方形の１辺の長さが 2.5cm のときである。正方形の１辺の長さを x cm とし，直方体の体積を y cm^3 とすると， $x=2$ のとき $y=242$， $x=3$ のとき $y=243$ となり，直観的に 2.5 と考えている生徒や，グラフで追究している生徒が，その微妙なちがいに興味関心を持つ。生徒は， $x=2$ と $x=3$ の間を 0.1 きざみ，0.01 きざみで計算し，微少な変化を主体的に追究しようとした。

7　具体的展開

(1)　学習指導案

【１時間目】

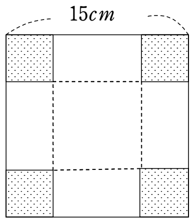
<table>
<tr><th>学習活動</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>

(1)　課題提示

<table><tr><td>

課題

１辺が 15cm の正方形の紙がある。
いま，この４隅から同じサイズの正方形を切り取り，ふたのない直方体をつくる。
直方体の容積を最大にするには，正方形の１辺の長さを何 cm にすればよいか。



</td></tr></table>

① 予想させる。（WS1）
予想される答
・底面積が大きい方がいいから 1cm
・縦・横・高さが等しい立方体が一番大きいと思うので
15 ÷ 5 ＝ 5cm　体積は 5 × 5 × 5 ＝ 125cm ^{3}

</td><td>

・ワークシートのマス目をいれた正方形で考察させる。

</td></tr>
<tr><td>

(2)　課題の追究
②　課題１を追究させる。（WS2 に記述する）
③　どのようにして最大値を求めればよいか発表させる。
・正方形の１辺を xcm として式を作る。

$$f(x)=x(15-2x)^2=4x^3-60x^2+225x$$

・切りとる正方形の１辺の長さを xcm，直方体の容積を ycm ^{3} として対応表を作る。

<table>
<tr><td>x（cm）</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>7.5</td></tr>
<tr><td>y（cm ^{3} ）</td><td>0</td><td>169</td><td>242</td><td>243</td><td>196</td><td>125</td><td>54</td><td>7</td><td>0</td></tr>
</table>

</td><td>

評価
課題の意味を理解し，自分なりの解決の見通しを立てているか。
・定義域を確認しておく。
評価
表・式・グラフで変化を考察しようとしているか。

</td></tr>
<tr><td>

④　生徒の多様な追究
T： x ＝ 3 のときが最大になるだろうか？
・２と３の間を細かくとって計算し調べる。

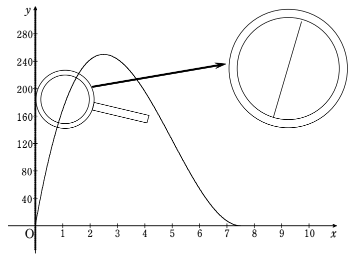
<table>
<tr><td>x（cm）</td><td>2</td><td>2.2</td><td>2.4</td><td>2.6</td><td>2.8</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y（cm ^{3} ）</td><td>242</td><td>247.192</td><td>249.696</td><td>249.706</td><td>247.408</td><td>243</td></tr>
</table>

・グラフを 0.1 刻みでかき，その隙間の点を考察する。
・2.5 近くで最大のようだ。
・３次関数のグラフは２次関数と違って対称ではない。

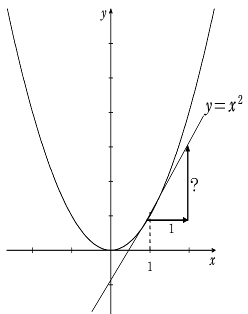
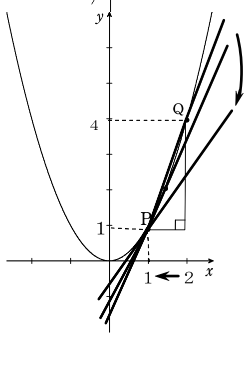
</td><td>

・電卓を使用させる。
評価
微少なところの変化をとらえようとしているか。

</td></tr>
</table>

⑤ グラフの傾きを求める T：グラフの山の頂点となる点を見つければ良い。グラフの一部を拡大すると，だいたい直線になることを説明する。  ⑥ 追究の過程で生じた課題を既習の知識で解決する方法を発表させる。 T：最大のところのｘを見つけるにはどうしたらいいか？ ・グラフの山は一瞬平らになっているはずだ。 ・直線の傾きが０になっているｘの値を探せばよい。 ・接線の傾きが０になっているところだ。	

【２時間目】

学習活動	指導上の留意点
⑦ 前時の授業の確認 ・最大値をとるｘの値を 2.5 と予想した。 ・ｙ＝ｆ(x) のグラフの接線の傾きが０になるところを見つければよい。 ⑧ 関数 $f(x)=x^2$ のグラフでｘ＝１における接線の傾きを計算で求める方法を知る。	
T：グラフ上でｘ＝１の近くの関数の変化の割合を求めさせ，ｘ＝１における接線の傾きは， $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ を計算して $h\to 0$ とすればよいことを理解させる。  ・$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{4-1}{1}=3$ ・$\dfrac{f(1.5)-f(1)}{1.5-1}=\dfrac{2.25-1}{0.5}=2.5$ ・$\dfrac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\dfrac{1.21-1}{0.1}\fallingdotseq 2.1$ ⋮  	中学で学習した変化の割合を復習する。 図形的な意味をおさえながら，ｘ＝１における傾きを直観的に理解させる。

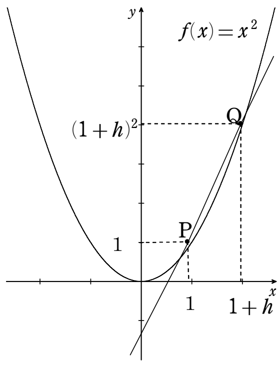
T： $x=1$における傾き$f'(1)$を求めさせる。

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$$

ここで　$h\to 0$ とすると、

$2+h\to 2$ となる。

T：上で求めた２が x ＝１における曲線の接線の傾きを表していることを右の図を使って説明する。



⑨　f(x)の値が最大になる x の値を求めるにはどのようにすればよいか WS3 に記入させる。

⑩　生徒の多様な考え方を発表させる。

ア　x ＝ 2.5 が最大と予想して，まず x ＝ 2.5 を代入し，その近くの数値を代入して x ＝ 2.5 のときが最大になるかどうか計算する。

イ　x ＝ 2.5 における傾きを計算しそれが０になることをいう。

$\dfrac{f(2.5+h)-f(2.5)}{h}$を計算し、$h\to 0$のとき

$\dfrac{f(2.5+h)-f(2.5)}{h}\to 0$ を計算で求める。

ウ　x ＝ a における傾きを求めて，それが０になる a の値を求める。

⑪　個人で追究した考え方を発表させ，ア～ウの異なる意見に関して，多様な生徒の考えを発表させる。

（予想される生徒の反応）

・　何となく x ＝ 2.5 のときが最大になりそうだから代入してその近くの x の値の時も計算してみたら，やはり x ＝ 2.5 のときが 250 になって最大になった。

・　x ＝ 2.5 のときだけが最大という保証はない。

・　x ＝ 2.5 のときの傾きを計算して０になることを言えばいい。

生徒の追究の仕方を把握し，ア，イの考え方をまず発表させ，生徒の間でその考え方を討論させる。

・　それも　x＝2.5 のときだけ最大という保証はない。

・　x＝a における傾きを，求めてそれが 0 になる x の値を求めればよい。

⑫　３次関数で x＝a の微分係数を計算によって求めさせる。

$$\begin{array}{rl} & f(a+h)=4(a+h)^3-60(a+h)^2+225(a+h) \\ -) & f(a)=4a^3 \qquad -60a^2 \qquad +225a \\ \hline \end{array}$$

$$f(a+h)-f(a)=12a^2h+12ah^2+4h^3-120ah-60h^2+225h$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=12a^2+12ah+4h^2-120a-60h+225$$

ここで　$h\to 0$ とすると、

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to 12a^2-120a+225$$

となる。

一応ワークシートにやらせてみるが，計算でつまずいている生徒が多い場合は，教師の方で説明する。

⑬　容積が最大になる a の値を求めさせる。

$12a^2-120a+225=(2a-15)(6a-15)=0$

を解くと、$a=7.5$, 2.5

問題に適するaの値は2.5

⑭ 直方体の最大になる容積を求める。

$f(2.5)=2.5(15-2\times 2.5)^2=250$

(3)　学習のまとめ

⑮ 最大値を求めるには次のような方法をとったことをまとめる。

> ①　関数を式で表す。
>
> ②　$x=a$〜$a+h$の傾き
>
> $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$を求める
>
> ③　ここで　$h\to 0$ として$x=a$における傾き、$f'(a)$を求める。
>
> ④　$f'(a)=0$　となる値を求める。

$\boxed{\text{評価}}$

微少な部分の変化の様子を微分という新しい発想で考察し，最大値を求めたということを理解したか。

記号$f'(a)$は、ここで紹介する。

⑯　②③を「微分」するということを知らせる。

⑰　授業アンケートを記入させる。

(2)　実際の授業の流れと生徒の反応

【１時間目】

1)　課題提示

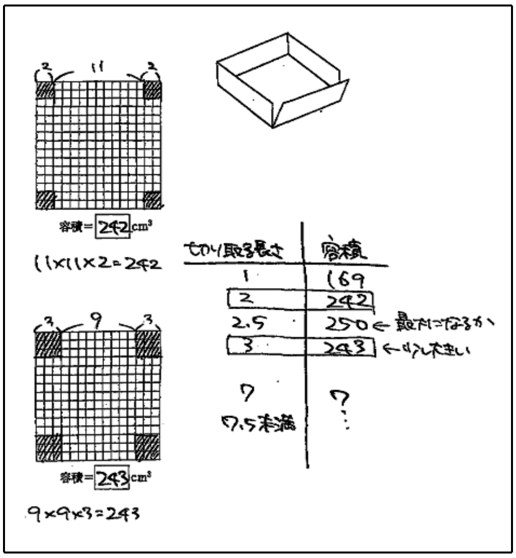
① 予想させる。

生徒は全員，WS1 に作業し，予想を書いた。

最初は，１辺は５ｃｍ→体積は 125 ｃｍ^3

１辺は１ｃｍ→体積は 169 ｃｍ^3 という予想を出したが，

表を書いて，整理していく生徒もいた。



Ｔ：だいたいどのくらいから予想したの？

Ｓ：５．５．５からです。

そうすると体積は 125 ｃｍ^3

Ｔ：次々予想してみてください。

Ｓ：１で体積は 169 ｃｍ^3

Ｓ：２で 242 ｃｍ^3

Ｓ：３で 243 ｃｍ^3

Ｔ：鋭いところがでてきましたね。他には？

Ｓ：2.5 で 250 ｃｍ^3

2)　課題の追究

②　変域の確認をする

Ｔ：ど真ん中が出ましたね。250 どんぴしゃり！

この下を計算してた人がいたよね。

これ，どこでストップすればいいの？

Ｓ：７

Ｔ：７でいいの？７だったら１残るでしょ。7.2 でもできるよ。

Ｓ：7.5 未満

Ｔ：うん。7.5 は入らないんだね。ぎりぎり，7.499999 …なんて，そこは考えても意味ないからね。7.5 だと０になってしまうね。

③　生徒の誤答から小数の追究が始まり，電卓で計算し始める

Ｓ： 3.1 で 260 ｃｍ^3 になりました。

Ｔ：そういうすばらしいことがあるの！　ではみなさん，電卓（携帯）を使っていいのでどんどん計算してみて下さい。

Ｓ：3.1 で 242.06　 計算が間違っていました。

④　課題１を追究させる。（WS2 に記述する）

ア～キのような追究をしている生徒が表れた。

ア　表のみで，グラフに整数点をとっている生徒

イ　表のみでグラフに整数点をとり，次に２と３の間を 0.1 刻みでとり，グラフの隙間を埋めている生徒

ウ　表のみで２と３の間を 0.1 刻みでとりグラフに小数点をとっている生徒

エ　式を作り，グラフに整数点をとっている生徒

オ　式を作り，整数点をとり，次に２と３の間を 0.1 刻みでとり，グラフの隙間を埋めている生徒

カ　式を作り，２と３の間を 0.1 刻みでとりグラフに小数点をとっている生徒

キ　式を作り，２と３の間を 0.1 刻みでとり，さらに 2.49 と 2.5，2.499 と 2.5 とその隙間を追究している生徒

また，WS2 のグラフは大きく分類すると，ａ～ｄのようなタイプが表れた。

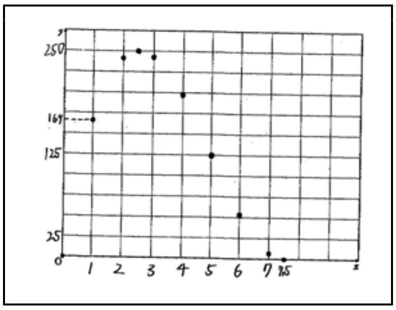
a　整数点だけをとっている生徒

b　整数点をなめらかに結んだ生徒

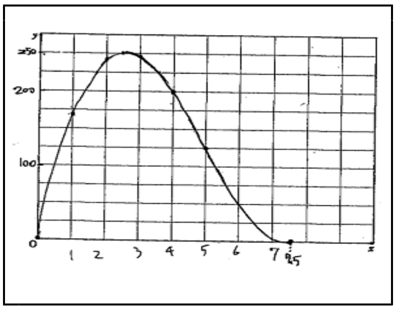
c　２と３の間の小数点をとっている生徒

d　２と３の間の小数点の隙間を考察している生徒

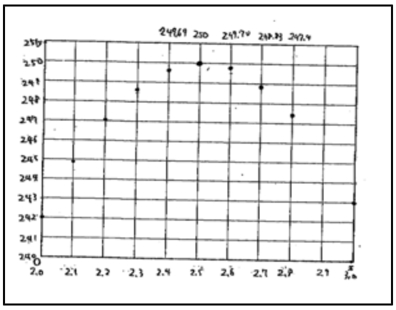
a



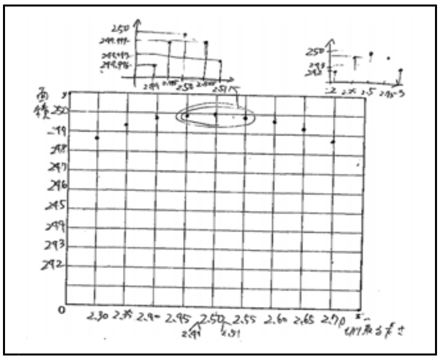
b



c



d



⑤ 生徒の多様な追究を発表させる。

ア：１．２．３．４．５．６と適当に点だけかいてみた。

イ：２と３を比べたら，３の方が少し大きいから，最大値は 2.5 よりは少し大きくな

りそうだ。2.4 だと 249.69，2.6 だと 249.70

ウ：2.49 と 2.51 のところを計算してみたら，微妙に 250 より小さいから，どうも 2.5 が一番大きいらしい。2.49 だと 249.969，2.51 だと，249.997

エ：正方形の１辺を xcm として式を作ると $f(x)=x(15-2x)^2=4x^3-60x^2+225x$ で，３次関数になる。

⑥　追究の過程で生じた課題を既習の知識で解決する方法を発表させる。

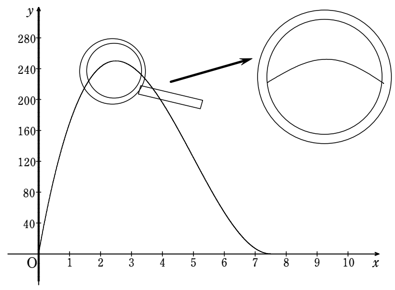
Ｔ：本当に 2.5 が一番大きいっていっていいの？

Ｓ：うーん？（ほぼ全員）

Ｔ：式を作ると３次関数ね。今までやったことのない３次関数がでてきたね。隙間の隙間をとって細かく点をとった人もいるので,だいたい形はイメージできてるね。

今日，先生はパソコンでグラフをかいてきたの。

（右のグラフを提示する）



2.5 近辺を虫眼鏡でみたいなと思うよね。

（パソコンで 2.5 近辺を拡大する）

今からやりたいことはこの微少なちがいをどうやって判断するかということです。

グラフは３次関数だから対称性がないようですね。

微少にやっても，それでよいという保証はどこにもない。

何かアイデアがないと解決できない。

よく見ていくと，最大のところってどんな形になっている？

Ｓ：山のてっぺん。

Ｔ：山の頂上は丸くなっているのかな？このグラフの傾きは最初はすごい急坂だね。山の頂上近くになるとやっとなだらかになっていくでしょ。登りがあったら，下りがあるね。頂上では，一瞬どうなっていると思う？

Ｓ：一瞬平らになっている。

Ｔ：平らというと，数学の言葉でいうとどうなっているのかな？

Ｓ：接線！

Ｔ：あらすごい！接線！なんで接線だと思ったの？

Ｓ：平らだったら，線がビーッと引けるんだから，直線になると思った。

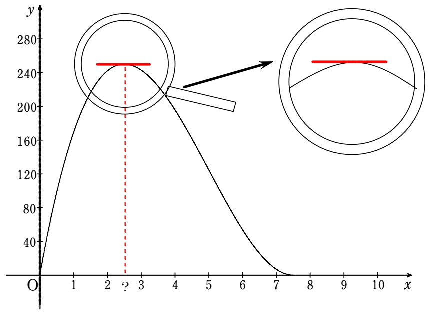
Ｔ：平らなところだったら接線の傾きは何？

Ｓ：０になればいい。

ここで，３次関数の接線の求め方を考えるにあたり，２次関数 $y=x^2$ について，$x=1$ における接線の求め方を考えてくることを課題とした。

【２時間目】

⑦ 前時の授業の確認



最大値をとるｘの値を 2.5 と予想した。

パソコンで右のグラフを提示する。

最大値をとるところで，ｙ＝ｆ(x) のグラフの接線の傾きが０になるらしいことと，今日の授業の目的は０になるところが本当に 2.5 になるのかを追究することであることを確認した。

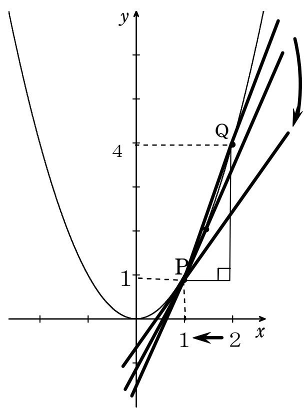
⑧ 関数ｆ(x) ＝x^2のグラフでｘ＝１における接線の傾きを計算で求める方法を知る。

Ｔ：今日のテーマは接線の傾きを新しい発想で求めてみましょうということです。

まず，２次関数 ｆ(x) ＝x^2で，Ｐ（１，１）とＱ（２，４）の傾きを求めてみよう。ＰＱの傾きはいくらですか？

Ｓ：３です。

Ｔ：ＰＱの傾きは，$\dfrac{\text{y の増加量}}{\text{x の増加量}}$ でしたね。



Ｔ：Ｑをちょっと下げてみよう。

ｘ＝1.5，ｘ＝1.1 にして下さい。

Ｑがだんだんｐに近づいてきたら，

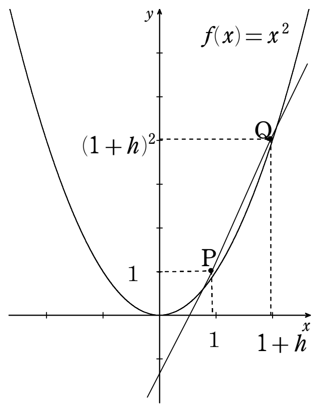
傾きがどうなるか計算して下さい。

Ｓ：Ｑのｘ座標が 1.5 になったとき，

$$\frac{f(1.5)-f(1)}{1.5-1}=\frac{2.25-1}{0.5}=2.5$$

Ｓ：Ｑのｘ座標が 1.1 になったとき，

$$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{1.21-1}{0.1}=2.1$$



Ｔ：(Ｐにおける接線をかき) この線の傾きを求めたい。

近づいていきそうだよね。

何か新しい発想を入れないとできないね。

近づく極限のような話だよね。

では，１の横に少しだけ増やしたという感じで，

幅ｈを取ってみて。(全員に右の図をかかせる。)

Ｔ：Ｑのｙ座標は何になる？

Ｓ：１

Ｔ：だって１の時は１の２乗だよ。１＋ｈのときは?
Ｓ：（１＋ｈ）の２乗
Ｔ：ＰＱの傾きを出してみよう。私たちがやりたいのは，この幅を小さくすること！
ここ(ＰＱのｘ座標の差)を狭めていくというのはどういうことをすることかな？
Ｓ：ｈを小さくする
Ｔ：ｈを限りなく０に近づけるということですね。では，ＰＱの傾きを計算してｈを限りなく０に近づけるとどうなるか考えて下さい。
次の式を板書し，ｘ＝１における接線の傾きが２に近づくことを示す。

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$$

ここで　$h\to 0$ とすると、
$2+h\to$ ２となる。

Ｔ：これを確認する方法はあるかな？
Ｓ：Ｐ（１，１）を通り傾き２の直線の式をだして，ｙ＝ｘ^2 と連立させて重解を持つことをいえばよい。
Ｔ：この方法で，重解を持つことを示し，接線の傾きが２であることを確認する。

⑨　f(x)の値が最大になるｘの値を求めるにはどのようにすればよいか WS3 に記入させる。
ア～ウのような追究をしている生徒が表れた。

ア　$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$を計算している生徒

イ　$\frac{f(2.5+h)-f(2.5)}{h}$を計算して$h\to 0$とすれば０になることを示そうとしている生徒

ウ　$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$を計算している生徒

⑩　個人で追究した考え方を発表させ，ア～ウの異なる意見に関して，多様な生徒の考えを発表させる。

イの追究をしていた生徒（Ｙさん）:
$x=2.5$における傾きを計算しそれが０になることをいう。
$\frac{f(2.5+h)-f(2.5)}{h}$を計算し、$h\to 0$のとき
$\frac{f(2.5+h)-f(2.5)}{h}\to$ ０を計算で求める。

この発表を聞いて，アの方法の生徒は１を代入するのをは止めて 2.5 にすると発言

した。

ウの追究をしていた生徒（Ｙ君）： 　ｘ＝ａにおける傾きを求めて，それが０になるａの値を求める

Ｔ：この２つのＹ君とＹさんの方法に対してどう考えますか。
Ｓ：Ｙさんの方が 2.5 ではなかったとき，どうするの？
Ｓ：2.5 ではなかったとき，2.5 だったらどうするんだ？
Ｓ：2.5 だったらいいですけど。
Ｔ：2.5 だったらいいんですね。他の意見はありませんか？
Ｓ：2.5 だけという確証を持てないから。
　ほとんどの生徒がこの意見に納得した様子であった。
Ｔ：傾きが０になるところは 2.5 だけとは限らないという発想ですね。１個だけ調べて全部調べたわけではないということですね。
　Ｙ君のｘ＝ａとおいて計算していくのは，全部調べたことになるよね。

⑪　３次関数でｘ＝ａの微分係数を計算によって求めさせる。次の内容をワークシートの続きに計算させたが，３乗の展開や計算でつまずいている生徒も見られたので，教師が生徒を順番に発言させながら黒板で解いていった。

$$
\begin{array}{rl}
 & f(a+h)=4(a+h)^3-60(a+h)^2+225(a+h) \\
- \big) & \underline{\quad f(a)=4a^3 \qquad\qquad -60a^2 \qquad\qquad +225a \qquad}
\end{array}
$$

$$f(a+h)-f(a)=12a^2h+12ah^2+4h^3-120ah-60h^2+225h$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=12a^2+12ah+4h^2-120a-60h+225$$

ここで　$h\to 0$ とすると、

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to 12a^2-120a+225$$

となる。

⑫　容積が最大になるａの値を求めさせる。

$$12a^2-120a+225=(2a-15)(6a-15)=0$$

を解くと、$a=7.5\ ,2.5$

問題に適するaの値は2.5

Ｔ：7.5 のところも本当は接線の傾きが０になるところがあるんだね。7.5 だと長方形はぴたっと半分になって切り取れないね。2.5 のところが最大であると確認できたね。

3)　学習のまとめ

⑬ 最大値を求めるには次のような方法をとったことをまとめ，②③を「微分」するということを知らせた。

① 関数を式で表す。

② $x=a \sim a+h$ の傾き

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を求める

③ ここで　$h \to 0$ として $x=a$ における傾き、$f'(a)$ を求める。

④ $f'(a)=0$ となる値を求める。

Ｔ：微分が何となくわかったかな。

Ｓ：今まで学習したことを重ねているだけだから,すごく新しいわけでもないですね。

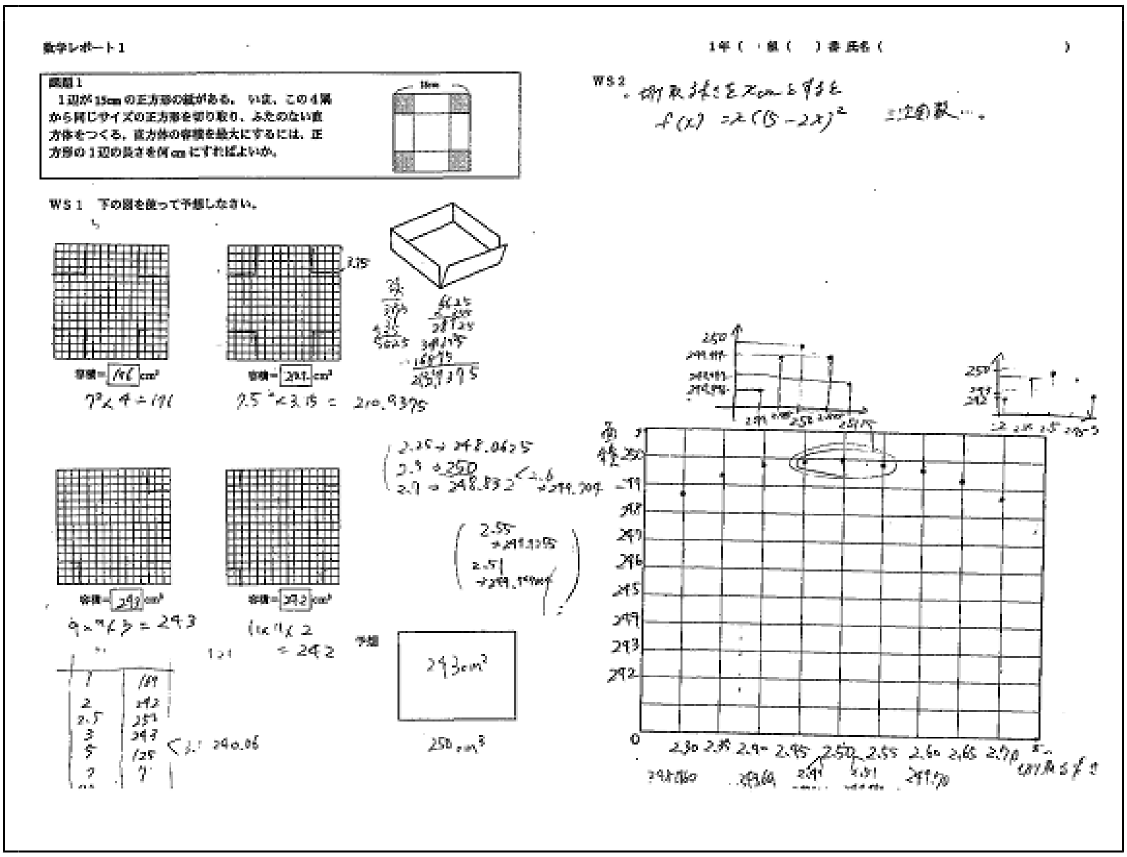
Ｔ：でも，極限を考えているときは新しいよね。Ｙ君，君は微分って何だと思いましたか。

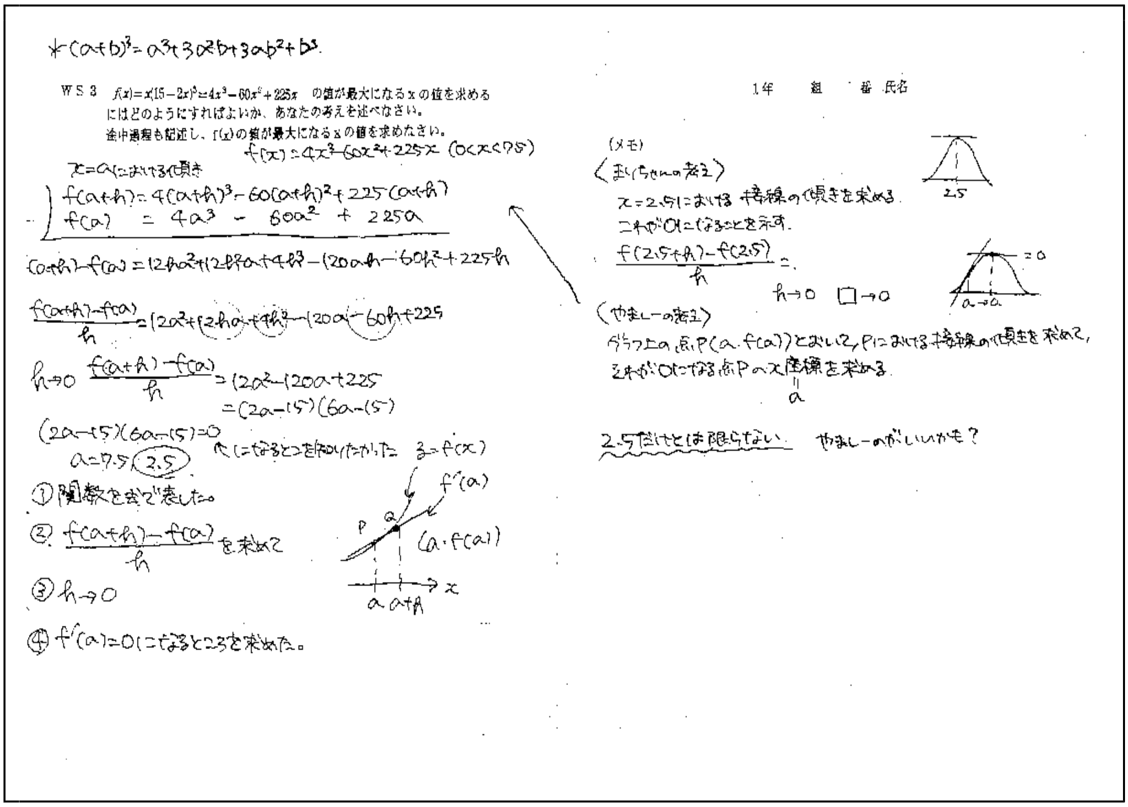
Ｙ君：何か，グラフの隠された側面をガバッと現してくれたような気がする。

Ｔ：いい言葉ですね。

⑭ 授業アンケートを記入させる。

８　授業で活用したワークシート





９　わかっていることをどのように把握したか

授業直後，次の２種類のアンケートを記入させた。

(1)　授業直後のアンケート①（記述式）（資料１参照）

１　今日の授業で，わかったことや気づいたことを書いて下さい。

２　今日の授業でわかりにくかったことはどんなところですか。

(2)　授業直後のアンケート②（資料２参照）

１　今日の授業はどのような授業でしたか。次の１～24 のうち，当てはまるものすべてを選び，〇で囲んでください。

２　今日の授業について，次に示すように１～４で自己評価し，右側の目盛りを〇で囲んでください。なお，⑧～⑩については，項目ア，イ，ウから当てはまるものをすべて 選び，〇で囲んでください。

（ ４　全くそう思う　　３　そう思う　　２　あまり思わない　１　全くそう思わない）

そして，「微分法の意味がわかったか」について，次のような判断基準を設定し，アンケートの「今日の授業の中でわかったこと」の自由記述について，ＡＢＣのキーワードを設けて得点化し，ア～ウの得点の合計が３点以上の生徒を「わかった」と判定した。　なお，ワークシート（WS3）の記述も参考にし加点した。（ｗ）と記入してあるのは，WS3 から判定したものを含む。

（設定した判断基準）

ア　関数の増加・減少が微分係数という局所的な考え方から導かれることを知る

Ａ　　ｈを０に近づける・接線の傾きを求める。（２点）

Ｂ　　ｈを０にする・傾きを求める・漠然と書いている（１点）

Ｃ　　記入なし（０点）

イ　関数の値の変化の状態を調べることが微分法の目的であることを知る。

Ａ　　接線の傾きを求めることが微分である。（２点）

Ｂ　　何となく微分がわかった。（１点）

Ｃ　　記入なし（０点）

ウ　関数の最大値を求める方法を知る。

Ａ　　接線の傾きが０になるところが最大である。（２点）

Ｂ　　傾きを０にすれば求められる。（１点）

Ｃ　　記入なし（０点）

（ わかったと判定した生徒のアンケートの記述例）

（例１）　傾きの求め方。hを限りなく０に近づければ傾きを求められることがわかった。微分とは導関数を求めること。導関数は傾きを求めるための関数
微分を用いることで傾きを求めることができる。

ア・イ・ウともＡで，WS3 からもＡと判定し，合計得点は６点であり，３点以上なので「微分の意味」がわかったと評価した。

（例２）ｆ（ｘ）＝ｘ（１５－２ｘ）２の最大値の解法。微分がその瞬間の傾きを求めることだということがわかった。

イ・ウともＡで，合計得点は４点であり，３点以上なので「微分の意味」がわかったと評価した。

（わかったと判定しなかった生徒の記述例）

（例３）
接線の傾きとかの関係。接線の傾きを求めることが大切らしい。

ア・イ・ウともＣで０点，ＷＳ３では，最大値の接線が平行になることをグラフに示しているので１点。したがって，３点未満なので，「微分の意味」がわからなかったと評価した。

また，ワークシート(WS3)の記述が，（例４）～(例６)のような場合に，「微分の意味を知る」というねらいが達成できた（＝わかった）と判断し，ア～ウの判定基準に加味した。

（例４）　WS3 の記述
x ＝ 2.5 における接線の傾きを求める。これが０になることを示す。

接線の傾きが０になれば最大値をとることがわかっているので，最大値を求める方法がわかったと判断した。

（例５）　WS3 の記述
f(x)の値が最大→傾き０
このときの，ｘをｐとすると，

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=0$$

計算はできていないが，ｈ→０にすればよいということがわかっているので，微少の変化を考察することがわかったと判断した。

（例６） WS3 の記述

f(x)の最大値を通る直線を考える。

① x ＝１のとき， y ＝ 165 と（x，$4x^3-60x^2+225$）を通る。

② x ＝２のとき， y ＝ 242 と（x，$4x^3-60x^2+225$）を通る。

①②…と傾きを変えていく。

記述した生徒はすでに左方極限の考えでグラフの直線をずらしながらかいていた。素晴らしい発想が WS ３から読み取れた。微分の意味がわかったと判断した。

10 本時がわかる授業であったか

次の(1)(2)(4)のアンケートおよび記述を分析し，(3)も参考にしながら本時がわかる授業であったかどうかを考察した。

(1) 研究授業直後のアンケートによる自己評価の記述

(2) 研究授業後のアンケート結果

(3) 研究協議会

(4) 微分の単元終了後のアンケート

(1) 研究授業直後のアンケートによる自己評価の記述（資料１参照）

判定基準を設けて，アンケートによる自己評価の記述を分析した結果，39 人中 33 人の生徒が得点３点以上であり，研究授業のねらいである「微分の意味を知る」については「わかった」と判断できた。

(2) 研究授業後のアンケート結果　（資料２参照）

授業後のアンケート結果は以下のようであった。

1. 今日の授業はどのような授業でしたか。次の①～㉔のうち，当てはまるものすべてを選び，〇で囲んでください。

上位５位まで

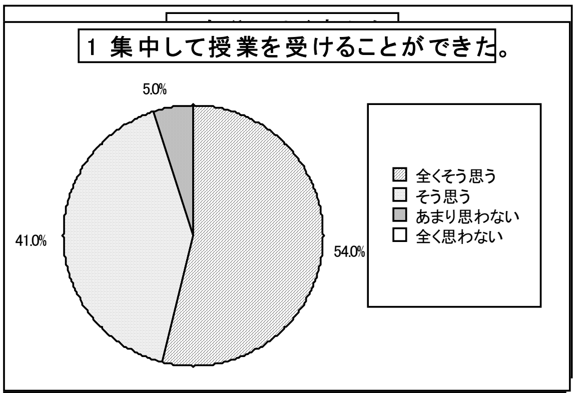
	アンケート内容	人数	%
1	⑩先生の説明がわかりやすい授業だった。	28	76
2	①何を学習するかが明確な授業だった。	27	73
3	③私たちの理解度を見ながら進めている授業だった。	25	68
4	⑤進行速度が適当な授業だった。	24	65
	⑦じっくり考える時間がある授業だった。	24	65
	⑪黒板にかかれた内容がわかりやすい授業だった。	24	65
	⑬友達の意見を聞く時間がある授業だった。	24	65
5	⑫配布資料（資料・プリント・道具のほか，映像も含む）が効果的な授業だった。	23	62

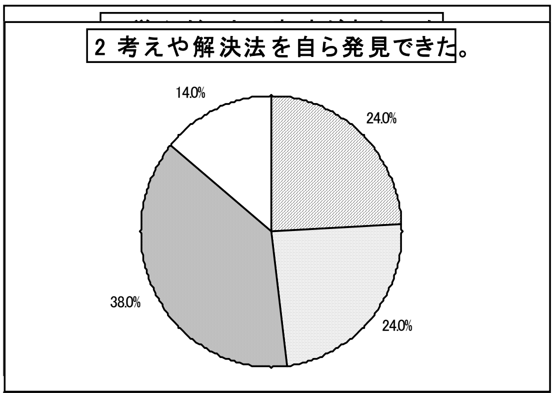
下位５位まで

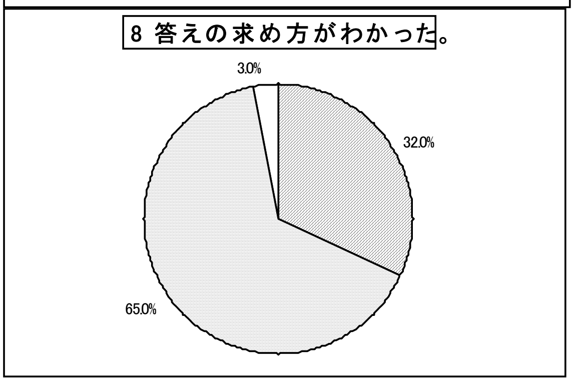
1	⑥進行速度が遅すぎる授業だった。	0	0
2	⑱予習してきたので，よく理解できる授業だった。	6	16
3	⑮自分の考えを発表できる授業だった。	7	19
4	⑯発言しやすい授業だった。	10	27
5	②説明や解説が中心の授業だった。	10	38

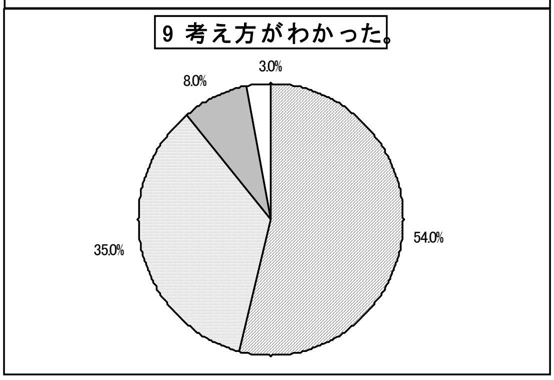
２．今日の授業について，次に示すように１～４で自己評価し，右側の目盛りを○で囲んでください。なお，⑧～⑩については，項目ア，イ，ウから当てはまるものすべてを選び，○で囲んでください。

４　全くそう思う　　３　そう思う　２　あまり思わない　１　全くそう思わない









アンケートの結果より，生徒は課題に対して集中してよく追究し，考えた授業であった。８の結果より，最大値の求め方は２人の生徒を除いて理解し，６，９の結果より，課題を追究する過程で大局的に微分の考え方を体験させたことにより，微分の導入過程で「微分の必要性と意味を知る」というねらいは９割の生徒に達成できたと考えられる。

(3)　研究協議会

１時間目の生徒の活動は協議会の対象となっていないが，生徒のレポートを参考資料として提示し，流れを説明した。研究授業は２時間目だけを対象とした。研究協議会では，ＡからＫのような意見があった。

A　生徒は $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ というアイデアをもっていない。２時間目の前半の部分は50 分くらいかかる厚い内容だったと思う。

B　３次の計算が重いので，最初に $y=x^2$ を扱ったのはよいと思う。

C　微分全体の概要をつかませたいのだから，重解になっているところは確認せずに，接線の傾きだけでよかったのではないか。

D　割線を一定の点で移動していくというのは，GRAPES を使うとよい。

E　2.5 のとき０になるかどうかを調べてみようというのは，教師の方から出してもよかった。

F　３次関数で最大値を追究しているとき $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ でやっている生徒が多いのでびっくりした。２次関数のとき考え方をおさえて，３次関数で適用するという流れはよかった。

G　２次関数で $a+h$ のときで，$h\to0$ になることをやらせて，一般化することをした方がよい。

H　一般化の過程には，関数２次→３次，　$1\to1+h\to a+h$ という細かなステップがあった。 これをどのようにおさえていくのかが，わかるきっかけの大事なポイントである。

I　３人の生徒の発想が登場した。$1+h$ は降りた。なぜやめたのか。また，Ｙ君とＹさんのところでもう少し全体の生徒に拡げて時間をかければよかった。

J　Ｓさんという生徒が「２次関数の傾きはわかったけど３次関数の傾きってなーに？」とつぶやいていた。曲線の接線の傾きといった方がよい。

K　生徒と先生のコミュニケーションの多さに驚いた。Ｙ君とＹさんの意見のところでもう少し時間をとるとよかった。微分の概念がわかってくれればよいというねらいの授業であったが，現在の子どものアバウトな部分を今後どう定着させていくかが課題であろう。

研究協議を通して，授業のねらいを達成するためには，次の①～④を，授業に活かして展開をしていくこと大切であると考えられる。

①　$h\to0$ のところが本質であるから，前半部分に時間をかけて大事におさえていく。

②　一般的な２次関数で $h\to0$ にして最小値をおさえていく方法をとる。

③　Ｙ君とＹさんの意見のところでもう少し時間をとる。

④　一般化の過程には細かなステップがあるので，生徒の実態にあわせて，考える時間を与えていく。

(4)　微分の単元終了後のアンケートの活用

微分の単元が終了後，定期考査前に次のようなアンケートをとった。

…微分を学んで…
1　最初の研究授業（箱の形の最大値を求める）は，具体例から微分の学習に入り微分とは何かというイメージを持つことをねらいとしました。 この授業が学習の理解に役だったところはどんなところでしたか。
2　微分の学習を通して，どのようなことができるようになりましたか。
3　微分の学習で不思議に思ったことや印象に残ったのはどのようなことですか。なぜ，そう思いましたか。

【１についての生徒の記述】

①　最大・最小を扱ったあの最初の研究授業がなかったら微分は理解できなかったと思います。

②　グラフを自分たちでいちいち計算してから作成したので，後で他の問題を解くときにイメージしやすかった。

③　研究授業は印象に残った。目で見て，頭でイメージできたから。

④　微分は２点の間をつきつめていって，１つの点にすることのイメージができた。

⑤　微分の視覚的イメージを常に念頭において，微分を理解することができた。

⑥　導関数とは何かどんな意味をもつかということを最初の授業でわかりやすく教えてくれたのであとあといろいろな問題で混乱せずにすんだ。

⑦　いつもの数字ばかりの数学ではなくて，実際に見えるので，イメージを作れたので，微分という科目に入りやすかった。

⑧　微分の視覚的イメージを常に念頭において学習することができた。

⑨　微分というのは瞬間を求める概念であることがわかった。

⑩　微分がただの計算でなく，実際に役に立つことがわかった。

⑪　なぜ，微分というものが世間で使われているかなぜ微分は重要なのかわかりました。

（考察）　微分の章を学習した後で，最初の授業は，導関数の意味を理解したり，極大・極小を求めたり，最大・最小を求めたりするとき，イメージがしやすかったと多くの生徒が答えていた。また，⑨のように微分の概念がわかった生徒，⑩⑪のように微分の意義がわかった生徒も表れた。したがって，この研究授業は，最初に「微分の意味を知る」というねらいの他に，微分について大局的に与えたイメージが，その後の導関数・極大・極小・最大値を求めたりしていく授業の内容の理解を深めていくのに役立ったと考えられる。

【２についての生徒の記述】

① 関数のグラフの形がわかるようになった。

② どんな関数でもグラフをかけるようになった。

③ 関数の特徴が理解できるようになった。

④ 最大値・最小値が求めることができる。

⑤ ２次関数の頂点を求める問題とかでも，平方完成させるより楽だと思った。

⑥ ３次不等式が解けるようになった。

⑦ ３次関数ができるようになった。

⑧ いきなり，３次，４次とできるようになった。微分はすごい！

⑨ 細かいところの変化まで求められるようになった。

⑩ 瞬間の値を求められるようになった。

（考察） 微分を学習してできるようになったこととして，生徒が一番多く挙げているのは，やはり，①～③のように関数のグラフ（３次・４次）がかけるようになった・特徴がわかったということであった。⑤のように既習の２次関数の頂点をもう一度接線の傾きでとらえ直すのは，導入の授業で２次関数を扱ったことが影響していると思われる。しかし，この視点は大切であり，今後も学んだ知識を既習のものに適用して，よりわかり方が深くなるという態度は育てていきたい態度である。⑨⑩からは，微少なものの変化をとらえるという一番大事な「微分」の概念を理解していることが考察できる。

【３についての生徒の記述】

（印象に残ったこと）

① 表とかグラフとかの大切さを再認識した。

② 速度や加速度の微分はすごいと思った。

③ グラフで一瞬を考えるという概念はすごいと思った。

④ 連続していれば，どんな関数でも微分して傾きをきれいな式でだせること

（不思議に思ったこと）。

⑤ 球の体積を微分することで球の表面積が求まること。未だ，完全なイメージができずに神秘的である。

⑥ 極限という考え方が不思議でありえないような気がする。

⑦ 距離を微分すると速度，速度を微分すると加速度になるのが不思議だった。

⑧ なんで，微分するんだろう。どうやって考えたらこんなやり方が生まれたんだろう？

⑨ 微分全般についてですが，なぜ昔の学者はこのような（微分）ものを考えようと思ったのか不思議です。

（考察）　球の体積を微分すると表面積になるということや，速度・加速度について，生徒は大変印象的に思っている。ただし，よく考える生徒にとっては，極限の考えは微分の授業が終了した後でも，大変理解が難しいところであることがわかる。高校数学の限界であろう。不思議という感覚をもってくれるのは好ましいと考える。⑧⑨の生徒の感想からも，余裕があれば，微分が生まれた背景や数学史を扱いたいものである。

11　わかっていないと見なされる例

わかっていないと見なされる例として，次の(1)～(3)の結果を考察すると，Ｓ１～Ｓ３のような生徒が挙げられる。

(1) 授業中のＷＳ（主にＷＳ３）

(2) 授業後のアンケート

①今日の授業でわかったこと気づいたこと

②今日の授業でわかりにくかったこと

(3)　授業中の観察

Ｓ１（授業中のＷＳ）

ｆ（ｘ）の式はあっているが，

$$\frac{f\ (2.5+h)-f\ (2.5)}{h}$$ のみを記述している。

（授業後のアンケート）

わかったことに「接線の傾きとかの関係。接線の傾きを求めることが大切らしい」わからなかったことに「進むのが少しはやかったかも」と記述している。

Ｓ１は，１時間目の授業中は，ほとんど電卓を使用し，計算していてグラフを打点してかいていない。２時間目は，式を板書したが，その後の生徒の発言についていけていない。おそらくは，１時間目の最後ででたアイデア（接線の傾きが０になるところが最大値である）がわかっていなかったと考えられる。

Ｓ２（授業中のＷＳ）

１時間目の授業中は，２から３の範囲で0.1刻みで点をプロットして，$x=2.5$のとき最大値であろうと予測している。２時間目は$f(x)$の式は求めて，$f(x)$の最大になるxをtとおき，$f(t)$と$f(t+h)$を通る接線を求めて，hを限りなく近づけると記述している。しかし，３乗の展開で計算が行き詰まっている。

（授業後のアンケート）

わかったことに「とりあえず。ＰＱを通る直線の傾きを調べる。→ａ＋ｈと

おく。次にｈ→０にしてみると接線になる。」
わからなかったことに「３乗の計算が大変だった。」と記述している。

Ｓ２の放課後の聞き取りによると，授業中に活動している場面と他の生徒の意見を聞く場面が重なってしまい，接線の傾きが０になるところが最大値であることを聞き逃していたようである。したがって，授業中の部分的な活動には参加しているが，おおまかに微分の意味をとらえるという理解はしていないと考えられる。

Ｓ３（授業中のＷＳ）
１時間目は，表と式のみを記述してグラフをかいていない。２時間目は自分考えは記述していない。
(授業後のアンケート)
わかったことに「２次関数の傾きの求め方。接線の傾きの求め方。」
わからなかったことに「ほぼ全部わかりませんでした。なぜ接線を求めるのかがわかりません。接線を求めるのが「微分法」だということでしょうか」と記述している。

Ｓ３は，１・２時間の授業を通して，熱心に聞いているが，グラフをかいたりする活動に入っていない。また，生徒の意見や板書されたことは丁寧にかいているが，考えていない。したがって，授業の記録はとっているが，授業で何をしているかがわかっていないと思われる。

12　わからない生徒への対応例

11 のわかっていないと見なされるＳ１，Ｓ２のような生徒については，次の時間の授業の「平均変化率と微分係数」で，自然落下する物体の２秒後の瞬間の速さを考察させる際，個別に机間指導をして対応した。$y = 4.9x^2$ という２次関数を再び扱うことによって，導入の授業で何をやっていたのか理解できたようである。接線の傾きを微分係数の関係をくわしく説明し，研究授業では，接線の傾きが０になるところが最大値であったことを説明した。ここで，ｈ→０にすると，直線の傾きは接線の傾きにちかづくという意味がやっとわかったようである。

Ｓ３に関しては，放課後，再度グラフをかくところから指導したところ，グラフの概形と $x = 2.5$ のところが最大値らしいことはわかったようである。

Ｓ１，Ｓ２，Ｓ３は，微分の単元終了後のアンケートでは，次のように答えている。
「微分の学習を通して，どのようなことができるようになりましたか。」
Ｓ１…微分を通してグラフがかけるようになった。接線の傾きがわかるようになった。速さや加速度の微分はすごいと思った。
Ｓ２…何かの体積の最大値というのが出せるようになった。３次関数ができるようになった。

Ｓ３…傾きが０になるときが頂点ということがわかったような気がします。関数の傾きを求めることができるようになりました。

この生徒は３人とも，中間テストでは微分の計算や接線の方程式を求める問題，最大値を求める問題もできている。Ｓ３に関しては教科書の例題を丁寧に扱い，問題を説明していくことにより，導入でやった微分の意味が漠然とわかっていったようである。

13　本指導単元においてよく見られるつまずきとその原因および克服のための指導例

14 の資料３からもわかるように，微分の計算はできても，微分とは何かがわからないという高校生が多い。「微分」という単元でよく見られるつまずきの典型である。「微分係数と導関数のちがいがわからない」という声も生徒からよくあがってくる。関数の変化ををとらえることは中学でも変化の割合を扱っているが，高校になって，数式のみの処理のみを扱い，具体的に微分は何をしているかというイメージがつかめていないのではないかと考えられる。

このような状態を改善していくには，中３で学習する変化の割合と瞬間の速さをうまく接続して，高校生にスパイラルに教えるような場を設定することだと考える。微分とは何かがわからないという高校生を少なくしていくには，中・高の接続を考えて既習の知識の中で微分を導入していくことが大切である。

高校では，関数について，式のみの扱いが多く，生徒は「変化」そのものを実感としてとらえることなく，微分の学習に入る。また，関数に関しては，座標幾何の問題が多く，現場も具体的な事象から表やグラフを使ってじっくりと考察させるという授業を実践できていない。また，高校の教科書の関数の分野においても，現実の事象から関数を考察させる場面は少ない。中学校で学習した「変化の割合」を「微分係数」とまったく関連性のないものであるととらえている生徒が多い。（参照　資料１　関数についてのアンケート）

上記のことから，次のねらいを持って授業を実践していくことがつまずきの克服のために，大切であると考える。

⑴　中学３年で，変化の割合を単に，「グラフの傾き」として理解するのではなく，速さなどの実体験を通して，変化の割合がわかる授業を実践する。

⑵　中学３年で関数$y=ax^2$の値の変化の割合を学習した後に，ｘの値が連続的に変化していくようないろいろな事象と関数を扱い，グラフが変化する様子を観察し，中学生で実体験を通して，変化の割合についてわかる授業を実践する。

⑶　高２の微分の導入で，瞬間を考察させる体験をさせて，高校での微分の学習の理解が深まるような素地経験をさせ，高校での「微分の学習」への接続を図る。

14　参考資料

（資料１）「微分法の意味がわかったか」について授業直後のアンケートを利用した評価

生徒	１　今日の授業でわかったこと・気づいたこと	A	B	C	合計	微分の意味がわかったか
1	ｈを０にちかづけることで２点間の距離が０にちかくなり１つの点になる。その点の傾きを求めることが微分である	ｱ・ｲ・ｳ (w)			6	わかった
3	ｈ→０にすると，接線になることが，ぼうっとしかわかっていなかったが，他のところについては，問題なく理解できた。特に関数が出てきてしまえば何でもできるというのが正直でいいところだと思った。	ｱ･ｳ(w)			4	わかった
4	２次関数を応用するところ。接線の傾きが０になるところが最大。傾きを０にすると求められる。	ｳ	ｱ		3	わかった
5	ｈ→０になることで接線の傾きが０になり，箱の容積が最大になる。	ｱ･ｳ(w)			4	わかった
6	接線の傾きを使った３次関数や２次関数の数値の求め方を学んだ。そのとき，結構前に使ったいとも簡単な公式とかを全く覚えていなかった。	ｱ･ｳ(w)			4	わかった
7	微分に２次関数の考えを使えることが興味深かった。微分で大まかにやることはわかった。接線の傾きがポイントになると思った。	ｱ･ｳ(w)	ｲ		5	わかった
8	微分ってものが何なのかを理解できた。でもこの授業なしでいきなり計算式を解いてもただの公式で終わってしまいそうだったからとてもありがたかったです。今までの僕らの感覚では３次関数の独特な形をなすグラフはどうしてもとっつきにくかったが，２点を使って接線の傾きを求めるというやり方はすでに１度やったことがある。この「初めてのもの」を「今までの知識」で解くというやり方は頭になかったのでためになった。	ア・イ	ｳ (w)		5	わかった
9	教科書を用いて独学で微積分を学んでいたが，結局のところは計算ができるようになっただけで，その内部構造に対する理解がほとんどできていなかった。今回の授業はそういった隠蔽構造を打ち破るきっかけになった。関数ｆ（ｘ）上の任意の点における接線の傾きを導関数という。導関数を求めることを微分するという。	ｱ・ｲ・ｳ (発言)			6	わかった
10	傾きの求め方。hを限りなく０に近づければ傾きを求めら	ｱ・ｲ・ｳ			6	わかった

	れることがわかった。微分とは導関数を求めること。導関数は傾きを求めるための関数。微分を用いることで傾きを求めることができる。	(w)				
11	微分は難しいなあと思った。hを０にすることで，ｘ＝ａにおける接線の傾きを求めることができるというのがわかった。	ウ（聞き取り）	ア		3	わかった
13	微分という授業はどんなことをやるのかわからなかったが，やっと今回の授業でわかった。点Ｐの位置なども思いこみで置いてはいけないというのがわかった。微分というのは点Ｐにおける接線の傾きを０にしなければならないことがわかった。		ウ		1	
14	一通りわかりました。傾き０の接線とｆ（ｘ）の最大が交わることが前提。接点を求める式を出してｈ→０はなるほどと思いました。ｈ→０つまり，接線の傾きが０。	ア	ウ		3	わかった
15	３次関数のグラフが少しわかった。ｈがとても小さい値だという仮定をうまく使えば求まることがわかった。そういえばこの話，物理で聞いたな。	ア･ウ(W)			4	わかった
16	とにかく難しい。ｈ→０とおく。理解がしにくい。ＰＱの傾きが０→ｈ＝０とおく。 ＰＱの傾き＝ｆ（ａ＋ｈ）+f(a)／ｈ→点Pにおける接線の傾き。これが０になったとき，頂点になる。	ア･ウ(W)			4	わかった
17	グラフの接線の意外な使い方。微分は接線の傾きの関数を求めること。これで，グラフの最大（最小）値が求められる。	イ･ウ(W)			4	わかった
18	微分がどんな感じのものなのか。接線の求め方がわかり，それが微分することだとわかりました。それによって３次関数の最大値が求められるようになりました。	イ･ウ(W)			4	わかった
19	ｆ（ｘ）＝ｘ（１５－２ｘ）^{2}の最大値の解法。微分がその瞬間の傾きを求めることだということがわかった。	イ･ウ			4	わかった
20	接線の傾きとかの関係。接線の傾きを求めことが大切らしい。		ア		1	
21	今までしたことを含めて考え，新たな発見ができるのがわかってよかった。微分とはある曲線のある１点における接線の傾きを求めることという自分なりの解釈をした。	ア・イ・ウ(w)			6	わかった
22	０に近づけるというのが大事だということがわかった。接線の傾きを求めていくことで答えがだせるとわかった。	ア･ウ(w)			4	わかった

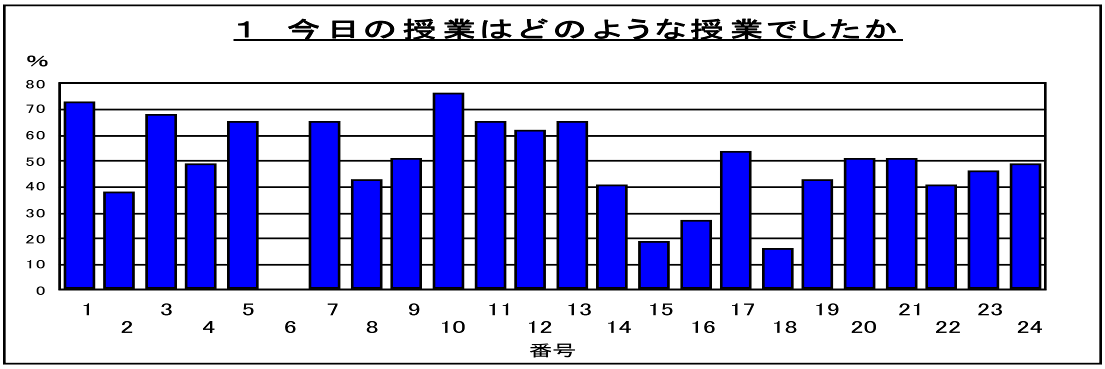
23	微分は予習していたが，今日改めてその本質に気がついて新鮮だった。微分とは小さな変化量を接線という形で取り出して表せるものだと思った。接線の式は関数になっていて，これを解いていくことでいろんなことがわかる。	ｱ・ｲ・ｳ (w)			6	わかった
24	ほとんど理解できた。でも，計算したら２．６の方が大きくなったんだけど…。	ｱ（聞き取り）	ｳ		3	わかった
25	接線の傾きとの関係から３次関数の最大値を求めることができるということを知った。また，私たちが求めていた「微分する」というのは接線の傾きを求めることであるということがわかった。	ｱ・ｲ・ｳ (w)			6	わかった
26	とりあえず。ＰＱを通る直線の傾きを調べる。→ａ＋ｈとおく。次にｈ→０にしてみると接線になる。	ｱ			2	
27	微分がどういうものなのか，どうやって求めるのか，何となくわかった！微分は計算ミスに気をつけなければと思った。結局は２．５だったということはグラフに規則性はなかったのか？（ｘ＝２のときｙ＝２４２，ｘ＝３のとき，ｙ＝２４３だったのに。	ｱ（聞き取り）	ｲ		3	わかった
28	今まで忘れていたことを思い出した。楽しかった。微分は自分では使う機会はないだろうけど，色々と役にたつんだろうなあ。何をやっているかわかってよかった。最初に接線の傾きを使うことを思いついた人はすごいと思う。それから傾き＝０になる点が１つだけではない可能性に気づけなかったので，もっと単純さを捨てようと思った。	ｱ･ｲ･ｳ			6	わかった
29	接線を使って求めるのが大切。接線の傾きが０になるのを利用して解く。ｈが０に近づくことで，ＰＱの傾きが０になり，グラフの山のてっぺんを求められる。	ｱ･ｳ(w)			4	わかった
30	２次関数の傾きの求め方。接線の傾きの求め方。		ｱ		1	
31	接線の公式を思い出しました。微分というのが何となくわかった。ｈを０に近づけることで，ＰＱの傾きから点Ｐにおける接線の傾きを求めることができる。どんな形の関数でも最大値はわかるのかなと考えた。	ｱ	ｲ･ｳ		4	わかった
32	x=2.5とおいて接線が０か確認する考え方は思いつかなかったけれど，接線が０のときのを求めればいいとわかりすっきりとした考え方だと思った。０に近づけていくという意味がわからなかったけど，ある直線をどんどん傾けてい	ｱ･ｳ			4	わかった

	ってｈが０になったときに接線になるというのがわかった。					
33	微分という言葉の意味。使い方。ＰＱの傾きを出す。→ ｈ→０とする。 →ｘ＝ａにおける接線の傾きを出す。これが微分係数だ。	ｱ･ｳ(w)	イ		5	わかった
34	微分って何かっていうのがよくわかりました。もともと，最大値のところの傾きが０は予想はついていたけれど，ｆ（ａ＋ｈ）−f（a）／ｈのしくみが少し理解できてよかったです。もっとなれなきゃと思う。	ｱ･ｲ･ｳ			6	わかった
35	グラフの接線から答えが求められるとは思いませんでした。グラフにおこせないものは求めるのが難しいというより求められないのではないかと思ったのですが，数値計算はこういうところで生きてくるのだなあとわかったような気がします。グラフの接線の傾きを求めて，そこから出た関数の値が０に成るときのaが答えであることがわかりました。	ｱ･ｲ･ｳ			6	わかった
36	とりあえず。むずかしかった。１回目の授業を休んだから初めよく意味がわからなかった。ｈを０に近づけることでＰＱの傾きが点ａでの接線の傾きになるということは最終的に理解できた。	ｱ			2	
37	新しい最大値の求め方がわかった。ｆ（ａ＋ｈ）−f（a）／ｈを理解することが（ちょっと）できた。１点１点とｈを０に近づけていくことで接線の傾きがわかった。	ｱ･ｳ			4	わかった
38	微分とは何かがわかった。関数の接線の傾きを求めることができることがわかった。傾きが０になることろを調べれば，その関数の最大値を求めることができる。	ｱ･ｲ･ｳ			6	わかった
39	接線の考え方がわかった。なだらかで，連続した関数においてｈ→０に近づけた時のPQの傾きを求めることで，接線の傾きの求め方がわかった。	ｱ･ｲ･ｳ (w)			4	わかった

（資料２） 研究授業後のアンケート結果

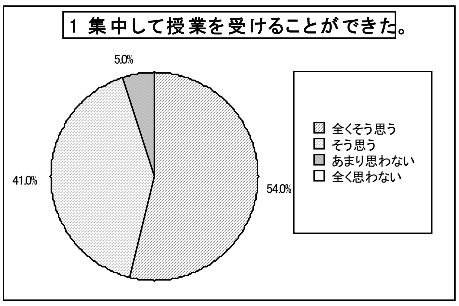
1. 今日の授業はどのような授業でしたか。次の1〜24 のうち，当てはまるものすべてを選び，○で囲んでください。

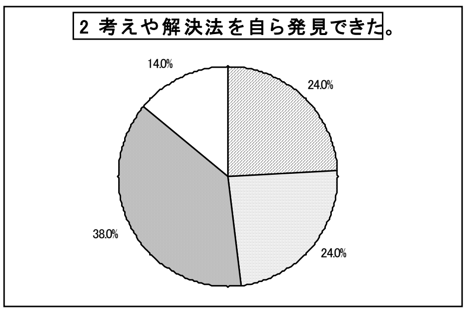
1．今日の授業はどのような授業でしたか。あてはまるものをすべて選びなさい			
	アンケート内容	人	%
1	何を学習するかが明確な授業だった	27	73
2	説明や解説が中心の授業だった。	14	38
3	私たちの理解度を見ながら進めている授業だった。	25	68
4	話の内容が変わるとき、既習の内容との関連を十分説明してくれる授業だった。	18	49
5	進行速度が適当な授業だった。	24	65
6	進行速度が遅すぎる授業だった。	0	0
7	じっくり考える時間がある授業だった。	24	65
8	ノートをとる時間が十分にある授業だった。	16	43
9	先生の指示がわかりやすい授業だった。	19	51
10	先生の説明がわかりやすい授業だった。	28	76
11	黒板にかかれた内容がわかりやすい授業だった。	24	65
12	配布資料（資料・プリント・道具のほか、映像も含む）が効果的な授業だった。	23	62
13	友達の意見を聞く時間がある授業だった。	24	65
14	自ら考えや解決法を発見できる授業だった。	15	41
15	自分の考えを発表できる授業だった。	7	19
16	発言しやすい授業だった。	10	27
17	予習はしなかったが、よく理解できる授業だった。	20	54
18	予習してきたので、よく理解できる授業だった。	6	16
19	授業のレベルが適切な授業だった。	16	43
20	説明の量が適切な授業だった。	19	51
21	新しい内容に入る最初の部分が面白い授業だった。	19	51
22	今までの学習とのつながりがわかる授業だった。	15	41
23	学習の意味や意義がわかる授業だった。	17	46
24	次の授業が楽しみに思える授業だった。	18	49

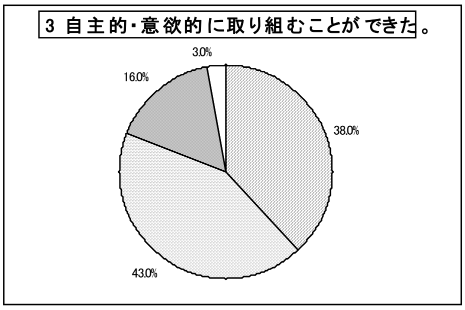


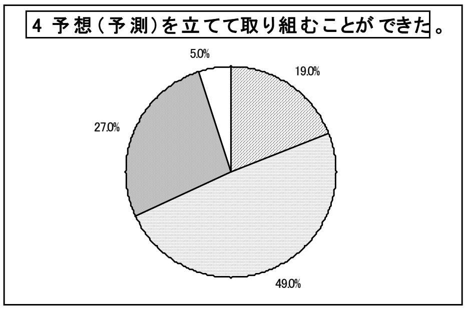
２　今日の授業について，次に示すように１～４で自己評価し，右側の目盛りを○で囲んでください。なお，⑧～⑩については，項目ア，イ，ウから当てはまるものすて 選び，○で囲んでください。

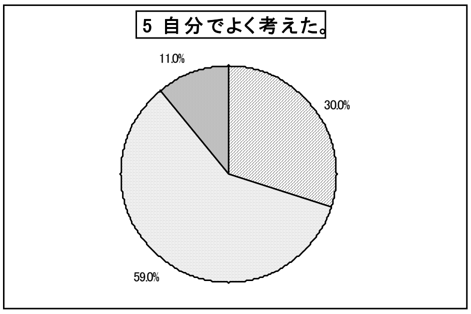
４　全くそう思う　３　そう思う　２　あまり思わない　１　全くそう思わない

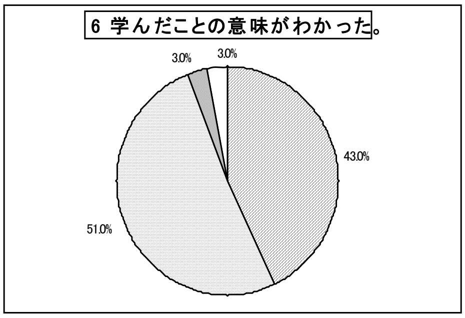


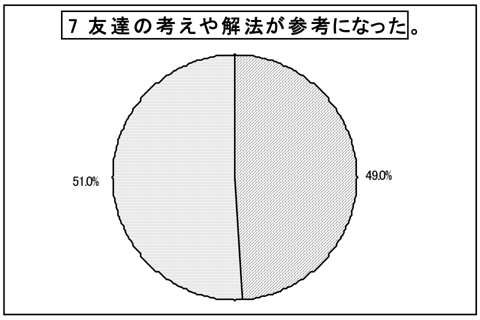


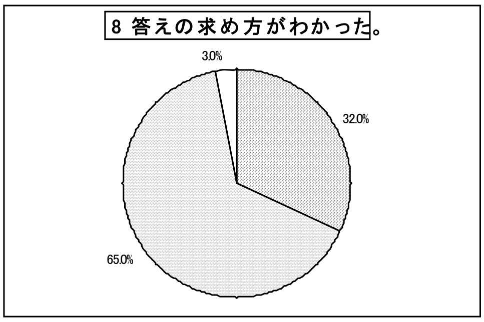


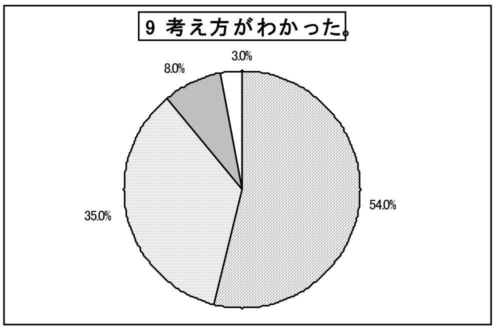


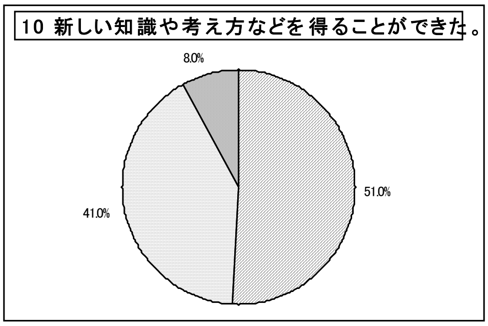












（資料３）本研究授業の１年前に教えた高校２年生（文系）の微分に関する意識調査

資料３は，この研究授業をするきっかけとなった微分を学習し終えた文系の高校２年生の意識調査である。資料からも読み取れるように，微分の計算や問題は解くことができても微分とは何かということがわかっていない高校生の実態が表れている。

ここでは,次のアンケートの２の微分に関する生徒の意識調査を資料として載せる。

実施日　　　２００７．６．２７

対象生徒　　Ｓ高等学校　２年ＤＦ組（文系）34 名

（中高一貫校なので高１までに微分は学習ずみ）

（アンケートの質問） 今まで多くの関数を学習してきました。次の質問に答えて下さい。 １　関数とは何ですか。 ２　微分とは何ですか。 （何を学習したのか，小学生にでもわかるように答えてと，少し言葉でフォローしながら答えさせました。） ３　関数でわかりにくかったところは何ですか。あてはまるものに○をつけ，何がわからなかったか具体的に答えて下さい。 ①比例・反比例　　②１次関数　　③２次関数　④２次関数と最大・最小 ⑤２次関数と方程式 ⑥２次関数と不等式　⑦指数関数　⑧対数関数 ⑨三角関数

アンケートの質問２「微分とは何ですか。」に対しての生徒 34 人のアンケートは次のようなａ～ｆまでのタイプに分けることができた。

ａ　正確に答えられた生徒　２人　(6%)

例・２変数ｘ，ｙについての関数があるとする。微分するということはｘの値を０に近づけ $\dfrac{\text{ｙの変化量}}{\text{ｘの変化量}}$ を求めることである。つまり，ｘの値を極微小に変化させたときｙの変化量を求めるということ。例えば，関数の方程式のグラフについて考える。微分すると，ｘが微量に変化したときの $\dfrac{\text{ｙの変化量}}{\text{ｘの変化量}}$ つまり，あるｘの値を定めたときの接線の傾きが求まる。

ｂ　接線の傾きを求める・微分係数を求める等と答えている生徒　15 人(44%)

例・ある関数の微分係数を求めること（傾きを求めること)。

・ある関数の微分を求めることは，その関数の接線を出すことである。

ｃ　平均変化率と捉えている生徒　１人(2%)

例・関数のある範囲での値がどれだけ変化したかの平均。関数の接線が求められる。導関数を求めることで微分したものが求まる。.

ｄ　計算と捉えている生徒　２人(6%)

例・ 微分とは $y=x^{n}$ という関数があった時にｘの次数を１つ下げて $y'=nx^{(n-1)}$ とすること。

ｅ　計算や解き方は分かるが微分の本質はわからないと答えている生徒　11 人(32%)

例・計算はできるけど微分は何かと言われるとよくわかりません。

・高１のときにやったものの，問題パターンを覚えて解いたので，本当の意味はわかりません。

ｆ　その他（無解答含む）３人(8%)

例・四角を何個も並べて平均したもの（接線を求める）

・ある関数を簡単に形式化したもの。

高等学校数学における「わかる授業」に関する研究

川　口　慎　二
奈良女子大学附属中等教育学校

要約

高等学校数学において，「生徒がわかったと実感することができる授業」とはどのような授業であるか，生徒を対象としたアンケート調査結果をもとに教材および指導法の研究と実践を行い，その効果を検討した。その結果，作業や数学的活動を取り入れた授業，身近な生活の実例や既習事項，または他教科の内容と関連付けて数学を考えることができる授業，概念間の相互関係を認識し，事象や課題を多角的に考察する授業などが生徒に「わかった」という実感を持たせることが明らかになった。

キーワード　わかる授業　数学的活動　関連付け

１．　はじめに

2006 年度，筆者の初任者研修の一環として，「生徒がわかったと実感することができるような授業を展開するためには，どのような教材を用い，どのような指導を行えばよいのか」という課題のもと，５年次（高校２年次に相当）生徒を対象とした数学Ⅱ・Ｂの授業研究を行った。また，奈良教育大学の重松敬一教授と吉田明史教授は外部指導者として，本校の横弥直浩教諭は内部指導者として，筆者の授業を観察して共同して授業研究を行った。

一年間の授業研究を通して，教材や学習指導法を考察する機会が少なく，内容を進めることや演習問題を解けることに重きを置くスタイルが多くなってしまっていた現状に気づいた。そこで，上記課題について，生徒から見た「わかる授業」をアンケートにより調査し，その分析結果から授業研究を行った。年度末に再び生徒にアンケートを取り，その効果について検証を行った。

２．従来の授業に対する反省

本研究を行うにあたり，授業観察を通して，現状の授業を分析することにより，その問題点や課題について整理してみた。

［Ｉ］教材および指導内容の観点

- 演習問題や入試問題が解けることに重点が置かれ，その解法の指導が授業内容の中心になっている。

・計算や機械的処理をできるようになることに教師が熱心になるため，生徒はその計算や処理の意味を理解することがない。

・演習問題の枠を超えて，日常生活における数学の関わり方について触れることがなく，問題解決能力を育成・向上させるような内容の工夫がない。

[Ⅱ]学習指導法の観点

・教師が授業で伝えたい内容を前面に押し出しすぎているため，生徒の自由な考察や思考を妨げ，生徒からの多様な意見，数学的な見方や考え方を引き出せていない。

・生徒の数学的活動が少なく，実験や作業を取り入れた授業ではなく，教師が一方的に進める講義が中心である。

・授業中に生徒に発問しているものの，計算結果や知識を問う一問一答のものが多く，数学的な考え方を問う発問が少ない。

以上をまとめると，大きく分けて次の２つの問題点

［１］　問題演習とその解法の指導に偏重した授業内容

［２］　生徒の活動が少なく，教師の一方的な説明が中心である授業展開

を挙げることができる。

３．生徒からみた「わかる授業」の分析

上述の現状を踏まえた上で,「わかる授業」について考えていきたい。そのためにまず，生徒にとって「わかる授業」とはどのような授業であるのかを教師が認識しておく必要がある。生徒と教師の２つの立場から「わかる授業」をそれぞれ比較し分析することは「わかる授業」構築のために欠かせないものと考える。加えて，生徒が授業中どのような状態・様子であるかを客観的にみることは,「わかる授業」を捉える際に重要である。

（１）文系生徒に対する調査

まず 2006 年度は５年文系生徒対象の授業「解析Ⅲ」を担当した。この授業は，数学Ⅱ・Ｂのうち，恒等式，指数関数･対数関数，数列，微分積分を扱う授業である。数学に自信がない，あるいは受験のために仕方がなく受講している生徒が多い。一方，数学に興味をもち積極的に授業に参加する生徒も数名存在する状況であった。全体的には数学を苦手とする生徒が多かったといえる。

従来の一方的な講義では，その場で問題を解くことができ，目指している表現や処理ができているものの，その効果は一時的であり，しばらく時間が経過すると忘れてしまう部分が多いように感じた。つまり，本質的な理解に至って

いないのである。また，新出の概念や定義が定着せず，授業のたびに前時の内容に大きく時間を割かなくてはならないときもあった。これに対し，ある授業で内容に関連した話題を余談として提供したところ，生徒たちが教師の話に興味を示し，従来の授業では見られない反応があった。

生徒の授業中の様子から考えられるのは，

［１］ 問題演習や解説が中心である場合，生徒は完全に受身になり自らの思考を停止しやすい。

［２］ 新出の概念の導入時に，具体例や歴史的背景について触れた話題を提供すると，授業における反応が向上し，概念の定着がスムーズになされる。

の２点が「わかる授業」の要素として捉えられる。

さらに，生徒の視点からみた「わかる授業」がどのようなものであるかを把握するために，受講生徒を対象にアンケート調査を実施した。本節では，そのアンケート結果をまとめる。

数学の授業に関するアンケート　結果

（回答人数：35 人）

Ｑ１．あなたにとって，数学が「わかる」状況とはどのような状況を指していますか。（複数回答可）

解き方のポイントを提示し，練習を多くできる授業	13 人
身近な話題や現象を取り入れた授業	11 人
内容に関する歴史や応用例について語られる授業	6 人
コンピュータ以外の作業を取り入れた授業	3 人
コンピュータを活用した授業	2 人

Ｑ２．あなたにとって，「わかる授業」とは，どのような授業ですか。最も近いものを選んでください。

問題集の問題が解けたとき	22 人
授業中の説明・解説に対して納得できたとき	21 人
定理・公式の証明ができたとき	15 人
以前に学習した内容との関連性が見つかったとき	14 人
応用例を知ったとき	11 人
授業の内容に関する歴史や背景を知ったとき	5 人

Ｑ３．あなたが今まで受けてきた授業のなかで，印象に残っている授業とはど

のような授業ですか。（自由記述）

［おもな意見］

・グラフ電卓のセンサーを用いて，三角関数のグラフをかいた実験の授業。（7 人）

・正多面体をポリドロンで作ったり，展開図をかいて組み立てたりする授業。（5 人）

・二次方程式や二次不等式を，二次関数のグラフから考えることを知った授業。（4 人）

・三角錐の体積を求める公式を作った授業。（3 人）

・幾何の授業において，球の体積を求めるときに，実際にりんごを細かい柱状に切り，それを集めると球状になることが実感できた授業。（2 人）

・三角比において，単位円の使い方を教えてもらった授業。（1 人）

Ｑ４．あなたは，数学が「わかる」ようになるためには，どのような方法が効果的であると思いますか。（自由記述）

［おもな意見］

・問題を数多くこなし，演習になれること。（27 人）

・定理や公式を鵜呑みにしないで，なぜそれが成り立つのかを根本から理解すること。（8 人）

・先生や友達にどんどん質問して，疑問をその都度解決しておくこと。（7 人）

・自分で問題が解決できるまで，粘り強く取り組むこと。（3 人）

・定理の証明を自分でやり直すこと。（2 人）

上記アンケートの結果を分析して，生徒の側からみた「わかる授業」について考察してみた。

まず，Ｑ１，２およびＱ４の結果についてみることにする。生徒にとって「わかる」とは，問題が「解けるようになる」とほぼ同義であることがうかがえる。この理由としては，「問題が解けるか否か」は生徒から見てもはっきりとした基準であり，生徒が自分で判断できる点が考えられる。したがって，当然「わかる授業」が解法のポイントを押さえた授業であることになるのであろう。しかし，多くの生徒にとっては，「わかる」状況は問題が解けるようになるだけではなく，教師の説明に納得でき，自らのなかできちんと消化できているという状況や，自分の中にある既存の知識と関連付けができ，「知のネットワーク」が形成されている状況も含まれていることにも気づく。したがって，身近な具体例や内容に関する背景を知ることができる授業が「わかる授業」であるとする生徒がいることも納得できる。

次にＱ３について，生徒のなかで印象に残っている授業は，体験・実験を取り入れた授業が多いことがわかる。実際に自分たちで作業を行い，そこから数学的事実を抽出するという数学的活動は，学習内容の定着や「わかる」感覚をつかむ上で，大変有効である。また，生徒の中に残っている授業こそ，まさに生徒が「わかった授業」を指しているように思われる。Ｑ３においても，学習内容が既存の知識と結合し，関連付けができたことに大きな驚きと感動をおぼえている点が興味深い。

このように「わかる」状況を調べてみたが，大きく３つに分けることができる。１つ目は，計算ができ，グラフがかけるという表現・処理ができること，２つ目は，概念の意味を知り理解すること，３つ目は，具体的な事象や既存の知識との関連に気づくということである。

（２）理系生徒に対する調査

2007 年度は５年理系生徒対象の授業「代数・幾何Ⅲ」を担当した。この授業は，数学Ⅱ・Ｂのうち，複素数と高次方程式，図形と方程式，ベクトルを扱う授業である。生徒の様子としては，数学に興味・関心の高い者や数学に自信を持つ者がいる一方，数学にいまひとつ自信の持てない生徒もいる。全体的に，授業に臨む基本的な姿勢はできており，その授業の場では問題を解くことができ，目指している表現や処理ができている。演習問題にもきちんと取り組み，課題の提出率も高い。文系生徒に比べると，新出の概念や定義に対する対応力高いが，理解や定着は難しい。しかし，抽象的な話題にも一定の興味を引いたようではある。もちろん，歴史的な背景や物理現象との関わりについての話題を提供したときにも，生徒たちは興味を示した。

このように，理系生徒の授業中の様子をまとめると，

［ⅰ］ 抽象的な概念に対する抵抗は少ないものの，理解することができることは困難が伴う。

［ⅱ］ 教科を越えた具体例や歴史的背景について触れた話題に対する反応がよい。

［ⅲ］ 新しい単元に入ると，全く新しい話としてはじめから覚えようとしてしまう。

の３点が特徴として挙げられる。

そこで，2006 年度と同様に，受講生徒を対象にアンケート調査を実施した。2006 年度は，項目を選択する形式であったが，選択肢に縛られることなく，より率直に回答してもらうために，同じ質問であるが自由筆記の形式を採った。

数学の授業に関するアンケート　結果

（回答人数：75 人）

(1)あなたにとって，数学が「わかる」状況とはどのような状況を指していますか。(自由記述)

［おもな意見］

・問題集の問題が解けたとき。(48 人)

・授業中の説明・解説に対して納得できたとき。(34 人)

・物理などへの応用例を知ったとき。(16 人)

・以前に学習した内容との関連が見つかったとき。(14 人)

・定理・公式の証明ができたとき。(13 人)

・授業の内容に関する歴史や背景を知ったとき。(8 人)

・頭の中でイメージできたとき。(3 人)

・仕組みが理解できたとき。(2 人)

・考える道筋が見えたとき。(1 人)

(2)あなたにとって，「わかる授業」とは，どのような授業ですか。（自由記述）

［おもな意見］

・解き方を提示し，問題練習を多くできる授業。（45 人）

・身近な話題や現象を取り入れた授業。(27 人)

・コンピュータや作業などの活動を取り入れた授業。(24 人)

・授業内容だけではなく，より発展的な数学の話が聞ける授業。(10 人)

・結論がはっきり明確である授業。(8 人)

・内容に関する歴史や応用例について語られる授業。(7 人)

・浮かんでくる疑問を確実に解消していける授業。(4 人)

・先生が熱心で，その情熱が伝わる授業。(1 名)

・生徒の進路を考えながら進めてくれる授業。(1 名)

(3)あなたが今まで受けてきた授業のなかで，印象に残っている授業とはどのような授業ですか。

（自由記述）

［おもな意見］

・グラフ電卓のセンサーを用いて，三角関数のグラフをかいた実験の授業（16 人）

・正多面体をポリドロンで作ったり，展開図をかいて組み立てたりする授業。（11 人）

・角の三等分線の作図が一般には不可能であることを学んだ授業。（8 人）

・三角比の角度を拡張して(一般角を扱うことにより)，三角関数へと拡張した授業。(1 人)
・特にない。(18 名)

(4)あなたは，数学が「わかる」ようになるためには，どのような方法が効果的であると思いますか。(自由記述)

［おもな意見］
・問題を数多くこなし，演習になれること。(27 人)
・定理や公式を鵜呑みにしないで，なぜそれが成り立つのかを根本から理解すること。(8 人)
・先生や友達にどんどん質問して，疑問をその都度解決しておくこと。(7 人)
・自分で問題が解決できるまで，粘り強く取り組むこと。(3 人)
・土台となる考え方や基本事項の理解に力を入れる。(2 人)
・定理の証明を自分でやり直すこと。(2 人)
・基本となる計算力を身につける。(2 人)

このアンケート結果を分析して，理系生徒のみた「わかる授業」について考察する。

まず，Ｑ１，２およびＱ４の結果についてみることにする。生徒にとって「わかる」とは，問題が解けるようになることが中心であることがうかがえる。この傾向は，2006 年度文系生徒を対象に実施したアンケート結果と同様であり，「問題が解けるか否か」はやはり生徒が自分で判断できることである明確な基準であるためと考えられる。ゆえに,「わかる授業」が解法のポイントを押さえた授業となる。それに加えて，教師の説明に納得でき，きちんと消化できているという状況や，自分の中にある既存の知識と関連付けができている状況も含まれていることにも気付く。

次にＱ３について見てみると，生徒のなかで印象に残っている授業は，体験・実験を重視する授業が多いことがわかる。実際に自分たちで作業を行い，そこから数学的事実を抽出するという数学的活動は，学習内容の定着や「わかる」感覚をつかむ上で，大変有効であることが確認できる。さらに，学習内容が既存の知識と結合し，関連付けを行いながら，学習内容の発展・拡張が行われている。

以上の分析から，理系生徒を対象に行った「わかる授業」に関するアンケートの結果も，文系生徒とほぼ同様であることがわかった。その上で，理系生徒はより抽象的な世界において，学習内容と具体例や既存の知識との関連付けが

なされることを「わかる」と捉えていることがわかる。

４．授業実践例

（１）「解析Ⅲ」での実践例

①時事に絡めた常用対数の導入

「指数・対数」の単元において，現実世界との関わりが強い内容として，常用対数があげられる。ちょうどこの授業を行った時期には，「冥王星が惑星から外れて矮惑星に分類される」，「北朝鮮により核実験が実施される」というニュースが話題になっていた。巨大な数の世界と極微な数の世界という対称的な世界が同時期に話題になっていたため，常用対数の導入として関心を引くべく題材を作った。図１に授業プリントを付した。

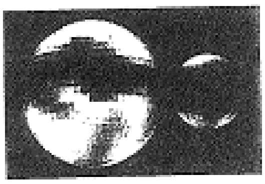
③対数の応用を意識した演習問題

新しい内容・概念の導入だけではなく，生徒が重視する演習問題においても，うまく現実の世界や身近な生活を意識させるものができないかという観点から，演習プリント（図２）において北朝鮮による核実験のネット記事を題材に，常用対数を用いる問題を作った。

文系生徒の中には，この時期に海外から当時本校に訪問していた生徒たちを広島の原爆ドームへ連れて行き原爆被害を紹介した者もいて，原爆の悪影響や完全に消滅するまでのあまりに長い時間に大きな驚きをおぼえたようである。

解析 III　　常用対数 (1)

1. 2006 年 8 月，国際天文学連合 (IAU) は，冥王星を惑星のカテゴリーから外し，「矮小惑星」(やや小さめの惑星) のカテゴリーを新たに設け，そのカテゴリーに入れることを決定し，大きな話題になりました．



冥王星 (左) と第 1 衛星カロン (ハッブル宇宙望遠鏡による観測)

http://ja.wikipedia.org/wiki

さて，次の表は，各天体について，地球からの距離を表しています．

	地球からの距離
冥王星	およそ 4500000000 km
土星	およそ 1470000000 km
金星	およそ 210000000 km
シリウス	およそ 81000000000000 km

(1) 各天体の地球からの距離を比較しよう．

i. 地球から近い順に並べてみよう．

ii. 何に注目しましたか．

(2) 天文学で使われる距離に関する単位のなかで，よく知られているものとしては，「光年」があります．1 光年は，光が 1 年間に進む距離として定義され，およそ 9500000000000 km です．では，シリウスは地球から何光年離れているのでしょうか．

2. 先日，北朝鮮が地下核実験を行い，日本はもとより，国際社会が大きな懸念を示しています．核爆弾には，放射性物質であるプルトニウム (Pu) やウラン (U) の核反応により起爆させます．また，このような「原子爆弾」の他，水素 (H) 原子を用いた「水素爆弾」も残念なことに，多く実験されました．

さて，次の表は上に挙げた原子の半径をまとめたものです．

	原子半径
H	およそ 0.000000025 mm
Pu	およそ 0.00000015 mm
U	およそ 0.00000015 mm

(1) 各原子の半径を比較しよう．

i. 原子半径の小さい順に並べてみよう．

ii. 何に注目しましたか．

(2) プルトニウム原子の半径は，水素原子の半径の何倍の大きさですか．

図１　常用対数の導入に関する授業プリント

54. 次の記事は 2006 年 10 月 14 日付の asahi.com である.

放射性物質検出, 半減期短ければ核実験「証拠」に

北朝鮮が発表した核実験について, 裏付けになるとみられる放射性物質を米軍機が検出したと伝えられたが, 米国は物質の種類をまだ明らかにしていない. 検出されたのが, 半減期が約 5 日のキセノン 133 や約 13 日のバリウム 140 など寿命も短い種類であれば, 通常は自然界に存在しないので, 北朝鮮の核実験で放出された可能性が極めて高くなる. 9 日の地下爆発は「核実験だった」とほぼ断定できる決め手となる.

核実験では, 瞬時の核反応で様々な放射性物質ができる. それぞれの物質は, 壊れて全体の量が半分になる半減期が異なるため, 採取する時期によって, 確認できる放射性物質の種類が異なる. また, 物質によっては壊れると違う放射性物質に変わっていく性質もある. 米軍は爆発直後から連日, 大気を採取して分析を進めている. 今回, 具体的な物質名は示さなかったものの, 複数の放射性物質とその割合から, 核爆発の「証拠」を突き止めることになりそうだ. (以下略)

(http://www.asahi.com/international/update/1014/027.html?ref=rss)

上のように, 放射性物質の同位元素は不安定であるため, 崩壊が進み, 放射線を出しながら別の元素に変わる. 半減期の長いウランやプルトニウムは拡散したままほとんど減ってはいないが, 放射線の量は少ないままである. 実際に, プルトニウム 239 の半減期を調べてみると, 約 24100 年である. では, 一定量のプルトニウム 239 が 10 分の 1 まで減少するためには, 何年必要であるか.

図２　新聞記事と関連した演習問題

④対数の応用

授業で取り扱う時間が足らないこともあったため，レポート課題の解答プリントに，常用対数のいろいろな応用例をコラムとして提供した。文系生徒は，生物や地学を履修しているものが多く, 理科でよく知っている pH やマグニチュードなどの概念が，実は対数により定義されていたことを知って驚いている生徒もいた。図３にコラムを付した。

[コラム] 対数や対数関数は, 自然現象の様々なところで, 応用されている. そのいくつかについて紹介しよう.

(1) 酸性・中性・アルカリ性

最近私たちの身の回りでは, 酸性食品よりもアルカリ性のものの方が身体によいと聞くことが多い. このような, 酸性・中性・アルカリ性を示す指標に「pH(ペーハー)」がある. 一定量の純水 (純度の高い水)H_2O には, 水素イオン H^+ と水酸化物イオン OH^- が同量だけ存在する. 水素イオンの濃度を $[H^+]$, 水酸化物イオンの濃度を $[OH^-]$ とそれぞれ表すと, $[H^+]=[OH^-]=10^{-7}$ (mol/ℓ) である. この積の値 $[H^+]\cdot[OH^-]=10^{-14}$ を**水のイオン積**といい, 一定温度下では, 常に一定である.

ある水溶液中の $[H^+]$ が 10^{-7} より大きいとき, その水溶液は**酸性**, 小さいときは**アルカリ性**, ほぼ 10^{-7} に近いときには**中性**という. ここで, その指標として, **水素イオン指数**(pH) $-\log_{10}[H^+]$ を用いる. この指標を用いると, 酸性ならば pH<7, 中性ならば pH$=7$, アルカリ性ならば pH>7 となることは直ちにわかる.

(2) 地震の規模

日本は環太平洋造山帯の一部にあり, 世界有数の地震国である. 古来より, 大規模地震が定期的に発生し, その都度, 甚大な被害をもたらしている. それゆえ, 日本の地震観測技術は世界的にも優れたものとして知られている. 実際に, 地震発生の数分後には, 震源の位置・深度, 各地の震度と地震の規模の詳細がわかる.

さて, その地震の規模については, **「マグニチュード」**という数値で測られている. 地震のマグニチュード M は, 地震のエネルギー E (J) に対して, $\log_{10}E = 4.8 + 1.5$ M という関係式で与えられる. この関係式から, $E = 10^{4.8+1.5M}$ が成り立ち, マグニチュードが 1 上がるごとに, 地震のエネルギーは $10^{1.5} \fallingdotseq 31.6$ 倍になり, 2 上がると $10^3 = 1000$ 倍にまでなることがわかる. ちなみに, 新潟県中越地震 (2004.10.23) は M$=6.8$, 阪神淡路大震災 (1995.1.17) は M$=7.3$, 関東大震災 (1923.9.1) は M$=7.9$, スマトラ沖地震 (2004.12.26) は M$=9.3$ であった.

(3) 騒音対策

我々の日常生活には, 音に溢れている. 車の通行音, テレビ・ラジオの音, 雨風の音, 鳥のさえずり $\cdots$ etc. 人間が生活するうえで, ある程度の音が生じるのは仕方がないが, 度を越えると我慢できなくなり, 騒動を引き起こすことにもなる (たしか奈良でもありましたよね). また, 電車の線路沿いや高速道路沿い, 空港の近くに住む人たちにとっては, 過度の騒音が大きな問題になっている.

さて, この音の大きさを表す単位に**「デシベル (dB)」**がある. この値は, エネルギーが I (W/m^2) である音について, 人間の聞き取れる最小の音のエネルギーを $I_0 = 10^{-12}$ (W/m^2) として, I と I_0 の比を用いて, $10\log_{10}\frac{I}{I_0} = 10\log_{10}I + 120$ と定められる. ちなみに, ジェット機の騒音は 120dB, 人の普通の会話は 60dB, 電話の音は 70dB 程度であるそうだ.

(4) その他

上記以外にも, 常用対数が現れる場面は実に多い. 常用対数は, 夜空に瞬く星の明るさ (等級) や放射性物質の半減期(演習プリント No.11 参照) などの自然科学のみならず, 人の刺激に対する感受性などの医学・生理学, 複利計算や金融シミュレーションなどの経済学, 化石や出土品の年代鑑定などの考古学など, 社会科学・人文科学においても広く活用されている.

図4　常用対数の応用を紹介したコラム

（２）「代数・幾何Ⅲ」での実践例

①ベクトルの導入

ベクトルの導入として，幾何の問題を設定し，生徒たちがどのように解くのかを観察した。その結果，平面幾何を用いて考える者，座標を入れて計算で処理しようとする者など，多様であった。メネラウスの定理を用いれば，即座に解決する問題であるが，この方法で解決した生徒は１人のみであった。

例題

同一直線上にない３点 O, A, B があり，OA を２：１に内分する点を Q，OB を１：３に内分する点を R，AR と BQ の交点を S とする。また，点 O から点 S に向かって半直線を引き，OC=10 OS となるように点 C をとる。

この題材は，共同研究「高大連携を志向した実験的教科書・教材の有効性の実証的研究」(丹後，2008)の実践として行った授業であり，導入では幾何的に苦労して解決した問題を，ベクトル学習後には，より容易に解決することにより，ベクトルの有用性や多様な見方の重要性を認識することに対して，効果的であった。パラシュート型学習(単元全体を見渡し，到達点を定めてから具体的学習に降りる学習方法)を取り入れた導入という教科書作成の工夫について，一定の効果をみたといえよう。

図をかいて、証明してみよう。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると, $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\vec{b}$ である.

ここで, QS : SB $= s:(1-s)$ とすると,

$$\overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OB}+(1-s)\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

であり, 一方で, AS : SR $= t:(1-t)$ とすると,

$$\overrightarrow{OS}=t\overrightarrow{OR}+(1-t)\overrightarrow{OA}=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}$$

である. ここで, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ (つまり, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立) ゆえ,

$$\frac{2}{3}(1-s)=1-t,\quad s=\frac{1}{4}t$$

である. この連立方程式を解くと, $s=\frac{1}{10}$, $t=\frac{2}{5}$ となる.

すると, $\overrightarrow{OS}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}$ であり, $\overrightarrow{OC}=10\overrightarrow{OS}$ ゆえ, $\overrightarrow{OC}=6\vec{a}+\vec{b}$ となる.

ゆえに, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(6\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=6\vec{a}$ となり, $\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{BC}$ となる. したがって, 四角形 OACB は台形である. (Q.E.D.)

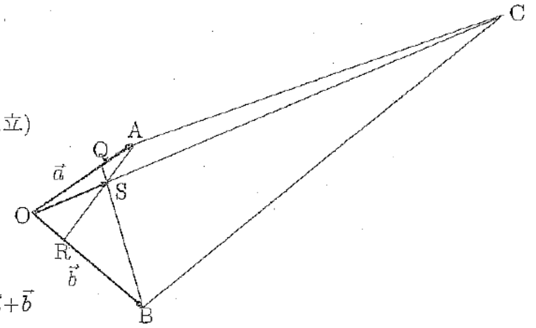


図４　ベクトル学習後に多くみられた解法

②ベクトルの応用

「オイラー線」の証明問題を提示したところ，多くの生徒が「重心」や「垂心」などのいった言葉から，平面幾何の知識で証明しようと試みていた。しか

し，ベクトルの考え方を用いれば，鮮やかに証明することができる。複雑な幾何的対象を，ベクトルという代数的対象へ見方を変えることにより，比較的容易な代数的処理により，解決することができることを生徒たちは実感したようである。

③軌跡の応用

グラフの移動について，軌跡の考え方を用いて解説したプリントを配布した。グラフの移動については，消化不良のまま，公式として丸暗記している生徒が多いが，このように少し見方を変えただけで，十分納得することが可能であることを実感した題材である。軌跡の考え方を理解することも難しいポイントであるが，グラフの移動という視覚的効果も働いたせいか，軌跡自体の理解促進に繋がった。図５にプリントを付す。

５．授業後のアンケートの分析

前節で挙げた実践例を通して，生徒がどの内容を「わかった」と感じたのか，また生徒の数学観や数学に対する認識がどのように変化しているのかをみることにより，「わかる授業」の考察についての検証を行えるのではないかと考えられる。そこで，生徒にアンケートを実施し，その結果を分析してみる。

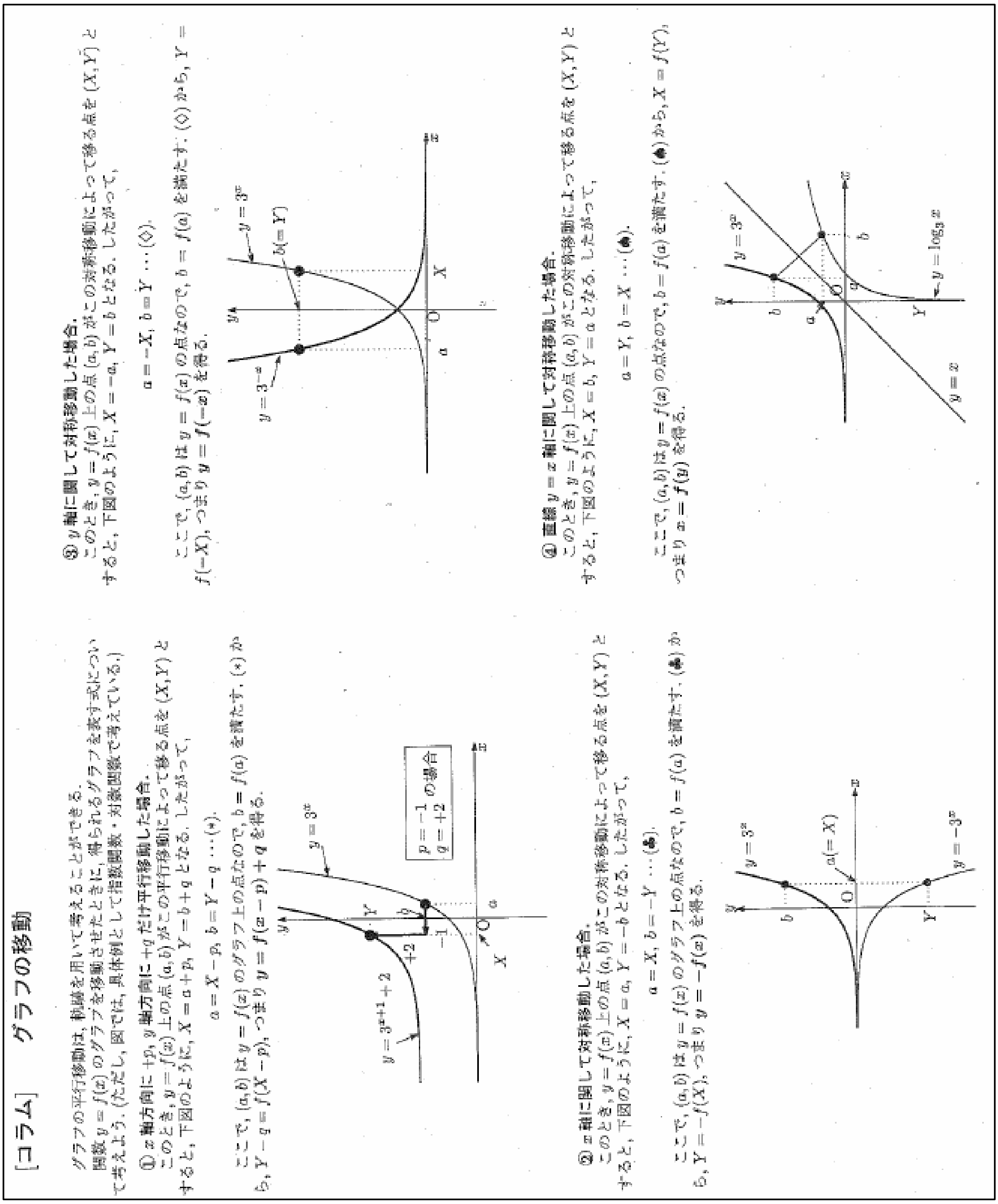
（１）文系生徒に対するアンケート結果とその分析

数学の授業に関するアンケート　結果

（回答人数：35 人）

Ｑ１．「指数・対数」の内容がわかったと感じるのは，どのようなときですか。（複数回答可）

対数の計算ができたとき　(16 人)
累乗根と指数の関係を知ったとき　(15 人)
実際の現象に，指数関数や対数関数を応用して考えることができたとき　(14 人)
対数の意味を知ったとき　(13 人)
指数関数や対数関数のグラフがかけたとき　(12 人)
常用対数の意味を知ったとき　(10 人)
対数の底の変換ができたとき　(9 人)
指数法則を，負の指数や分数の指数へ拡張できることを知ったとき　(7 人)
指数関数や対数関数の意味を知ったとき　(7 人)



[コラム]　グラフの移動

グラフの平行移動は，軌跡を用いて考えることができる．
関数 $y=f(x)$ のグラフを移動させたときに，得られるグラフを表す式について考えよう．(ただし，図では，具体例として指数関数・対数関数で考えている．)

① x 軸方向に $+p$，y 軸方向に $+q$ だけ平行移動した場合．
このとき，$y=f(x)$ 上の点 (a,b) がこの平行移動によって移る点を (X,Y) とすると，下図のように，$X=a+p$，$Y=b+q$ となる．したがって，

$$a=X-p,\ b=Y-q \cdots (*).$$

ここで，(a,b) は $y=f(x)$ のグラフ上の点なので，$b=f(a)$ を満たす．$(*)$ から，$Y-q=f(X-p)$，つまり $y=f(x-p)+q$ を得る．

② x 軸に関して対称移動した場合．
このとき，$y=f(x)$ 上の点 (a,b) がこの対称移動によって移る点を (X,Y) とすると，下図のように，$X=a$，$Y=-b$ となる．したがって，

$$a=X,\ b=-Y \cdots (\clubsuit).$$

ここで，(a,b) は $y=f(x)$ のグラフ上の点なので，$b=f(a)$ を満たす．$(\clubsuit)$ から，$Y=-f(X)$，つまり $y=-f(x)$ を得る．

③ y 軸に関して対称移動した場合．
このとき，$y=f(x)$ 上の点 (a,b) がこの対称移動によって移る点を (X,Y) とすると，下図のように，$X=-a$，$Y=b$ となる．したがって，

$$a=-X,\ b=Y \cdots (\diamondsuit).$$

ここで，(a,b) は $y=f(x)$ の点なので，$b=f(a)$ を満たす．$(\diamondsuit)$ から，$Y=f(-X)$，つまり $y=f(-x)$ を得る．

④ 直線 $y=x$ 軸に関して対称移動した場合．
このとき，$y=f(x)$ 上の点 (a,b) がこの対称移動によって移る点を (X,Y) とすると，下図のように，$X=b$，$Y=a$ となる．したがって，

$$a=Y,\ b=X \cdots (\spadesuit).$$

ここで，(a,b) は $y=f(x)$ の点なので，$b=f(a)$ を満たす．$(\spadesuit)$ から，$X=f(Y)$，つまり $x=f(y)$ を得る．

図５　軌跡の考え方によるグラフの移動

Ｑ２．あなたにとって，「数学」とは一言で表すとどのような教科ですか。（自由記述）

［おもな意見］

・専門的　・筋が通っている　・理解できるとスッキリする　・elegant

・果てしないもの　・無限に広がる世界　・様々な話が複雑に絡んでいる
・日常生活にそのまま使いにくい　・難敵　・深遠なもの
・答えが一つに定まるもの　・人間の想像力が極みに達したもの

Ｑ３．授業を受けて感想を自由に書いてください。（自由記述）

［おもな意見］
・いろいろな話が面白かった。（7 人）
・一度で理解することができていなかったので，何度も説明してくれてよかった。（6 人）
・いつもよりは頭に残っている感じがする。（5 人）
・苦手意識が強かったが,「そうなんだ」と感じることができるときがあった。（4 人）
・身近な現象の話は，数学が大嫌いだったけど，興味をもった。（4 人）
・数学が少しだけ面白いと感じたし，好きになった。（3 人）
・単元のはじめで，ゆっくりいろんな話をしてくれて，なんとかついていけた。（3 人）
・数学嫌いの私にも，なんとなくわかった話があったので嬉しかった。（3 人）
・すこしペースが遅く，教科書以外の話が長かったように思う。（2 人）
・決して数学が得意でもないし，好きにはなっていないが，授業は楽しかった。（2 人）
・公式をひとつひとつ作っていくことが，私には驚きだった。（1 人）

このアンケートから，本実践により，生徒の中には数学に対する意識・姿勢が変化したことがわかる。数学に対する嫌悪感や苦手意識を完全に取り去ることは難しいが，授業のほんの一部でも興味を抱いたり，納得できたり，面白さや驚きを感じられる部分ができ，従来の授業とはかなり異なる反応がみられる。

また，教科書にはない話題や題材を提供することにより，大多数の生徒にとっては，数学がどのような形で現実世界に現れているのかを知るよい機会になっているようである。一方，文系生徒の中でも，受験意識の強い少数の生徒は依然として「問題を解く」ことにも価値を見出している。

（２）理系生徒に対するアンケート結果とその分析

数学の授業に関するアンケート　結果

（回答人数：75 人）

Ｑ１．代数・幾何Ⅲ授業の内容がわかったと感じたのは，どのようなときです

か。（自由記述）

・iやωの意味や使い方がわかったとき。(16 人)

・因数定理と剰余の定理の使い方がわかったとき。(15 人)

・解と係数の関係と解の公式や判別式と関係がわかったとき。(7 人)

・組立除法ができたとき。(4 人)

・幾何で考えると複雑な問題が，式の計算だと簡潔に解決してしまったとき。(28 人)

・円の接線を考える際に，判別式を用いた方法と半径と中心―直線間の距離を用いて考える方法を知ったとき。(12 人)

・ベクトルも見方を変えると，図形と方程式でやった内容と同じ部分があると気付いたとき。(37 人)

・位置ベクトルをうまく使いこなせたとき。(10 人)

・空間ベクトルと平面ベクトルの共通点と相違点をきちんと理解できたとき。(15 人)

Q２．あなたにとって，「数学」とは一言で表すとどのような教科ですか。（自由記述）

［おもな意見］

・無限　・絶対的　・自由　・自然科学の言葉　・緻密

・忍耐の学問　・奥深い　・深くて広い　・ジャングルみたい

・一つの結論に様々な方向からたどり着く　・完璧を追求する学問

・現象を式で表して解決できる　・パズル　・面白い教科

・意味の世界　・堅い学問　・客観的

・規則がきっちりしているからこそ有力な学問

Q３．授業を受けて感想を自由に書いてください。（自由記述）

［おもな意見］

・数学を専攻するわけではないが，数学を「受験のためだけのもの」にはしたくない。(複数)

・一度で理解することができていなかったので，何　度も説明してくれて助かった。

・一年間楽しんで授業に参加できた。(複数)

・難しかったが，いつものように「お手上げ」にはならなかった。

・テストはよくなかったけど，n次元の話は面白かった。

・授業の中の雑談(「数学」という学問のこと)は面白かった。(複数)

・進度は決してゆっくりではなかったが，テンポがよかった。

・しんどかったが，力はついたような気がする。
・特にベクトルが楽しかった。
・数学は根っこでつながっているんだと知りました。（複数）

このアンケートから，本実践により，理系生徒の中に対しても，数学に対する意識・姿勢の向上に効果があったことがわかる。もともと，理系生徒では，数学に対する嫌悪感や苦手意識は少ないが，これをさらに好転させることができた。授業のほんの一部の雑談や教科書には載っていないような発展的な話題に興味を抱いたり，面白さや驚きを感じられたりする部分ができたようであり，従来の演習と解説を繰り返す授業とはかなり異なる反応が今回もみられる。

また，大多数の生徒にとって，「複素数」，「座標幾何」，「ベクトル」の相互関係を意識する機会が増えたことで，より広い視野で問題を眺めることが可能になったように思われる。受験だけの数学で終わらせたくないという感想が複数の生徒からあがったことからも，一定の効果があるように思われる。Ｑ１のなかでも，「幾何の問題として考えると複雑であったものが，式やベクトルを用いることで容易に考えられる」ことを多くの生徒が指摘していることもうかがえる。このように，各単元の内容や概念を，いかに関連付けて指導できるかという観点は，「わかる授業」を構成する上で，重要なポイントになると思われる。

このような２年間の実践に関するアンケート結果を，「わかる」の状況に分けて考察してみたい。まず，「Ａ：処理の理解」として，計算ができる，式を作ることができるという，処理の方法がわかり，処理が可能になることに関する回答をグループとした。また，「Ｂ：意味の理解」として，関係性の理解や式や計算の意味を理解し，なぜこのような処理をするのかについてわかることに関する回答をもう１つのグループに，さらに，「Ｃ：応用に理解」として，自然現象や身近な生活のなかで，学習したことがどのように利用されているのかがわかるということに関する回答を別のグループとした。

Ｑ１．「指数・対数」の内容がわかったと感じるのは，どのようなときですか。（複数回答可）

Ａ：処理の理解…対数の計算や底の変換ができたとき
　　　　　　　　指数関数や対数関数のグラフがかけたとき
Ｂ：意味の理解…累乗根と指数の関係，対数や常用対数の意味などを知ったとき
Ｃ：応用の理解…実際の現象に，指数関数や対数関数を応用して考えたとき

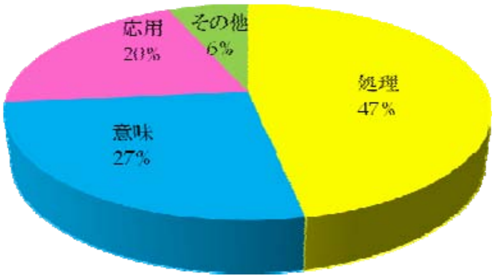
Ｑ２.「代数・幾何Ⅲ」の内容がわかったと感じるのは，どのようなときですか。（自由記述）

Ａ：処理の理解…組み立て除法ができたとき，位置ベクトルが使いこなせたとき

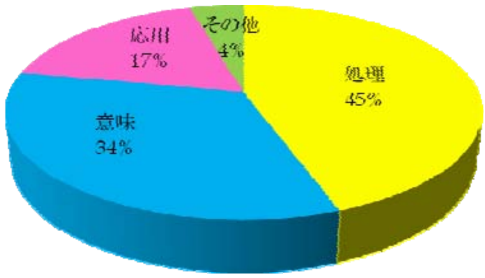
Ｂ：意味の理解… i や ω の意味を理解することができたとき
ベクトルと座標の関係がみえたとき

Ｃ：応用の理解…幾何の問題を計算によりできたとき

数学が「わかった」と感じるのはどのようなときですか？



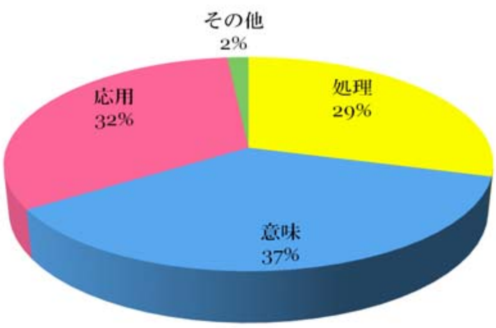
2006 年度文系



2007 年度理系

図６　授業前のアンケート結果

Q1 の結果



Q2の結果

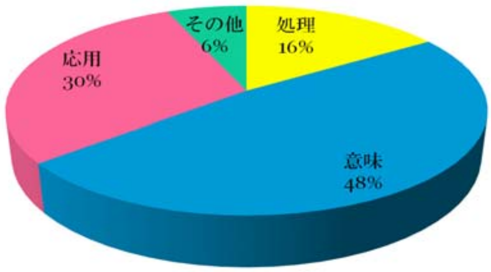


図７　授業後のアンケート結果

この結果から，当初は数学が「わかる」ことを処理の理解と大半が認識していた状況が，先に紹介した授業の実践により，意味の理解として捉える生徒，応用の理解として捉える生徒の割合が増したことが確認できる。

６．まとめ

普段の授業では，教材や学習指導法を考察する機会も少なく，演習問題を解けることに重きを置くスタイルが多くなってしまっていた。本研究を通して，授業対象の生徒が「わかる」状況あるいは「わかる授業」をどのように捉えているかを知るよい機会となった。また，生徒たちの数学観を少しでもよい方向に転換できた。また，多くの生徒が「わかる」状況あるいは「わかる授業」を，問題を解く力をつけるものとして捉えていることが判明した。本研究を通して，生徒の数学に対する姿勢・意識や予備知識の程度に応じて，「わかる」状況もより多様に変容し得ることが明らかになった。後述のように，概念間の相互関係を把握するには，基本事項を抑えておく必要があるだろう。

本実践を通して，次のような結論を得ることができた。

[ⅰ]生徒自身による作業や数学的な活動を取り入れた授業は生徒の理解を補助する。

[ⅱ]身近な生活や既習の内容，既習事項や他教科との関連付けが可能な教材を活用した授業は生徒の理解に対して有効である。

[ⅲ]概念間の相互関係を意識して，事象や課題を多角的・多面的に考察する授業も「わかる授業」の一つの側面をなす。

７．課題

「わかる」という感覚は生徒の能力や経過，状況に応じて当然変化するものであろうし，これまで考察した内容が，すべての場面，すべての生徒に適するものではなく，さらに対象を広げて有効性を分析する必要である。また，「わかっている」という状態をどのように評価するかは「わかる授業」を構築する上で重要な要素となる。アンケートやインタビューを取り入れるとともに，評価問題や評価課題をどのように設計するかが今後の大きな課題になる。

＜参考文献＞

[1] 丹後　弘司,「高大連携を志向した高等学校数学の教育課程や教科書の開発研究」, 平成 17・18 年度科学研究費補助金・基盤研究(C) (課題番号 17500585) 研究成果報告書，82 ページ.

２－６　確率・統計分野

資料の散らばりと代表値

西　村　圭　一
国立教育政策研究所教育課程研究センター

１　資料の散らばりと代表値

校種　　　国立大学法人附属中等教育学校
学年　　　1年
単元名　　資料の見方

２ 小中高校種間の接続：学びの系統

小学校算数科では，棒グラフ，折れ線グラフ，円グラフ，帯グラフを学習し，度数分布を表やグラフに表したり，資料の平均や散らばりを調べるなどの活動を通して，統計的に考察したり表現したりすることを学習する。また，第6学年では，具体的な事柄について起こり得る場合を順序よく整理して調べることを学習する。

中学校第1学年では，これらの学習の上に立って，資料を収集，整理する場合には，目的に応じた適切で能率的な資料の集め方や，合理的な処理の仕方が重要であることを理解できるようにする。さらに，ヒストグラムや代表値などについて理解し，それらを用いて資料の傾向をとらえ説明することを通して，資料の傾向を読み取ることができるようにする。第 2 学年では，第1学年における相対度数の学習の上に立って，確率を用いて不確定な事象をとらえ説明できるようにする。第3学年では，第1学年，第 2 学年の学習の上に立って，母集団の一部分を標本として抽出する方法や，標本の傾向を調べることで，母集団の傾向が読み取れることを理解できるようにする。

高等学校数学Ⅰでは，中学校での学習をさらに発展させて，四分位数，四分位範囲，四分位偏差，分散及び標準偏差などの意味を理解させるとともに，それらを利用してデータの傾向を的確にとらえ説明できるようにする。また，散布図及び相関係数の意味を理解させるとともに，それらを利用してデータの相関を的確にとらえ説明できるようにする。数学Ａでは，中学校第 2 学年で学習した，起こり得る場合を順序よく整理し数え上げることによって確率を求めることを発展させ，数え上げの原則や，順列・組合せ及びその総数の求め方について理解させるとともに，それらを具体的な場面に活用できるようにする。

数学Ｂでは，確率変数や確率分布（二項分布と正規分布）について理解させる。また，標本調査の考え方及びそれを用いて母集団のもつ傾向を推測する方法について，具体的な例や作業を通して理解させる。

数学活用では，二つのデータ間の関係を散布図や相関係数を用いて調べたり，散布図に表わしたデータを関数とみなして処理したりすることや，時系列データを移動平均を用いて調べることなどを学習する。

3 本授業でわかってほしいこと

この授業でわかってほしいことは，ヒストグラムや代表値の必要性と意味を理解し，それらを用いてデータの傾向をとらえることと，統計的な問題解決の方法である。統計的な問題解決の方法とは，次のように表される問題解決過程である。

> 問題を解決するために，次の4つのデータの処理過程のそれぞれを実行する
> i 問題を明確にし，計画を立てる，すなわち，必要とされるデータに関する問いを定式化し，データからどのような推測ができるかを考え，どのようなデータを収集し（サンプルの大きさとデータの形式を含む），どのような統計的分析が必要かを決定する
> ii 実験や調査，1 次資料や 2 次資料を含む，さまざまな適切な情報源から，データを収集する
> iii データを処理し，表現する，すなわち，生のデータを，問題に対して洞察を与えるような役立つ情報に変換する
> iv データを解釈し議論する，すなわち，データから結論を導くことによって最初の問いに答える

（イギリス（イングランド）の国家カリキュラム，1999 年版）

本稿では，ⅰを定式化，ⅱをデータの収集，ⅲをデータの処理，ⅳを解釈・判断と呼ぶことにする。このような統計的な問題解決は，統計的な概念（知識や手法）を理解さえすればできるようになるわけではない。例えば，定性的な事柄は定量的に捉え直すことができなければ，データに基づいた問題解決はできない。その一方で，統計的な問題解決の方法だけを理解しても，統計的な概念を理解していなければ，その意味を文脈に応じて解釈することはできない。統計的な概念と統計的な問題解決の方法の双方を一体化し，わからせる必要があると考える。

4 本授業における工夫

(1) 教材の工夫

統計的な概念と統計的な問題解決の方法の双方を一体化し，わからせるために，次のような工夫をする。

①生徒がヒストグラムや代表値の必要性に気づく問題場面にする（例えば，2 つの集団について平均値は近い値になっているが，分布は異なっている等）。
②解決の必要感や社会的な価値があり，何らかの判断をする必要がある問題場面にする。

(2) 学習過程の工夫

本単元の学習前の中学 1 年生が自ら統計的な問題解決を行うことは困難だと考える。だからと言って教師がその方法を説明するのではなく，生徒自身が問題解決においてどのような活動が必要かを見いだしていく方が，統計的な問題解決の方法の習得にと

って有効だと考える。そこで，意図的に不十分な状況を作り，それを振り返らせたり，話し合わせたりして，問題点に気づかせ，修正させるようにする。

5　本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，また，その特徴

本時の授業は，以下の「わかる授業の項目」にあてはまると考えられる。

項目	授業の特徴
「わかる対象の明確化」 概念・原理・法則 思考・判断 表現・処理	ヒストグラムや代表値の意味と必要性を理解し，それらを用いてデータの傾向をとらえることと，統計的な問題解決の方法を一体化してわからせる。
「わかるための工夫」 展開の工夫	意図的に不十分な状況を作り，生徒自らで修正させる。
課題の開発	①生徒がヒストグラムや代表値の必要性に気づく問題場面にする（例えば，2 つの集団について平均値は近い値になっているが，分布は異なっている等）。 ②解決の必要感や社会的な価値があり，何らかの判断をする必要がある問題場面にする。
ICT の活用	度数分布表やヒストグラム等の作成時に，表計算ソフトを活用する。
「わかったことの評価」 評価内容 評価方法	授業時の解決を振り返り，自らの考えを修正し，レポートを作成させる。それをルーブリックを用いて評価する。

6　学習課題設定の意図

次の課題（「東京の夏は暑くなったか？」）を設定した。

> 地球温暖化やヒートアイランド現象が問題視されています。東京の夏は，昔と比べて暑くなっているのでしょうか。

「地球温暖化」に関する知識を持っている生徒は多い。しかし，自分たちの住んでいる地域がどうなのかについて，具体的に検討したことのある生徒は少なく，気温が年々上がっていると思いこんでいる生徒が多いと思われる。環境教育や ESD の観点から，適切な理解が求められる内容である。すなわち，本課題は，生徒にとって身近で，また，社会的価値があり，判断を迫っている問題場面である。

また，月別の平均気温や最高気温といった代表値だけではなく，データの分布を含めて判断する必要性にも気づきやすい題材と考える。

なお，この課題では，「暑くなっている」という定性的な状況を定量的に捉え直すこと，「昔」をいつとするかを決める必要がある。その上で，どのようなデータを用いるかを決め，処理をし，昔と比べて暑くなっているかどうかを判断する。

7　具体的展開

(1) 学習指導案

4（2）に述べた学習過程の工夫に基づき，次のような方針で授業を展開する。

①定式化に関して，「暑くなっている」ことを定量的に捉えていなくても，意図的にそのままにし，解決を進めさせる。

②データの収集に関して，対象とするデータを「昔」と「現在」について1年ずつのみとして，解決を進めさせる。

そして，それを振り返らせたり，話し合わせたりして，「暑くなっている」ことを定量的に捉える必要性や 2 カ年の比較だけで温暖化の傾向を判断することの問題点に気づかせる。そして，定式化やデータの収集をし直して，レポートを作成させる。

展　　開

【１時間目】

学習活動	指導上の留意点
（１）課題の提示	
T:夏のワークキャンプ以降，環境問題について，いろいろと考えてきました。どのような問題がありましたか。 ▪地球温暖化。 ▪リサイクル。クリーンエネルギー。	授業対象の生徒は，環境問題について，入学時から学習をしている。
T:地球温暖化を実感したことはありますか。 ▪ 去年の夏は暑かった。	
T:昔から暑かったのでしょうか。 地球温暖化やヒートアイランド現象が問題視されています。東京の夏は，昔と比べて暑くなっているのでしょうか。 ▪ 家の人が，昔はこんなに暑くなかったと言っていた。 ▪「昔」って，どのくらい前？	
（２）課題の追究	
T:何がわかれば比べられますか。 ▪気温。 ▪その月の平均気温，最高気温，最低気温。	班で話し合わせる。
▪暑さだから，最高気温がいい。 ▪夜の暑さの方が変わってきていると思うので，最低気温がいい。	平均気温，最高気温，最低気温の意味を確認する。
T:君たちの生まれた 1994 年と昨年の 8 月の日ごとの平均気温，最高気温，最低気温を，気象庁の web ページで調べました。 ［データ提示］	生徒の考えを生かしつつ,8 月を比較することにする。

日	1994年	2007年
1	33.9	31.8
2	35.5	32.1
3	39.1	31.9
4	36.6	34.8
5	35.9	33.5
6	33.3	33.0
7	34.6	33.2
8	34.3	33.6
9	34.0	34.0
10	34.2	35.7
11	33.5	36.4
12	33.0	33.6
13	33.4	33.4
14	33.5	34.1
15	34.2	35.7

日	1994年	2007年
16	35.0	37.0
17	34.2	37.5
18	32.9	27.4
19	32.5	32.4
20	30.4	35.9
21	24.9	34.2
22	25.9	37.0
23	29.4	30.0
24	30.9	31.4
25	29.9	32.9
26	31.8	33.6
27	31.9	33.7
28	32.9	32.6
29	32.7	27.6
30	33.0	26.3
31	32.5	28.1

T:どのようにして比べますか。

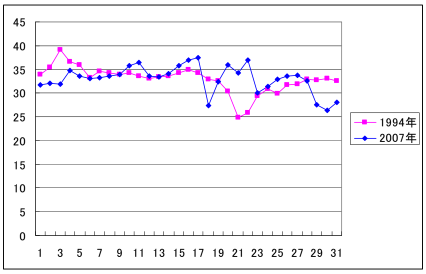
- 1994 年と 2007 年のそれぞれの平均を求めて比べる。
- 1994 年と 2007 年の真夏日や猛暑日の日数で比べる。
- グラフにする。

計画が立てられた生徒から，ノートパソコンを貸し出す。

T:実際に比べてみよう。

- 1994 年の平均は 32.9℃，2007 年の平均は 33.0℃なので，変わっていない。
- 35℃以上が 1994 年は 4 日，2007 年は 7 日なので，2007 年の方が暑い。
- 1994 年の最高は 39.1℃，2007 年の最高は 38.7℃なので，1994 年の方が暑い。
- 折れ線グラフを作り，同じ日付ごとに比べると 1994 年の方が高い日が 14 日，2007 年の方が高い日が 15 日なので 2007 年の方が暑い。

評価 暑さを比べることに関心を持ち，比べ方を考えているか。（関）



- 1994 年の最高と最低の差は 14.2，2007 年は 13.1 なので，2007 年の方が暑い。

T:平均を求めた人が多いようですが，どのようなことがわかりましたか。

- ほとんど変わらない。

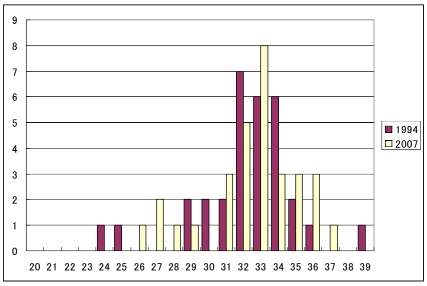
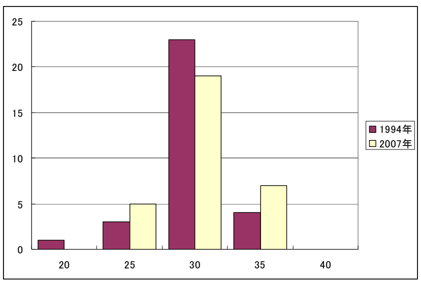
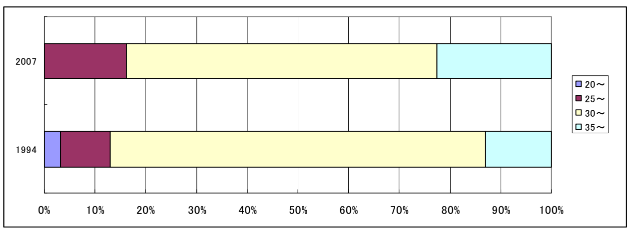
T:平均がほとんど同じということは，この 2 年の暑さは同じですか。

- すごく暑い日があっても，涼しい日もあれば，平均値は高くならない。
- それぞれの年の最高と最低は違うので，同じではない。

評価 平均値だけで判断することの欠点に気づいた

T: 折れ線グラフを作った人もいますが，どのようなことがわかりましたか。 ▪2007 年の方が上がったり下がったりが激しい。 ▪1994 年の方がグラフの縦幅が広い。 ▪1994 年は 33～35℃の間の日が多い。 ▪1994 年の方が高い日が 14 日，2007 年の方が高い日が 15 日あった。 ▪気温の差が，大きい日と小さい日があるので，それも調べた方がいい。 ▪同じ日にち同士を比べているけど，それは意味がないです。 T:いま言っていたような違いをわかりやすくするにはどうしたらいいでしょうか。 ▪25℃以下の日数と 35℃以上の日数を数える。 ▪26℃台，27℃台，・・・の日数を数える。	か。（考） 評価データの分布を意識することができたか。（考）

【２時間目】

学習活動	指導上の留意点
T: 1994 年と 2007 年の違いをわかりやすく説明するにはどうしたらいいでしょうか。 ・　1℃ごとの日数をグラフに表す。  ・　5℃ごとの日数をグラフに表す。  ・　5℃ごとの日数を帯グラフに表す。  	

（度数分布表，ヒストグラムについて学習する） T:東京の夏は暑くなっているか，結論とそう考えたわけを書きましょう。 ・30℃以上の日はほとんど変わっていないので，暑くなっていない。 ・35℃以上の日が増えているから，暑くなっている。など	評価 処理したデータを解釈し，結論を導くことができたか。（考）

【３時間目】

学習活動	指導上の留意点
T:班で，お互いの結論とそう考えたわけを伝え合い，疑問や問題点について話し合いましょう。 ・どうなっていれば暑くなっていると考えるかによって，結論が異なる。	
T:発表してもらいます。 ・30℃以上の日はほとんど変わっていないので，暑くなっていない。 ・35℃以上の日が増えているから，暑くなっている。 T:同じデータを同じように処理したのに，なぜ，結論が異なるのでしょうか。	同じヒストグラムをもとに，異なる結論を出している２人の生徒に発表させる。
・暑い日や暑くなっていることの決め方が違うから。 T:自分の考えてきたことを振り返って，もう一度，東京の夏は昔と比べて暑くなったかを考えてみよう。	評価 自分の解決過程を振り返り，修正できたか。（考）

(2) 実際の授業の流れと生徒の反応

①定式化，データの収集の場面（第１時）

問題を提示し，どのようなデータを用いて比較するかについて考えさせた。そして，生徒の意見を取り上げながら，生徒の生まれた年である 1994 年と 2007 年を比較すること，夏の暑さなので８月の最高気温を用いることを決めた。そして，「94 年の最高気温と 2007 年の最高気温を比べます。本当に暑くなっているのかなぁ・・・大丈夫？」と投げかけた。これに対して，生徒（26 人）は次のように比べ方を考えた。それは，「気温の合計値や月の平均値を比べる」(13 人)，「月の最高気温同士や上位同士を比べる」（8 人)，「折れ線グラフに表して比べる」（7 人）「30℃以上や 35℃以上の日数を比べる」（5 人）などである（(　) 内はのべ人数)。このような比べ方と「暑さ」や「暑くなっている」ことがどのように関係しているかを記述した生徒はいなかった。また，この段階では，昔と現在のそれぞれ１年のみを対象とすることに対する疑問や問題点をあげた生徒はいなかった。

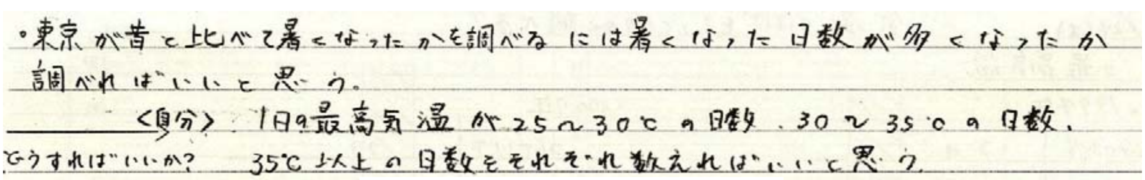

・東京が昔と比べて暑くなったかを調べるには暑くなった日数が多くなったか調べればいいと思う。
<自分> 1日の最高気温が25〜30℃の日数，30〜35℃の日数，
どうすればいいか？ 35℃以上の日数をそれぞれ数えればいいと思う。

図１　生徒Ｍのノートより

②平均値を解釈する場面（第１時）

比較の仕方について個別に考えさせた後，2～4 名に１台ずつパソコンを渡した。日ごとの変化を表す折れ線グラフや棒グラフを作成したグループが多かった。また，ほとんどのグループが平均値（1994 年 32.9℃，2007 年 33.0℃）を求めた。

はじめに，平均値の解釈について学級全体で取り上げた。そのプロトコルは，次の通りである。

T	27	いくつか発表してもらいたいと思います。まずそこ，O さん達の班は何班ですか？
S	40	１班
T	28	はい，１班はどういう考えをしたか。O さん代表して。
S	41	最高気温の合計を見ていて，平均を出した。
T	29	平均を出した。はい。他，平均出したとこいますか？ここもそうか。はい。それで平均は何度だった？
S	42	32.9。
T	30	はい。で？
S	43	それで 2007 年が 33.0。
T	31	33.0。はい。ちょっといい，ここ見て下さい。平均出したところ同じ？大丈夫？これを見るとどうなの，結論は？
S	44	0.1℃しか変わってない。
S	45	あまり変わっていない。
T	32	あまり変わっていない。O さん達はどういう結論ですか。
S	46	2007 年が高い。
T	33	こっちの方が高い。暑くなっている。確かに。これどっちなの？0.1℃だと。
T	34	うん？これ，変わっていないというところと，上がったというところがありますが，結論はどうなる？変わっている，変わっていない？・・・変わっていないということは 94 年と 2007 年同じですか？暑さは同じ？
S	47	大体同じ。
T	35	大体同じ？うんうん，って言ったけど，I さん。
S	48	大体同じだけど，94 年の方が気温の上下動が激しい。
T	36	そういうのって，何でわかったの？
S	49	折れ線グラフ。
T	37	折れ線グラフ。T 君，どうぞ。今，聞いていた？I さん,もう１回言ってくれる。
S	50	1994 年の方が折れ線グラフで見ると気温の上下動は激しい。
T	38	はい。94 年の方が激しい。ちょっと机こっち向けますか，１回？ちょっと机戻してくれる？パソコン落さないように。ちょっとパソコン，タイムな。32.9 と 33.0 出てきて，変わっていないというところと，ちょっと暑くなったというところとあります。同じかな。暑さ同じなのかな？って聞いたら今，I さんが上下動が激しいと，言ってくれました。だからこれは同じだけど，気温の上下は 1994 年の方が激しい。という意見です。それは何を見て言っていたかというと，折れ線グラフだそうです。折れ線グラフ作っていたところ，実は他にもあって，今，H さんのところからファイルをもらってきました。こんな感じですね。（中略）これで見るとどう？　94 年と 2007 年。上下動。
S	51	両方とも上下が激しい。
T	39	両方上下が激しい。ということは２つの年は？
S	52	でも，ピークが遅いから。１番高い時が 2007 年が遅くて，・・・94 年は８月の始めにピークがすぐきているけど，2007 年は真ん中ぐらいにきている。だからちょっとずつ遅れてきている。ピークの数字が。
T	40	ピークの数字が遅れてきている。ということはどうなの？
S	53	分かんない。
T	41	これ見て違いは何にあるんだろうな？違い。これ見て分かる違いは何でしょう？E さんどうぞ。
S	54	黄色（07 年）の方は，ガッタンガッタンしているけど，ピンク（94 年）の方は，こうなっていて，どっちかっていうと緩やか。
T	42	黄色の方はガッタンガッタンしているけど，ピンクの方はこうなっている。だと，気温についてはどういう違いがあるんだろうね。今，比べているのは何だ？

こういうのは。
S 55 気温差。
T 43 気温差。どこを比べている？実はみんな，違いという時，どうグラフを見ていますか？違いはどこ？A さん，どこを見ていますか。
S 56 黄色とピンクの・・・
T 44 うん，黄色とピンクの差を比べているね。こう見ているね，黄色とピンク。これって何よ，例えばこれは？ここここ。いつの差？これは何を意味しているでしょう？こことここの差はどんな意味がある？
S 57 差が大きい。
T 45 うん，何の差が大きい。
S 58 最高気温。
T 46 最高気温の差。うん。それでここは？これは何の最高気温ですか？
S 59 2007 年の８月 24。
T 47 ８月 20 何日かの最高気温ですね。こっちは？
S 60 同じ。
T 48 同じ日の気温ですね。それ比べているんだよね。それってどんな意味があるの？94 年の夏と 2007 年の夏，どっちが暑かったんだろうって言っていたんだよね。８月 22 日はこんなに差がありました。それ意味がある？意味がない？
S 61 逆にないと思う。その日だけだから。その８月 ２０何日かは黄色い方が上だけど，その前の方にはピンクの方が上の日もあるから，その１日だけを比べても，夏が平均的に暑かったとか言えない。
T 49 みんな何かピンクと黄色，折れ線になっているから一生懸命比べていたけど，実はこう見ちゃってなかったかな。同じ日について見ていたんです。それで 94 年と 2007 年と言った時に，94 年の８月３日はこれぐらいで，2007 年の８月３日はこれぐらいだから，あー，暑くなっていた，とは言わないよね。そうすると比べ方，ちょっと違ってこない？どうやって比べたらいいの？　こっちだとあんまり変わらない。でも，確かにこれで見ると違いがありそうだ。見方が違う。もうちょっと考えてみようか。どうやって比べたらいい？

生徒は，平均値がほぼ等しいので，両年の「暑さ」は「あまり変わっていない」「大体同じ」と考えた（S45,S47）。それに対して，「大体同じだけど，94 年の方が気温の上下動が激しい」（S48）という意見が出された。これは折れ線グラフの形状の違いから判断したものである。折れ線グラフで，同じ日付ごとの気温を比較する生徒も見られた。平均値とデータの分布の関係に着目した生徒は少ないと判断し，25℃以下と 35℃以上の日数を比較した生徒に発表させた。そして，○℃～△℃，×℃～□℃，・・・ごとの日数を比較するという考えを引き出した。（以上，第１時）

第２時には，それを度数分布表に整理し，その特徴をわかりやすく示す方法を考えさせた上で，ヒストグラムについて学習した。

③解決を振り返る場面

第３時には，コンピュータを利用して，階級幅を変えたヒストグラムを作成した（図2)。そして，階級の幅や階級の最初の値を変えながら，2007 年の 8 月は 1994 年の 8 月と比べて暑かったかについて考えさせ，その結論と理由を記述させた。その特徴は，漠然とした，あいまいな理由で判断した生徒が 11 人いたことである。例えば，次のようなものである。

・ 「平均的には，2007 年の方が高くみえるから。」（暑い・5)
・ 「全体的に見て，2007 年の方が暑い。」（暑い・2)

（(　) 内は，判断した結果と判断の際に用いたヒストグラムの階級幅）

この 11 人のうちの 10 人が「暑くなっている」という結論である。これには，「温暖化が進んでいる」という既知の情報が影響したと考えられる。

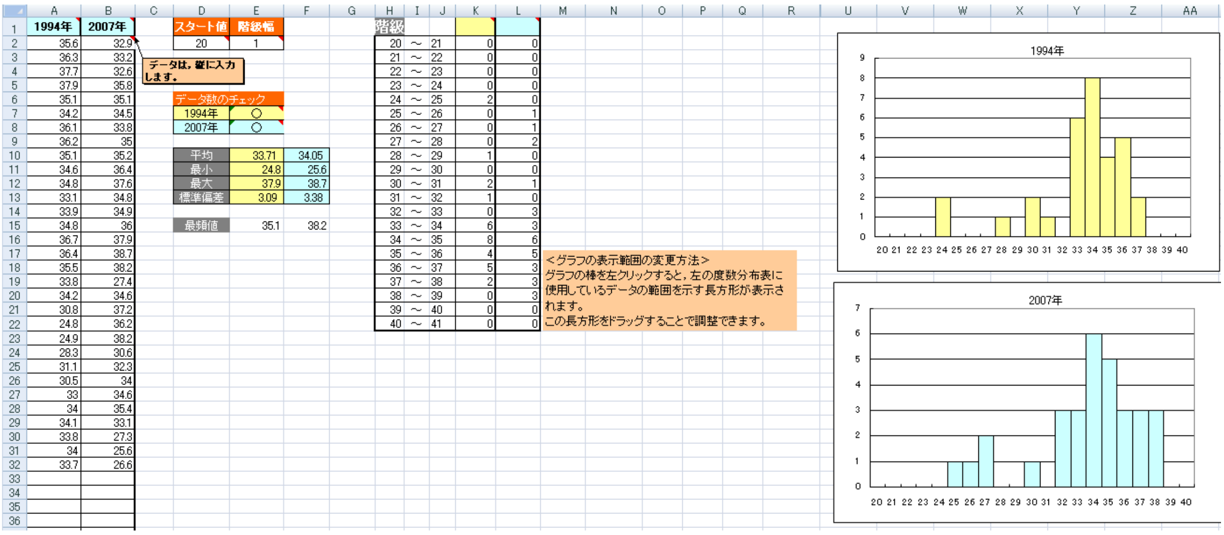


図２　授業で使用したスプレッドシート

結論とその理由を記述できた時点で，席が近い生徒同士で，お互いの結論を比較し，話し合うよう投げかけた。ヒストグラムの解釈（特にヒストグラムの階級幅による違い）やそれに基づく結論について議論になることを期待したが，実現しなかった。これは，階級幅の異なるヒストグラムをもとにしていた場合，互いの結論とその根拠を比較しにくかったためと考える。

次に，階級幅が１のヒストグラム（図３）をプロジェクターで提示し，「30℃以上の日数は同じだから変わらない」(生徒A)，「35℃以上の日数が増えているから暑くなっている」(生徒B)という２人に発表させた。その場面のプロトコルは以下の通りである。

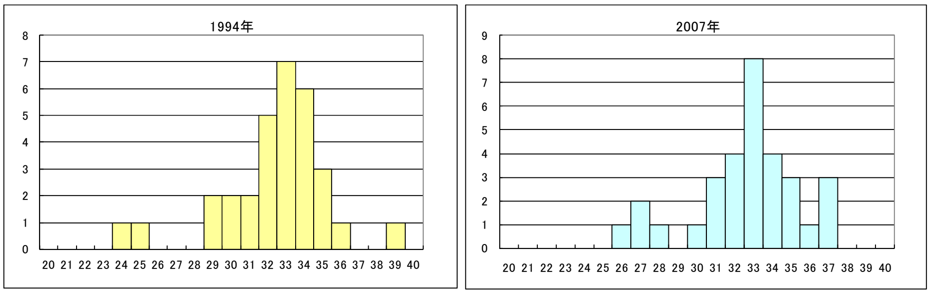


図３　階級幅１のヒストグラム

S	15	この辺（25℃以下）は少し違うんだけど，30℃以上の日数は同じで，だいたい同じ形だから変わらない，94年と2007年では。
T	14	はい。30℃以上の日数は同じだから変わらないという結論だね。Bは？
S	16	ちがう。
T	15	うん，じゃ，みんなに説明して。
S	17	35℃以上の日数が増えているから･･･この辺なんですけど･･･暑くなっていると思いました。
T	16	同じヒストグラムを見ているのに，どうして結論がちがうの？
S	18	見ているところが違うから。
T	17	なんで見ているところが違うの？
S	19	なんでって・・・
S	20	そっちはAさんで，こっちはBさんだから。
T	18	うーん。そうなんだけど，・・・じゃあ，みんなはどう見るの？
S	21	Bさん
T	19	なんで？
S	22	35℃以上の日が多い方が暑いから。
T	20	Aさんはどう思う？

S 23　30℃以上でも暑いと思ったので，・・・
T 21　30℃はどうなの？　暑い？
S 24　暑い，暑い。
T 22　なるほど。そういう説明があればどう？・・・自分のはどう？みんなの？どうしたらいいのかな？

T22 では，暑くなっているかどうかを「暑さ」の決め方に基づいて判断すること，その決め方によって結論が異なり得ること，その決め方は他者が納得できるようなものである必要があることなどに気づかせることを意図している。ただし，このことに関するまとめはしなかった。(以上，第 3 時)

第 4 時には，「もう一度，東京の夏は昔と比べて暑くなったかを考えてみよう。もう一度ね，自分の考えてきたことを振り返って，・・・どうやって考えていったほうがよかったかとかをね・・・で，それをかいてください。」と投げかけ，自分の考えてきた過程を振り返らせ，ノートに記述させた。さらに，机間指導で，「暑くなっていない」「暑くなったとは言いきれない」と記述していた生徒に，「(ヒストグラムの) このあたりは暑くなっているということではなかったのかな。」と投げかけた。

表 2　　生徒の結論の変化

		はじめ			計
		暑い	不変	涼しい	
振り返り	暑い	6(2)	2(1)	0	8(3)
	不変	10(2)	5(1)	1	16(3)
	涼しい	0	0	1	1(1)
計		16	7	2	25

(人)

※ (　) 内は，振り返り後の記述に「基準」が書かれていない生徒の数

生徒の結論の変化をまとめると，表 2 の通りで，ノートの記述には次のような特徴が見られた。それは，第一におよそ 7 割の生徒が，自分なりの基準を設けて判断したことである。第二に，その結果，「不変」(「暑くなっていない」「変わらない」「どちらとも言えない」等) の生徒が増えたことである。その中には，「もっとたくさんの年を調べないとだめ」「94 年も既に上がっていた可能性があるから，もっと前から調べないとだめ」「暑い日が何度続いたかも調べる必要がある」と考えた生徒もいた。このような考えには，「暑くなっているはずだ」という思いが関係していると考える。

東京の夏は昔と比べて暑くなったかを考えることをレポート課題にすることを告げた (提出までおよそ 3 週間，その間に代表値，箱ひげ図，移動平均について学習した)。

8　わかっていることをどのように把握したか

授業により，目標とした，ヒストグラムや代表値の意味と必要性を理解し，それを用いてデータの傾向を捉えることや，統計的な問題解決の方法の習得の状況がどのようになったかについて，授業後に提出されたレポートで評価した。その評価は，表 3 のルーブリックを用いて，統計的な問題解決の方法の「定式化」「データの収集」「データの処理」「解釈・判断」の相ごとに行った。(　) 内の値は，レポート提出者 25 人中の該当人数である。また，各評価を総合した個人の様相は，表 4 の通りである。

表３　レポートの評価に用いたルーブリック

	A	B	C
ⅰ. 定式化	「暑い」「暑くなっている」ことに関する定量的な基準を設けて仮説を立てる。(15)	「暑い」「暑くなっている」ことに関する定量的な基準を設けずに仮説を立てる。(8)	「暑い」「暑くなっている」ことに関する仮説を立てていない。(2)
ⅱ. データの収集	仮説に基づいて，ある年だけ暑いことがあることなどをふまえデータを収集することができている。(8)	仮説に基づいて，データを収集しているが，ある年だけ暑いことがあることなどをふまえていない。(9)	ある２カ年のデータしか収集していない。(8)
ⅲ. データの処理	データ処理の方法の選択及びその実行結果がともに適切である。(14)	データ処理の方法の選択，その実行結果のどちらかが，不適切である。(10)	データ処理の方法の選択及びその実行結果がともに不適切である。(1)
ⅳ. 解釈・判断	自らの定式化に基づいた適切な解釈及び判断をし，その根拠を適切に示している。(5)	自らの定式化に基づいた解釈ができているが，判断に飛躍があったり，根拠の伝え方が不十分だったりする。(12)	自らの定式化に基づいた解釈や判断ができていない。(8)

９　本授業がわかる授業であったか

８に挙げたレポートの評価で，すべての相の評価が B 以上だった生徒は，この授業がわかったと考える。その人数は授業対象の半数に当たる 13 名である。他方で，残りの半数の生徒の内，C が２つ以上あったのは５名であり，部分的にはわかったと考える。以下では，統計的な問題解決の方法の「定式化」「データの収集」「データの処理」「解釈・判断」の相ごとに考察する。

①定式化について

レポートでは，生徒は「暑くなっている」ことを次のように捉えていた。

評価 A：ある基準に該当する日数とする（15 人）

A1)35℃以上，真夏日，猛暑日，熱帯夜，30℃以上が連続した日数，35℃以上の日が３日以上続いた回数

A2) 32℃以上, 32℃以上と 22℃以下, 33℃以上と 28℃以下など

評価 B：定量的な基準がない（8 人）

例）月平均や年平均が上昇したとき，気温差が大きいとき，暑い日が多いとき，暑さが長く続いているとき，湿度が高いときなど

評価 C：定式化に関する記述がない（2 人）

評価 A1 の 11 人は,「暑い」「暑くなっている」という定性的な状況に照らして，その定量的な基準を設けている。これらの生徒は，定量的な基準を設ける必要性がわかったと考える。

一方，A2 の 4 人は，32℃や 28℃，22℃などの定量的な基準を設けているが,「暑くなっている」という定性的な状況に照らしたものではないと考えられる。なぜならば, 例えば, 次のように，データを処理した後で,「暑くなっている」という傾向が示せるような基準を設けたものだからである。

「僕は自分で 33.0℃以上が暑い日と設定しておきました。ヒストグラムを見て 33.0℃以上がたくさんある→暑い日が続いた→その年の夏は暑かったということになるので。」(T.T)

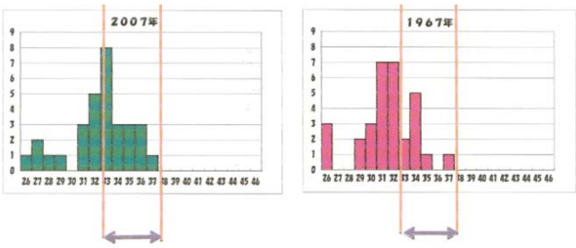


表４　個人の様相

i	ii	iii	iv	人
A	A	A	A	2
			B	2
		B	B	2
	B	A	A	1
			B	3
		B	B	1
			C	1
	C	A	A	1
			B	1
		B	B	1
B	A	A	B	1
		B	C	1
	B	A	B	1
		B	C	2
	C	A	C	1
		B	C	2
C	C	A	C	1
		C	C	1

また, 評価 B の生徒は,「暑さ」を捉え直しているが, 定量的な基準は設けていない。定量的な基準を設ける必要性がわかっていないと考える。

②データの収集について

レポートでは，生徒は次のようなデータを用いた。

評価 A：61 年～07 年などの連続する期間（6 人）

61～66 年，81～86 年，02～07 年のように複数の年を 1 つの集団として扱った（2 人）

評価 B：5 年間隔や 10 年間隔でデータを収集した（9 人）

評価 C：特定の 1 年ずつ（8 人）

評価 B の生徒は，1 年ずつを対象とすることを修正したが,「1994 年以前も調べる」あるいは「他の年も調べる」という範囲内で終わっている。すなわち，1 年ずつの抽出で代表させることのリスクにまでは至っていないと考えられる。評価 C の特定の 1 年ずつとした生徒は，1994 年と 2007 年の変更にとどまり，1 年ずつを対象とすることの

修正には至っていない。これらは，気温のばらつきの意識化が十分でないことに原因があると考えられる。

また，日別の平均気温，最低気温，最高気温の相互関係（ほぼ同様の傾向であること）を意識せずに用いたり，用いた方がよかったと考えたりした生徒が多かった。データ間の関係に関する解釈が十分にはできていないと考えられる。

③データの処理について

レポートでは，自分の定式化に応じた，表現の方法を選択することができた生徒が多かった（Aの 14 人とBの生徒の内の 6 人)。例えば，振り返りで，ヒストグラムを用いた生徒が次のように記述していた。

「ヒストグラムは僕が知りたいことに合っていたと思います。なぜかというと，最高気温と最低気温の変化をとらえるためには，全体を知る必要があったので，全体の形や数の分かるヒストグラムを選んだのは適切であったと思います。」

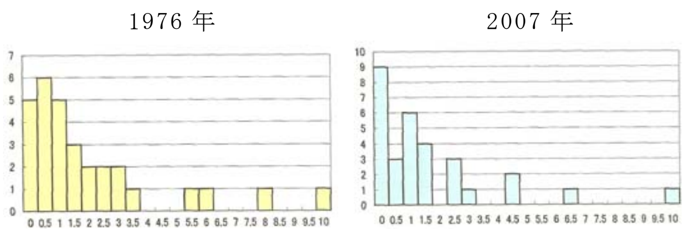
「ヒストグラムは全体の温度の割合が見比べやすくてとてもよかった。また，折れ線グラフの気温の変化が見比べやすい利点をいかすこともできた。」

ヒストグラムの意味と必要性がわかったと考える。

④解釈・判断について

数学的表現の読み取りや解釈に飛躍などがあった生徒がいた（解釈・判断の評価が B の 12 人)。例えば，次の例が特徴的である。

例 1)［生徒 K.F］暑さを 1 日ずつの気温差が激しいときと定式化した。そして，1975～77 年，2005～07 年の 8 月の前日との気温差（の絶対値）を求め，それぞれをヒストグラムに表した。



「ヒストグラムでみてみると，2007 年などはばらばらになっていることから何日も続けて暑かったりはせず，温度の上昇，下降が目立つ結果となった。ということは,気温の上下がはげしく,それらはそれぞれ温度差があったということで,暑くなっていると考える。」

定式化に基づいて解釈することはできている。しかし，3℃以上の差があったのは 5 日しかなく，「何日も続けて暑かったりはせず」や「温度の上昇，下降が目立つ結果」というよみや，2007 年が他の年と比べて差があったと考えることには飛躍がある。

例 2)［生徒 A.T］1961，71，81，91，2001，07 年の 7 月の日別最高気温をヒストグラムに表し，それらを並べて比較した。

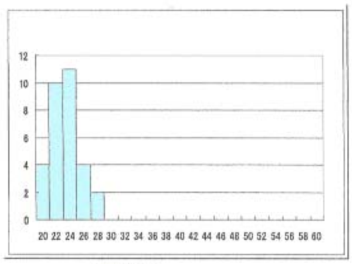
「このヒストグラムを見ても年々少しずつ上がっているので暑くなっていると言えると思います。」

ヒストグラム全体の変化の様子を見て比較したことは評価できるが，「年々少しずつ上がっている」という解釈には飛躍がある。

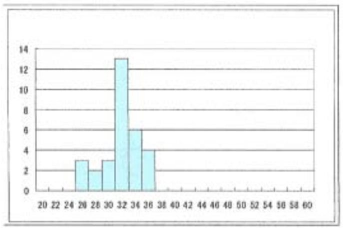
これらの例では，授業時と同様に，地球温暖化等の影響で暑くなっているはずだ，という考えが影響している可能性がある。

また，平均値を分布と関連付けて解釈できていなかった生徒もいた。例えば，次のようなものである。

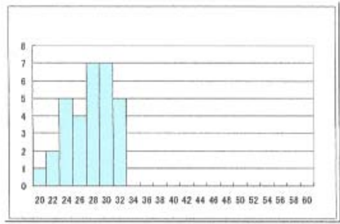
1971 年



1991 年



2007 年



例 3）［生徒 A.K］現在，10 年前，20 年前，30 年前の 8 月の日別最高気温の月平均を求め，ヒストグラムと折れ線グラフを作成した。そして，それをもとに，次のように結論づけている。

「平均は，現在 29℃，10 年前 27℃，20 年前 27℃，30 年前 25℃。現在と 30 年前では 4℃もちがう。ヒストグラムや折れ線グラフからの結果をみると現在は 30℃に近いものがものすごく多いが，30 年前のものは 23℃がものすごく多く，まったく正反対になった。自分でたてた予想よりもはるかに暑くなっていた。」

これらの生徒は，ヒストグラムや代表値を用いてデータの傾向を捉えることがわかっていないと考える。

１０　わかっていないと見なされる例

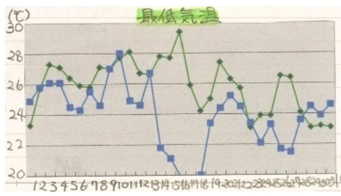
上述の 9 の中でも統計的な問題解決の方法について十分わかっていないと見なされる例については示した。ここでは，個人の様相に焦点を当て，わかっていない生徒のレポート（BCBC）とわかった生徒のレポート（ABAB，ⅰ～ⅳの順）の概要を対比する。

例 4）［生徒 H.I］BCBC のレポートの概要

定式化：暑さが長く続いているとき，湿度が高いときと定式化した。

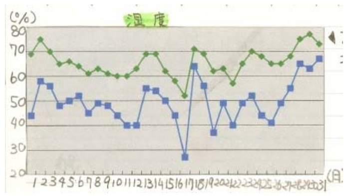
データの収集：1997 年と 2007 年の 8 月の日別の最高気温，最低気温，平均気温，湿度

解釈・評価：それぞれを折れ線グラフに表した。



「最高気温のグラフと同じように，12 日～17 日にかけて大きな差があります。でも全体的に見るとやはり 2007 年の方が高いようです。」

「このグラフはじめじめしている度合いを表したものなのですが，グラフを見るとはっきり 2007 年の方がじめじめと暑いことがわかります。」



自らの定式化である「暑さが長く続いている」という観点で解釈していない。また，「じめじめと暑い」というには，気温と湿度のグラフを関連付けて見る必要があるが，そのようなことはしていない。

結論：次のように結論づけている。

「2007 年の方が湿度が高く，気温も高いことがわかりました。よって，東京の夏は暑くなったのだと思います。」

振り返り：次のように述べている。

「今回はすべてのグラフを折れ線グラフで作りました。ヒストグラムも使おうと思ったのですが，少し説得するのが難しいのでやめました。これからは，この暑さの影響で売れるようになった物と売れなくなった物などにつても調べてみたいです。」

例 5) ［生徒 M.M］ABAB のレポートの概要

定式化：次の 3 つの観点で定式化した。

1)暑い日が多いとき　・・・モード

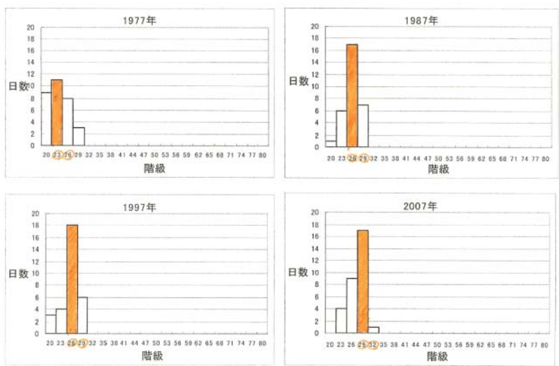
2)最高気温が高いとき　・・・8 月の中でもっとも高かった温度

3)気温が高くて一定のとき　・・・22℃～32℃

データの収集：1977，1987，1997，2007 年の 8 月の日別の最高気温や平均気温のデータ

データの処理：

1)については，右図のように，ヒストグラムを作成し，モードを比較している。

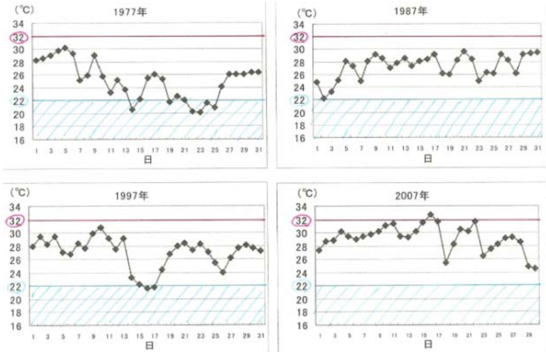


「はじめは，23～26℃が多かったが，26～29℃の方が多くなり，今では 29～32℃がもっとも多くなっている。ということは，10 年経つ毎に高い気温の階級の方が，日数が多くなっている。→気温が上がっている。」

2)については，それぞれの年の 8 月の最高気温を調べ，右のように，折れ線グラフに表し，その変化に着目している。

「1997 年と 1987 年は 1997 年の方が気温が高いが，1997 年と 2007 年の差が激しく，2007 年の方が 1997 年の約 2 倍くらい高い。ということは，1997 年～2007 年の間にもっとも温暖化がすすんでしまったということになる。」

3)については，日別の平均気温の折れ線グラフを作成し，22℃～32℃の間に着目している。



「1977年，87年，97年のときは，最高気温が 32℃までいっていないけれど，2007年は 32℃をこしている。逆に，1977 年，87年，97年は 22℃以下があるが，2007年のもっとも低い気温は 24℃くらい。全体的に,昔と比べると 2007年の折れ線が上の方に移動している。」

解釈・判断：これらをもとに，次のように結論づけている。

「気温が高い日の日数がだんだん増えている。年の最高気温が2007年が最も高い。気温の範囲が高くなっている。このことから，今と昔を比べると東京は気温が高くなっていると考えられる。」

振り返り：次のように述べている。

「・今回は 1977 年から 10 年ごとの最高気温と平均気温を使いました。自分ではちゃんと説明できていると思いますが，自分の結論を確実にするために最低気温の方も上がっていないか確かめておけばよかったと思いました。
・なぜそのグラフを使うのかなどを説明しながらできたと思います。しかし，年の最高気温を比べるところで折れ線グラフを使えばいいか不安でした。
・グラフなどデータを利用しながら，工夫して理由を考えることができたと思います。その理由をもとに結論を出すことができたと思います。」

例 4)では，「定式化」において，「暑さ」を捉え直しているものの，温度，日数や湿度の定量的な基準を設けていない。「データの収集」においては，取り出した変量に対する解釈が十分にはできていないことが推測される。1 年ずつの 8 月の，相互に関連が強い日別の最高気温，最低気温，平均気温を利用しているからである。また，「解釈・評価」は，自らの定式化に基づいていない。

それに対し，例 5)では，「定式化」では，昔と現在でそれぞれ 1 年ずつのデータを対象とすることは修正し，また定量的な基準も設けている。ただし，「データ収集」においては，10 年前，20 年前，・・・を 1 年ずつの抽出で代表させており，選んだ年だけが特別に暑かったり涼しかったりすることのリスクは考えていないと推測される。また，「解釈・判断」では，自らの定式化に基づいて結論を述べている。ただし，グラフのよみが不適切なところがある。例えば，折れ線グラフの「1997 年と 2007 年の差が激しく，2007 年の方が 1997 年の約 2 倍高い」というよみは，縦軸が 32℃から始まっていることを見落としている。また，1）の分析では最高気温のモードについて述べているが，そのことから「気温が高い日の日数がだんだん増えている」ことは言えない。

１１　わからない生徒への対応

９，１０に述べた授業後に作成したレポートでの生徒の様相から，わからない生徒に対しては，次のような対応が必要だと考える。

①「暑さ」や「暑くなっている」ことに関する定量的な基準を設けることの必要性に関して，より明示的に検討する機会を設ける。

②昔と現在で 1 年ずつを対象とすることに関して，それぞれについて複数年を選択した生徒のレポートを取り上げ，それを比較検討させる。

③日別の平均気温，最低気温，最高気温の相互関係（３者はほぼ同様の傾向であること）を意識せず，根拠の数を増やせたと考えていることに関して，生徒のレポートを取り上げ，それについて，学級全体で話し合わせる。

④平均値を分布と関連付けて解釈することに関して，平均値が等しく分布が異なる顕著な例を解釈させたり，代表値から分布の形を推測したりする活動をおこなう。

引用・参考文献

文部科学省（2008)「中学校学習指導要領解説　数学編」，教育出版

西村圭一（2008)「「資料の活用」の学習指導に関する研究」，第 90 回日本数学教育学会全国研究大会，日本数学教育学会誌第 84 巻臨時増刊，p.265

西村圭一（2008)「数学的リテラシーの育成をめざす学習指導－数学的モデル化過程を視点に－」，日本科学教育学会第 32 回研究発表大会，pp.133-136

Qualifications and Curriculum Authority（1999), “National Curriculum Mathematics”

渡辺美智子（2007a)「統計教育の新しい枠組み」，数学教育学会『数学教育学会誌』48，pp.39-51

渡辺美智子（2007b)「知識創造社会を支える統計的思考力の育成－アクションに繋がる統計教育への転換－」日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻第 7 号，pp.29-38

生徒が探究していく授業の実践

ー統計グラフを用いた課題解決型学習「統計資料の収集と探究」についてー

西仲　則博
奈良教育大学附属中学校

１　校種・領域など

・領域　　資料の活用
・校種　　独立行政法人大学附属中学校
・学年　　中学２年
・単元　　統計

２　小中高校種間の接続及び校種内の接続　学びの系統

新学習指導要領から，小学校では「数量関係」の中で，「資料の整理と読み」の内容が充実した。中学校では「資料の活用」が高等学校では「データの分析」という統計関連（確率を含む）の新領域が設けられた。これは，実社会や実生活における統計活用が重要視されてきたことを受けての措置である。そして，これらの統計領域に共通する目的は，生徒が目的に応じて資料を集めて分類整理したり，それを表やグラフなどを用いてわかりやすく表現したり，特徴を調べたり，読み取ったりし，それを表現することにある。これは，単に表やグラフの作成のスキルや基本的な用語や基本的な概念の理解，統計の手法を学ぶだけの授業ではなく，実際に生徒がデータを収集することからはじめ，解析し，判断をするまでの一連の課題解決過程を踏みながら，統計の学習を深めていくことが求められている。そこで，本取り組みでは，この一連の課題解決過程を踏みながら，環境問題についての資料を生徒自らが探しだし，それを整理し，統計グラフにまとめ，そこからの知見をまとめ，それを発表するという一連のプロジェクト型の授業を行った。このような学習過程を踏むことで，資料の整理にとどまらず，資料を活用することを身につけるとともに，数学の意義や数学の必要性などを実感する機会を設けることができる。また，レポートにまとめ発表することなどを通して，学級や学年全体でその成果を共有する機会を設けることにより，学習の質が向上するとともに，学習意欲を高めることもできると考えた。この取り組みでは，生徒の数学的活動への取り組みを促し思考力，判断力，表現力等の育成を図ることができると考えた。

３　本時の授業でわかってほしいこと

前回の学習指導要領時の統計は，教科書にある簡単にモデル化されたデータをもとに，度数分布表からヒストグラムの作成や平均の求め方や相関図の作成などを行うに

留まり，数学の授業の中で，実際のデータを用いて，学習したことを活用していくところまでは，充分に行われていなかった。活用よりも内容の理解に重きが置かれていた。しかし，統計資料は，独立して存在するものではなく，様々な文脈の中で存在する。渡辺（2007）は，諸種文脈（コンテクスト）の中で実践的に応用し，新しい知識を創出するアクションに繋げることの重要性を指摘している。今回は，生徒が関心を持っている環境問題という大きな文脈のもと，下記のような大きな目標を立て，実践を行った。

・統計資料の収集，データ処理，グラフ化やその分析する方法を学び，グループ学習を通して，それらを活用しようとする 態度を育てる。
・統計資料やグラフなどからその事象の傾向や特徴を読み取り，それを的確に表現する能力を育てる。
統計資料の信頼性や事象の特徴や傾向について推論する過程の論理の一貫性などを評価する事を通して，資料を正しく判断する能力を育てる。（批判的な思考を育てる）

4　指導上の工夫

（１）　前半，後半の２つの取り組みがあるプロジェクト型学習。

今回は，前半，後半の 2 つの取り組みを行い，前半の取り組みでは，主に統計の学習にあてた。統計資料の収集方法と統計グラフの作成とその解釈，課題解決プロセスの解説にあてた。後半では，課題解決プロセスを意識したグループ活動を通して，これからのライフスタイルのありようについて，より議論を深めることができると考えた取り組みを行った。

前半の授業形式は一斉授業で行った。統計的リテラシーの指導を行ったことになる。そして，夏休みの課題，統計グラフの作成では，生徒個人々が課題解決プロセスを行うことをねらった。

ここで，課題解決プロセスとは，下記のように統計を使って課題を解決するためのプロセスであり，テーマを決めて，それに合う資料を収集し，それを整理，適切なグラフで表すことにより，資料の特徴や傾向を読み取り，解釈から結論を導き，それを的確に表現する。他者と検討して，追加や訂正があれば資料の追加収集が行われるプロセスである。

課題解決プロセス

①　テーマ設定
②　統計資料の収集活動　統計資料の信頼性と検証可能性
③　統計資料の整理　　適切なカテゴライズ
④　グラフ化　　　　　適切なグラフの選択、
⑤　グラフからの解釈　　資料の特徴や傾向の読み取り
⑥　解釈から結論を導く
⑦　結論を的確に表現する
⑧　表現したことについて他者と検討する
⑨　⑧を基に改良のために②にもどる

このような課題プロセスを生徒に示すことは，生徒が「何をすべきか」,「どうすればよいか」と迷うことなく課題に

取り組めるところにある。それは，生徒の主体的に取り組みや継続的な学びのプロセスとなっていくことが期待される。

後半では，小グループでの活動を取り入れた。環境問題の課題は，一人ひとりが，互いに協力し合いながら，力を合わせて取り組んでいくことが必要である。また，グループ活動を通して，多面的なものの見方やコミュニケーション能力，問題解決力，合意形成の仕方などを身につける必要があると考えた。グループ活動を通して，これからのライフスタイルのありようについて，より議論を深めることができると考えた。

（２）課題解決の共有化

グループ活動の成果を発表会で発表しあった。発表を通して，お互いの学びの中で得た統計の有用性や環境問題に関する学習の成果を共有化することにした。

（３）仮説ー検証型の取り組み

生徒が，資料を集めるときには，まず，仮説を立て，それを検証できような資料を集めるように指導した。闇雲に資料を探すのではなく，仮説を考えることで，課題を明確にし，課題意識を高めた上で，その仮説を検証するためには，どのような資料を収集すべきかを考えさせてから，資料の収集を行った。ただ，何も手がかりのないところから，仮説を立てることが難しい場合がある。そこで，興味があることについて，データを集め，それを整理する中で，「こうではないかな？」という仮説をたてさせ，グラフ化して，検証することを行うデータ探索的なアプローチをとった。

（４）ICTの利用

今回の改訂では，コンピュータを積極的に利用することが強調されている。ICT の利用により，

- 生徒にとって現実性，必要性のある大量のデータを扱うことができる
- インターネットを使って１次データソースにあたることができる
- 表やグラフを容易にできる。
- 統計量を瞬時に計算できる。
- 発展的な内容を容易に表現できる 。（例えばグラフ表示後，移動平均や近似直線としての回帰直線など）

等の利点が挙げられる。１次ソースの大量のデータを処理することは，要約されているデータではわからない「散らばり」などについても考えることができる。ただ，表計算ソフトのグラフを無批判に受けることには注意が必要である。目盛りの初期値の違いにより，形が大きく変わるからである。ここで，①の学習と１年生の夏休みの課題が役に立つ。正しい方法でグラフを描くことを知っていることで，グラフが正確に表示されているかを注意することができると考えた。発表を行うために，それぞれの

考察を Power Point にまとめるためにも使用している。模造紙などにまとめるよりも，時間的な節約になると考え，生徒に利用を促した。

５　本時の授業がわかる授業の項目のどれになるか，またその特徴

本時の授業は，以下の「わかる授業の項目」にあてはまると考えられる。

項目	授業の特徴
「わかる対象の明確化」 ・ 関心・意欲・態度または価値観 ① 面白さ・楽しさ ② 有用性（活用・利用） ③ 意味と必要性，意義	生徒自ら社会の中の問題としての環境問題を取り上げ，統計資料に対して適切な統計的方法を選択することができる。
・ 思考・判断 ① 数学的な見方や考え方	調べた統計資料から，グラフを作成し，その結果からどのような解釈を行うのか，また，そのグラフから，仮説に対してどのようか事が判断すればよいかを考える。
「わかるための工夫」 ・数学的活動の充実 ・子どもの学習活動の工夫 観察・操作・実験の実施	統計資料やグラフなどからその事象の傾向や特徴を読み取り，それを的確に表現することができる。
・教具の活用 ＩＣＴの活用	インターネットから，一次データの収集，表計算ソフトを用いてのデータの加工，グラフの作成，Power　Point を用いてのプレゼンテーション資料の作成などを行い，発表会ではプロジェクターを用いて，PowerPoint での発表を行ったグループがあった。
・授業形態の工夫 ① 一斉授業　② グループ活動	一斉授業の成果を夏休みの課題とし，生徒個々の活動を保証した。また，グループ活動を行うことで，お互いが分担しながら，課題に取り組むことができた。

６　学習課題設定の意図

今回の授業では，次の課題を設定した。

課題 ・テーマは環境問題等に関するもの。 ・統計資料からグラフを複数作る。 ・グラフから傾向や特徴を読み取り，予測，それを的確に表現し，発表する

グループの活動を通して，環境問題に関する興味や関心のあるテーマを設定し，仮説を立て，その検証のために，資料を収集し，整理する方法を吟味したり，グラフ化を通して資料の特徴や傾向を整理し，今後の予測や，自分たちのこれからのライフスタイルのありようについて，より議論を深めることができると考えた。また，それらをまとめることで，統計的な知識の有用性を理解し，統計の力を深めたり，広げたりすることができると考える。さらに，それらの成果を学級での発表という形で共有化していくことで，学を深めることができる。そして，このような活動を通して，事象を数理的に捉え，統計的に処理し，それを基に判断，表現できる生徒の態度や能力を育てたいと考えた。

７　具体的展開

（１）　学習指導計画　　　　　　　　　　　　授業形態

前半の取り組み

第１次	ガイダンス	（一斉授業）	１時間
第２次	統計グラフの作り方	（一斉授業）	２時間
第３次	資料の整理と分布の傾向	（一斉授業）	１時間

後半の取り組み

第４次	小グループでテーマを設定し取り組む	（ｸﾞﾙｰﾌﾟ学習）	３時間
第５次	発表会	（一斉授業）	２時間

（２）　単元の評価規準

観点	評価規準
数学への関心・意欲・態度	・統計資料を収集，データ処理，グラフ化やその分析する方法を自ら活用しようとする。
数学的な見方・考え方	・統計資料に対して適切な統計的方法を選択することができる。
数学的な表現・処理	・統計資料やグラフなどからその事象の傾向や特徴を読み取り，それを的確に表現することができる。

数量，図形などについての知識・理解	・統計資料を収集，データ処理，グラフ化やその分析する方法を理解している。

（３）　前半の取り組み

①　指導の流れ

第１次においては，これから学習する統計についてのガイダンスを行った。「日本の統計から」ということで，総務省統計局からいくつかのグラフを示し，解説をした。次に，統計資料の収集について述べた。収集先として，生活の中で，普段は見逃しているようなことでも自ら記録していくと，立派な統計資料になることや，書籍（地図帳・資料集，新聞・雑誌，国勢図会，理科年表等），インターネットでの統計資料をあげた。統計資料を収集した後，データ処理を行い，グラフ化し，そこから事象の傾向や特徴を読み取り，表現できるように，統計の学習を行っていくことを説明した。その後，夏休みの課題として統計グラフの作成があり，その作品を統計グラフコンクールに出展することを伝えた。

第２次においては，統計グラフの作成についての授業を行った。学習では，資料２，３の学習プリントを作成して，Power　Point を用いた授業を行った。

１時限では，まず，グラフは，説明したいことを，視覚的に一瞬で訴えることのできる表現方法であると伝えた。しかし，表現方法を誤ると伝えたいことが伝わらないだけでなく，伝えたいことと反対のことを伝えることになることを気付かせた。その上で，グラフ作成の目的と注意点について説明した。ここで，グラフ作成の目的とは，大まかに言って次の５つの捉え方を表現することであると説明した。（下記表参照　山本（2006））

グラフ作成の捉え方

比較・・・いくつかの項目の大小を比べたり，何倍かを捉える

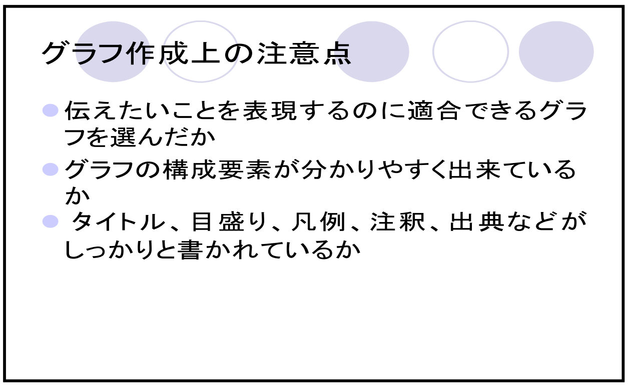
内訳・・・全体の中で特定の項目の占める割合を捉える

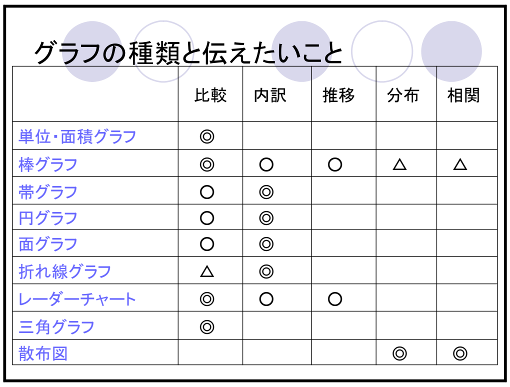
推移・・・時間の変化に対して値がどのように変化しているかを捉える

分布・・・データがどのように散らばっているかを捉える

相関・・・２つ以上のデータの関係を捉える

また，作成上の注意点として次のようにまとめ，「グラフの種類と伝えたいこと」




グラフの種類と伝えたいこと

	比較	内訳	推移	分布	相関
単位・面積グラフ	◎				
棒グラフ	◎	○	○	△	△
帯グラフ	○	◎			
円グラフ	○	◎			
面グラフ	○	◎			
折れ線グラフ	△	◎			
レーダーチャート	◎	○	○		
三角グラフ	◎				
散布図				◎	◎

のようにまとめた。

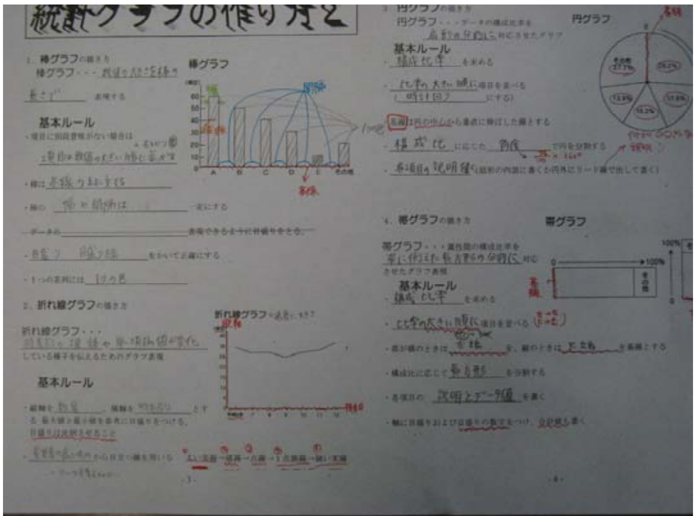
また，タイトル，目盛り，凡例，注釈，出典などがしっかりと書かれているかについても，注意を払うように述べた。

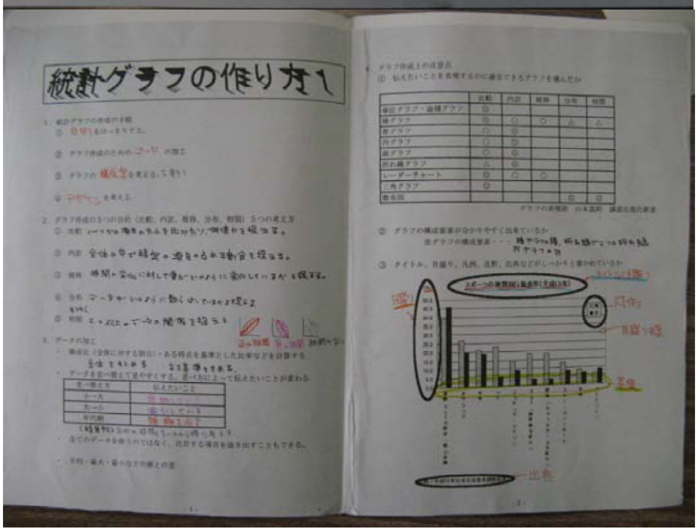
２時限では，グラフの種類を棒グラフ，折れ線グラフ，円グラフ，帯グラフの４つに絞り，それぞれの描き方と表現上の留意点についてまとめた。下の表は，それらをまとめたものである。

表　グラフの描き方

グラフ種類	グラフ	グラフの描き方
棒グラフ	数値の大きさを棒の長さで表現する	・項目は数値の大きい順に並べる ・棒は基線の上に立てる ・棒の幅や間隔は一定にする ・目盛りや目盛り線をかいて正確にする ・１つの系列には一つの色
折れ線グラフ	時系列の推移や単一項目の値が変化している様子を伝えるためのグラフ表現	・縦軸を数量，横軸を時系列とする ・最大値と最小値を参考に目盛りをつける。目盛りは比例させる ・重要度の高いものから目立つ線を用いる ・太い実線→破線→点線→１点鎖線→細い実線
円グラフ	データの構成比率を扇形の分割に対応させたグラフ	・構成比率を求める ・比率の大きい順に項目を並べる（時計回りにする） ・基線は円の中心から垂直に延ばした線とする ・構成比に応じた角度で円を分割する ・各項目の説明を書く（扇形の内部に書くか円外にリード線で出して書く）
帯グラフ	属性間の構成比率を帯に例えた	・構成比率を求める ・比率の大きい順に項目を並べる

	長方形の分割に対応させたグラフ	・帯が横のときは左端を，縦のときは下端を基線とする ・構成比に応じて　長方形　を分割する ・各項目の説明とデータ値を書く ・軸に目盛りおよび目盛りの数字をつけ，合計値も書く





生徒の授業用ノートから

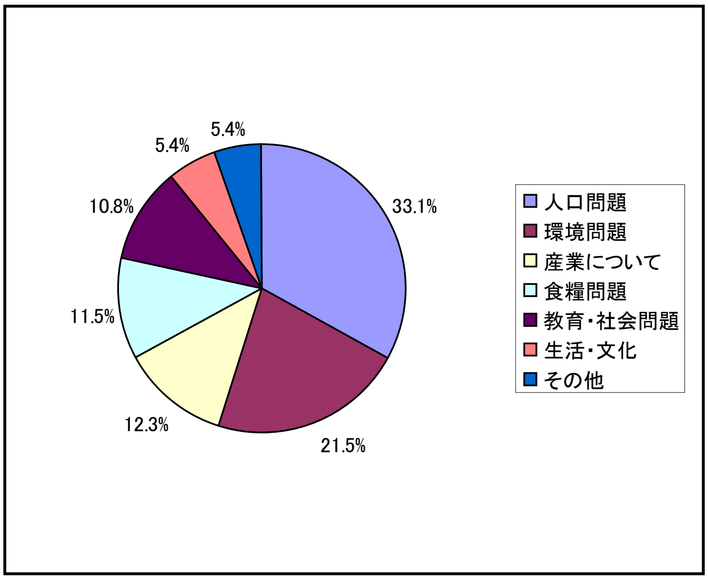
② 夏休みの課題のテーマ分析

第２次の終了後，夏休みの課題として，統計グラフづくりを課した。生徒各自が自らテーマを見つけ，そのテーマの統計データを収集し，統計グラフをつくる。そして，作成過程の中や，作成したグラフから見い出せることをまとめる。統計データを正しく理解して，統計的処理を行い，グラフ化することによって，データのもつ事象が理解できているかが問われる課題である。

９月初旬に提出された作品数は１３０であった。これらの作品のテーマは，「人口問題」，「環境問題」，「産業問題」，「食糧問題」，「教育・社会問題」，「生活・文化」，「その他」の７つの観点でまとめることができた。図はテーマ分類別の割合を示した

のものである。

図からわかるように，テーマは人口問題と環境問題が多く，次に産業，食糧問題についての作品が多かった。



人口問題では日本の少子高齢化についてまとめてある課題が多かった。反面，地球規模では人口爆発の状態であるとまとめた作品もあった。環境問題については，その多くが，地球温暖化についてまとめられていた。中には，夏休みの家の電気使用量と天候との関係についてまとめた作品もあった。この他にゴミ問題や絶滅危惧種についての課題もあった。産業問題では，農業，林業，水産業のそれぞれについてまとめられた課題や身近にあるコンビニエンストアーについてまとめた作品が多かった。食糧問題についてまとめた作品には，輸入食料が増え続けている現状をまとめたものや，食糧自給率についてまとめたものがあった。教育・社会問題では，不登校の実態についてや少年犯罪について，国の借金や老人医療費の問題についてまとめた作品があった。このように見てくると，提出された課題が，様々な観点から資料を分析してきたことがわかる。

次に生徒の感想と作品をあげる。感想の横にある括弧は，前述した評価基準に照らし合わせて分類を行ってある。

生徒の感想から

生徒１

私は，数学の統計をつくるときに，自分が今関心を持っている問題は何か，みんなが考えなければいけない問題は何かについて考えて，地球温暖化についてのグラフを作成することにしました。環境問題には関心があったし，地球温暖化はそれを明確に数字で表していると思ったからです。**（関心意欲・態度）**

地球温暖化と一口で言ってもいろいろなデータがあり，それぞれに温暖化が関与しています。データの多さにどれを選べばいいのか分からなくなったりもしましたが，結局は気温の変化など直接的で分かりやすいものを中心に選びました。**（数学的な見方・考え方）**

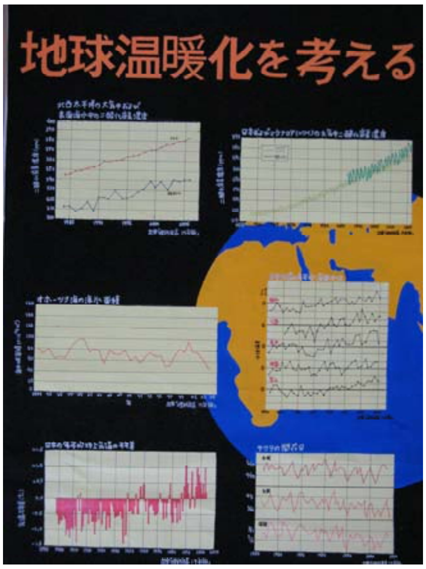
普段私たちが住んでいる地球を違う視点で見ることで，新しい発見を得たり，地球の環境について考えることができるのではないかと思います。**（表現処理）**

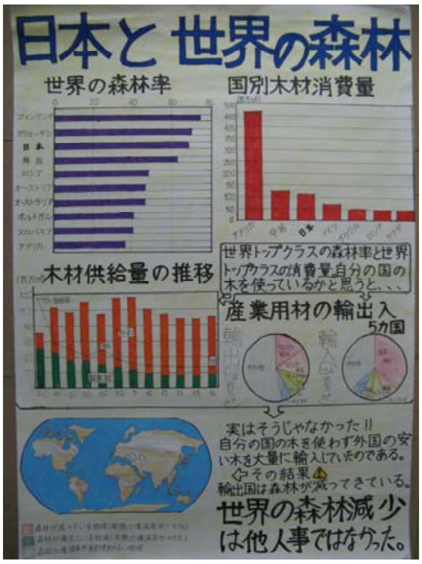
私たちにとってもっとも身近な地球に多くの問題があることをグラフを通して知ってもらえたらいいなと思います。**（知識理解）**

生徒２
なぜ，農業産出額について調べたのか。それは私たちは食べものを食べるだけで，その年どれだけの量がとれたのか，なにがたくさんとれるのか，など奈良県のことなのにぜんぜん知らなかったからです。**（関心意欲・態度）**
調べてわかったことは予想では，奈良県はお茶の産出量が１番だと思っていたけど梅が１番だったのでびっくりしました。**（表現処理）**
奈良県のおもな農業，昔と現在との生産額のちがいなどグラフにかくことでよりわかりやすくなりました。グラフをかくことは，はじめてですごく大変でした。夏休みにしかできないことだしいろんなことを知れてよかったです。**（数学的な見方・考え方）**
グラフをかく学習をとおしてキッチリかく，一人で取り組む努力をするという力がつきました。**（知識理解）**

生徒３
みなさんは，日本は大きな国だと思いますか？小さな国だと思いますか？こんな質問をされてすぐに答えられる人は少ないと思います。そこで私は，自分の母国である日本について知るためにいろいろな角度から国際比較をすることにしました。**（関心意欲・態度）**
ここで用いたのが統計グラフです。調べた表をグラフに表すのは，難しく，正確に書くことに苦労しました。**（数学的な見方・考え方）**
でも，いざグラフに表してみると，視覚的にも見やすく，表で見るよりもとてもわかりやすくなることが分かりました。するとグラフから知ることがたくさんできより良い調べ学習ができたと思います。**（表現処理）**
この学習を通して，統計グラフの便利さや良さなどが分かり，また，学習を深めることができよかったと思います。これからは，私たちの生活の中にあるたくさんの統計グラフを，見つけだし，いろいろな場面で活用していこうと思います。

生徒の作品一例





このように，自分でテーマを探し，どのようにグラフにまとめればよいかを試行錯誤しながら，統計グラフを作成し，グラフにすることで，資料からは読み取れなかったことを読み取れるようになり，その良さを実感している。また，グラフから読み取

ったことから，自らの生活へ省みることができたことがわかる。

③　統計のある数学教室（統計作品を身近に）

統計グラフや ESD を学校生活の中で身近に感じてもらうために，数学教室でいくつかの作品を飾った。作品は，「テーマ性」や「グラフの正確さ」，「グラフからしっかりと読み取れているか」の三点で選考した。生徒たちは，多種多様なテーマ，グラフの用い方やそこから得られた知見について，新しい感動を得て，学びを深めることができた。展示をされる側の励みになることや，学習したことの共有化の観点からも，これからもこのような展示を続けていきたい。

数学教室の展示の様子

（４）　後半の取り組み

①　グループ活動

後半の５時間は生徒がグループ（４～５人）ごとの小グループでの活動を行った。課題の提示の後，グループになり，テーマの設定，統計資料の収集について話し合わせた。資料の収集は宿題とした。

課題の提示の後，グループになり，テーマの設定，統計資料の収集について話し合わせた。資料の収集は宿題とした。

課題
- テーマは環境問題等に関するもの。
- 統計資料からグラフを複数作る。
- グラフから傾向や特徴を読み取り，予測，それを的確に表現し，発表する

各グループから挙がってきたテーマは，多種多様であったが，話し合い，それぞれのグループで，テーマを絞った。その結果，生徒達から出てきたテーマが次のようなものになった。

テーマ
気温とソメイヨシノの開花日の年別統計
グラフで見る少子高齢化
地球温暖化
桜前線と平均気温
絶滅危惧種
環境－地球温暖化－
砂漠化が広がっている
本当に地球温暖化なのか？

各グループは，それぞれのテーマについての統計資料を収集し，整理し，グラフ化を通して資料の特徴や傾向読み取り，考察した。課題解決のプロセスに従って活動を行った。

また，下記のまとめの要領に基づいて，各グループの活動をまとめ，発表用のパワーポイントや模造紙で発表できるように指導した。

まとめの要領

- 何を調べたか
- どうしてこのテーマにしたか
- どのようにして調べたか
- どのように整理したか
- どのようなグラフを選んだか
- グラフの特徴や傾向を捉える
- なぜそのように考えたか
- 今後わたしたちがどのようなことをしていけばよいか

統計資料の検討

発表資料の作成

② 発表会

発表会では，グループごとによる統計グラフをもとにして，事象の傾向や特徴を捉えて発表する事を求めた。発表を聞く生徒には，発表をメモし，発表に対する意見，感想，問題点についてメモし，後で発表することにした。

指導内容	学習活動	指導上の留意点
・本時の学習について	・本時の進め方や目標を知る。 ・グループごと統計グラフを用意する。	・前時までの学習してきた事を簡単に振り返る。 ・本時の目標を意識させる。
・発表会	・グループごと統計グラフの発表する。 ・発表者は事象の傾向や特徴を捉えて発表する。 ・発表をメモする。 ・発表に対して，意見，感想，問題点を発表する。	・発表から資料を どのように調べ，整理したか どのような特徴や傾向があったか， どのような理由や根拠があるのか どのような予想がされるかを 生徒に問う。
・学習のまとめ	・本時の学習を振り返る。	・学んできた統計的手法を用い，今後社会問題を主体的に考え，判断していくことを伝える。

③ 生徒の発表

以下の２つのグループは，環境問題を身近なことから目を向け，探究を行ったものである。

③－１　『気温とソメイヨシノの開花日の年別統計』

このグループは，地球温暖化を身近な桜の開花日が年々早くなってきていることに目を向けて考察した
グループの発表の一部である。（斜体字は発表原稿である）

「温暖化の影響で，ソメイヨシノの開花日がはやくなってきている」という報道について，そのようになっているのかを東京と奈良の２地点について調べた。

・調べたこと

・気象庁のHPにある東京と奈良の２，３月の平均気温の推移を調べた。

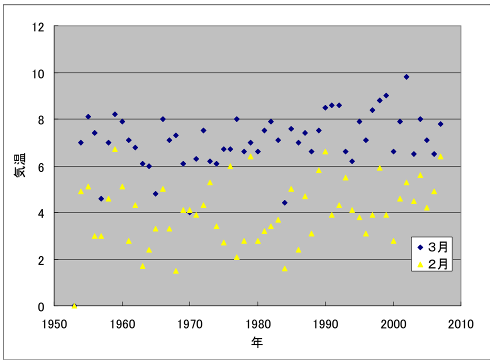
・ソメイヨシノの開花日を東京は気象庁の HP,奈良の開花日は奈良地方気象台に問い合わせて調べた。

・平均気温の推移をグラフ化して，気温の上昇があるのかを調べた。

・ソメイヨシノの開花日の推移をグラフ化して，早くなっているのかを調べた。

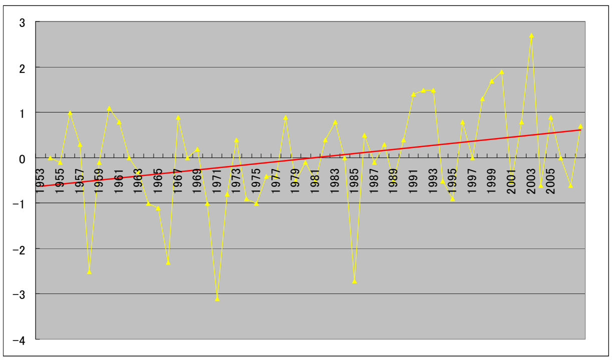
・平均気温とソメイヨシノの開花日の散布図を作成し，　相関があるのかを調べた。

グラフ１　奈良の平均気温２，３月の推移



奈良の２，３月の平均気温の推移を次のようにグラフ化した。温度をグラフにしてみて，気温が上昇しているかわからなかったので，1954 年から 2007 年の平均を求め，次に，平均との差を求め（偏差）それを次のようなグラフにした。

グラフ２　奈良の３月の平均気温の偏差

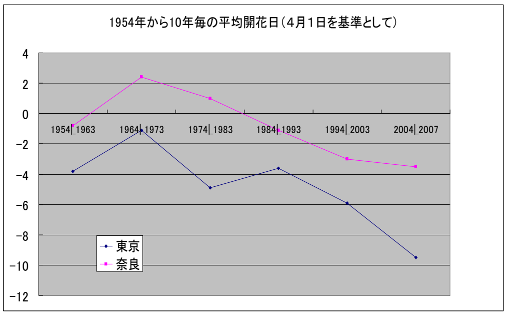


グラフから近年になるほど正の領域にある数が多いので，平均気温が上がっている。

（略）

次に，東京と奈良のソメイヨシノの開花日を 10 年ごとの平均をとり，４月１日を基準にしてグラフにした。

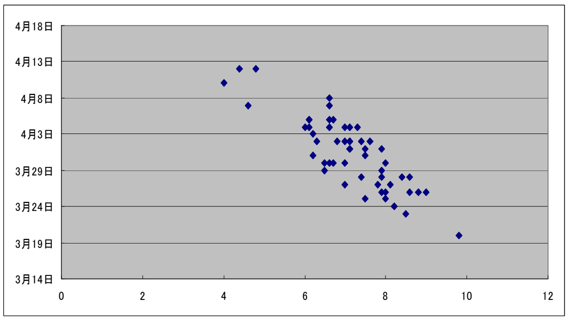
グラフ３



グラフから，ソメイヨシノの開花日が年々早くなっていることがわかる。

奈良の３月の平均気温と奈良のソメイヨシノの開花日の散布図を見ると気温が高くなると桜の開花日が早くなることがわかる！！（負の相関）（以下略）

グラフ４奈良の３月の平均気温とソメイヨシノの開花日



このグループは，テーマの設定時から，５つのテーマ（海面上昇，温暖化，砂漠化等）を持ち寄っていたが，身近な問題と温暖化であることから今回のテーマに絞った。

テーマ決定後，統計資料の収集をし，気温のデータは，気象庁の HP から得た。ソメイヨシノの開花日については，東京については HP から得ることができた。しかし，奈良については，2007 年の開花日は HP で公表されていたが，過去の分についてはわからず，生徒が奈良地方気象台に問い合わせて，データを得た。

また，ソメイヨシノの開花に２，３月の気温が関係があると考えた。東京と奈良の 1954 年から 2007 年の２，３月の平均気温，最高気温，最低気温等についてそれぞれ調べた。そして，どの気温でも気温が上がっていることを得たので，グループ内の検討段階で，平均気温についての考察を行った。

活動の中で，平均気温の推移をグラフ化した場面で，（グラフ１）教師から「そのグラフから気温は上がっているといえるか？」という問いを投げかけた。すぐには，生徒達は判断できなかった。そこで，教師から「ある基準を決めたら？」と促した。

すると，生徒達は，(対象年の平均）を決めて，その基準との差をグラフ（グラフ２）にした。そしてこのグラフから，近年正の領域にあることを読み取り，気温が上昇していることを結論づけた。

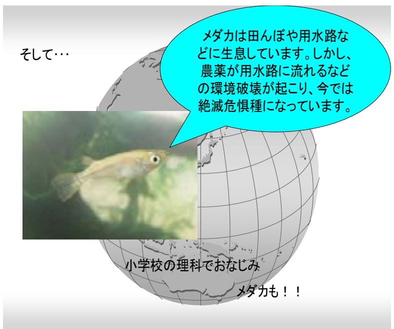
そこで，教師から「グラフ全体からわかることはないか」と問いかけた。その時に，他のグループが，Excel でグラフを作成すると，近似直線がかけることを見つけた。そのグループは，その直線の傾きが正であると，右上がりのグラフになるので，気温が増加していると結論づけた。このことを，教師が，他のグループにも説明した。これを聞いて，このグループは，自ら作ってグラフに近似直線を付け加えた。一次関数の学習を終えた後なので，ｘの係数が正であることから，この直線が右上がりになっていることがわかり，気温が上昇していることを示した。

ソメイヨシノの開花日については，２つの都市の開花日を１０年ごとに平均をとり，それをグラフ化（グラフ３）した。このグラフをつくることにより，ソメイヨシノの開花日が早くなっていることを示した。次に，温暖化とソメイヨシノの開花日が関係しているのかについて，散布図（グラフ４）を作り，相関について調べ，負の相関があることを突き止めた。そして，「気温上昇に伴い，ソメイヨシノの開花日がはやくなっているのではないか。」と結論づけた。自らの仮説を実証するために，必要な統計的知識をそれぞれの段階で学びながら，結論を導いていくという学習ができた。

③－２『絶滅危惧種』

次のグループは，絶滅危惧種に目を向けて考察したグループの発表の一部である。

まず，絶滅危惧種とは，何でしょうか？
絶滅危惧種とは，絶滅の危機にある生物種のことです。また，人間の経済活動がかつてないほど増大したため，その影響のせいで絶滅した種も発生してきている。
そして，小学校の理科でおなじみのメダカも絶滅危惧種になっています。



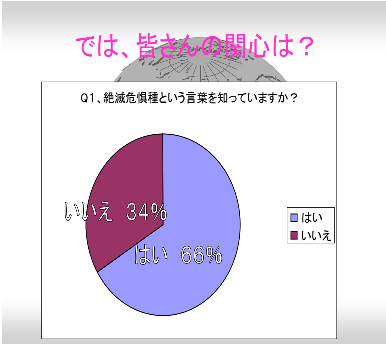
その，メダカは田んぼや用水路に生息していますが，そこに農薬が流れるなどの環境破壊が起こったため，絶滅危惧種になっています。（略）
では，皆さんは絶滅危惧種に関心があるのでしょうか？
第一問，絶滅危惧種という言葉を知っているかというアンケートに対して，はい66パーセント，いいえ34パーセントで

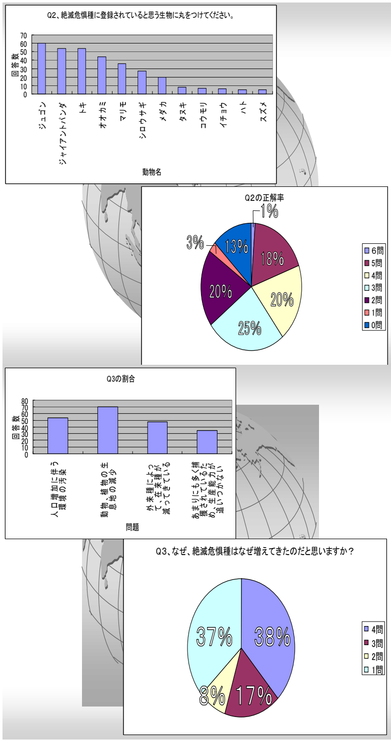
した。半分以上の人が知っているようです。第二問，絶滅危惧種に登録されている生物と思うものに丸をつけてもらいました。

　そこには，ジュゴン・ジャイアントパンダ・トキ・オオカミ・マリモ・シロウサギ・メダカ・タヌキ・イチョウ・ハト・スズメの全12種類をあげました。正解は，ジュゴン・ジャイアントパンダ・トキ・オオカミ・マリモ・メダカの6種類でした。 メダカが絶滅危惧種に登録されている，と持っている人は少なく，シロウサギという回答が多かったです。絶滅危惧種という言葉は知っていても，どの生物が登録されているかということはあまり知らないようです。

　第三問，絶滅危惧種はなぜ増えてきたのだと思いますかという問いです。

　答えは，人口増加に伴う環境の汚染　動物，植物の生息地の減少　外来種によって，在来種が減ってきている 。あまりにも多く捕獲されているため，生産能力が追いつかない，　の全4問でした。約4割の人が全問選び，正解でしたが，殆どの人が原因についてあまり知らないようです。

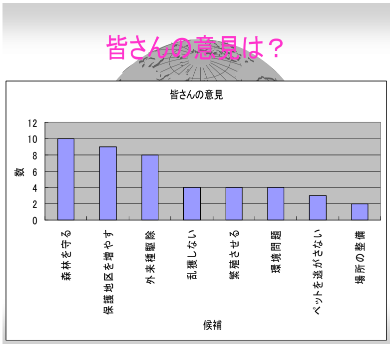




第4問では「絶滅危惧種」は増えてきています。今後どのようなことをしていけばよいのでしょうか？

　グラフのような結果になりました。

絶滅危惧種が年々増えているということは，それだけ地球環境が悪化しているということがわかりました。これは人類が引き起こしたことなので，私たちに責任があります。アンケートでとったみんなの意見と合わせて，植林活動などできることからやっていきたいと思いました。



　このグループは文化祭で発表した「絶滅危惧種」についてさらに探究を行った。絶滅危惧種の分布や推移については，インターネットや理科年鑑を使い統計資料を収集した。生徒達は問題が大きな事であるが，あまりに資料がないことにびっくりしていた。このグループは単に統計資料を収集するだけでなく，周りの人が「絶滅危惧種」についてどのように考えているか，これからどのようにしていけばよいかまでに考えを広げてアンケート調査を行った。アンケートは生徒達が作ってきた。アンケートは，最初，全ての問いで自由記述であった。そこで，問いに対して自由記述では答えにく

いのではないかというアドバイスをした。その後，いくつかの選択肢を生徒達が考えてアンケートを作成し直した。作り直す中で，絶滅危惧種の問題は，環境問題だけでなく，経済，生活の問題とも密接に結びついていた問題であることを知ったようである。それが，アンケートの選択肢の中から伺える。

アンケート実施後の処理も全て生徒達が行い，絶滅危惧種の問題を地球温暖化と結びつけ，持続可能な生態系の維持に自分たちの生活を振り返り，植林活動などといった，できることからやっていこうと結論づけた。統計的な結論だけでなく，自分達のライフスタイルについてまで言及できていることがこのグループの成果である。

④　質疑応答と授業のまとめ

「気温とソメイヨシノの開花日」の発表について，「開花日が早くなることで，植物に影響がないのか？」

という意見が出された。温暖化の影響がグラフの説明からわかったが，それにより，植物への影響についての質問であった。このように統計グラフの結果をもとに，温暖化について議論が広げることができた。

発表会後に学んできた統計的手法を用い，今後社会問題を主体的に考え，判断していくことを伝えた。

８　授業で活用したワークシート

発 表 用 原 稿

テーマ

数学　統計資料の収集と探究　発表会

組　番名前

発表順　番 テーマ　発表グループ グループ
メモ欄 テーマ設定の理由

統計資料をどのように調べ，整理したか

グラフにどのような特徴や傾向があったか

グラフからどのようなことが予想がされるか

今後どのようなことをしていくか

他人の意見の欄

感想の欄

9　わかっていることをどのように把握したか

本時では，次の 2 点でわかっていることを把握した。

(1)　授業後にわかる科研で作成した共通アンケートを実施した。

アンケートの内容は以下の通りであった。

「何を学習するかが明確な授業だった。」

「進行速度が適当な授業だった。」

「じっくり考える時間がある授業だった。」

「配付資料（資料・プリント・道具のほか，映像も含む）が効果的な授業だった。」

「友達の意見を聞く時間がある授業だった。」

「自分の考えを発表できる授業だった。」

「発言しやすい授業だった。」

「授業のレベルが適切な授業だった。」

「説明の量が適切な授業だった。」

「今までの学習とのつながりがわかる授業だった。」

「学習の意味や意義がわかる授業だった。」

自由記述

「わかったことや気付いたこと」

「わかりにくかったこと」

自己評価

「集中して授業を受けることができたか」

などの生徒の自己評価

(2)　授業中の取り組みの様子

授業中にも生徒の様子を確認したが，授業中の様子をビデオ撮影しておいたものを授業後に確認した。

１０　本時がわかる授業であったか

発表会の授業後にアンケートを行い，結果は下記の表の通りである。

アンケート文	実数	％
何を学習するかが明確な授業だった。	23	59.0%
進行速度が適当な授業だった。	23	59.0%
じっくり考える時間がある授業だった。	15	38.5%
配付資料（資料・プリント・道具のほか，映像も含む）が効果的な授業だった。	28	71.8%
友達の意見を聞く時間がある授業だった。	30	76.9%
自分の考えを発表できる授業だった。	18	46.2%
発言しやすい授業だった。	10	25.6%
授業のレベルが適切な授業だった。	17	43.6%
説明の量が適切な授業だった。	20	51.3%
今までの学習とのつながりがわかる授業だった。	17	43.6%
学習の意味や意義がわかる授業だった。	20	51.3%

本授業は，グループ活動によって得た知見の発表会であることから，「配付資料が効果的」，「友達の意見を聞く時間がある授業だった」というように，７０％以上の生徒が肯定的に答えた。「何を学習するかが明確な授業」「学習の意味や意義がわかる授業」で，５０％以上の生徒が肯定的に捉えていとことから，半分以上の生徒が本授業のねらいを理解していると捉えられる。次に，自由記述による「本授業でわかったこと」では，１名が白紙であったが，大まかに分類すると，「統計の有用性がわかった」，「環境問題の内容がわかった」，「発表方法についてわかった」，「考え方がわかった」，「その他」に分類でき，次の表のようにまとめた。

分　　類	実数	%
グラフや統計の有用性がわかった	15	39.5%
環境問題の内容がわかった	12	31.6%
発表方法についてわかった	4	10.5%
考え方がわかった	7	18.4%
その他	０	0%

この結果から，無回答１名を除く３８名（授業参加者３９名）がこの授業で何かをわかったと答えていることがわかる。

生徒は授業に積極的に取り組んでおり，作業や計算など，面倒がってあまりやりたがらない生徒が多いのだが，この授業はよく取り組んでいた。

以上のことから，わかる授業であったと判断してよいと考える。

１１　「わかっていない」とみなされる例

「今日の授業で，わかりにくかったことはどんなところですか。自由に書いてください。」というアンケートの結果は，次の表のようになった。

分　　類	実数	%
白　　紙	20	52.6%
回帰式の意味がわからない	5	13.2%
グラフの説明がわからない	6	15.8%
発表の説明がわからない	5	13.2%
その他	3	7.9%

今回の授業では，グラフをエクセルで作成したグループが，傾向や予測をするため

に，エクセルのグラフの機能の近似式を用いてた説明を行ったグループが３つった。散布図から全体の傾向を把握し，予測をするために用いていた。一次関数の学習の後での取り組みで，係数が正であることから，年ごとに温暖化が進んでいることを導いていた。これに対する説明が不十分だったため，このような結果になった。

１２　わからない生徒への対応例

EXCEL で近似直線（回帰直線）を求めて，予測に使った数学的な原理の説明については難しいので，今回は原理までは取り上げなかったが，中学２年生でも，その利用法と解釈の仕方は学習可能であることがわかった。ただ EXCEL ではどのような散布図からも回帰直線が求められることができるため，相関関係について調べてから回帰直線を求めるように事後に指導をした。

１３　参考資料

文部科学省(2008)「中学校学習指導要領解説　数学編」

奈良教育大学附属中学校(2007)『ESD の理念にもとづく学校づくり』　奈良教育大学附属中学校　教育研究集録　第 36 集

西仲則博・吉岡睦美・竹村景生(2008)　『新領域「資料の活用」を意識したカリキュラムの提案　－「統計資料の収集と探究」の取り組みを中心に－』
日本科学教育学会第３２回年会論文集 pp341-344

西仲則博(2009)「新領域「資料の活用」における ICT の効果的利用による授業の構築」　日本科学教育学会第３３回年会論文集 pp151-154

吉岡睦美（2008)『新領域「資料の活用」の授業実践と今後の課題』
第 90 回全国算数・数学教育研究大会発表論集

渡辺美智子（2007)「統計教育の新しい枠組み--新しい学習指導要領で求められているもの－」数学教育学会数学教育学会誌 48(3・4) p39 ～ p51

渡辺美智子(2007)『知識創造社会を支える統計的　思考力の育成－アクションに繋がる統計教育への転換－』日本数学教育学会誌第 89 巻第 7 号数学教育 61-4　ｐ 29-38

１４　本実践を振り返って

今回試行している統計の授業は，前半の取り組みでは，授業内容としては，小学校の統計グラフの内容と変わらないが，統計資料の収集の仕方，データの処理の仕方，統計グラフの作成の仕方等の統計的課題解決に重きを置いた授業を行い，その質と量において，中学生に応じた内容の実践を行った。後半の取り組みでは，生徒たちが自ら資料を収集することからはじまり，生徒たちが課題解決過程を踏みながら，自分達の仮説を検証するための活動を行った。生徒の活動が授業の主な目的でもあるため、

教師は，生徒のアドバイザーとなり，必要な統計的知識や ICT の利用に関する助言を行ったり，タイムマネージメントを行いながら，それぞれのグループの学習状況を把握しながら，本実践を行った。

本実践の成果として次のようなことがあげられる。

・生徒は，多種多様な観点から環境問題に関する資料を収集し，それを分析してグラフで表現していた。

・グラフの作成後，事象の持っている傾向を捉え，新たな発見をしたことがわかる。そして，他者への喚起になるようなことまで，考えることができた。

・自ら学び，創造する力へと転化することができた。

・生活の中で活用していこうとする態度を育むことができた。

これらの成果から，統計の知識の獲得だけでなく，環境問題の素養を身につけるまでになったと考える。今後も，生徒が自ら統計処理の一連のプロセスを行っていく取り組みを課題の質を変えて取り組んでいく事が重要である。

期待値計算を比較して，活用できる知識・態度を育てる指導
－宝くじ問題は簡単だ，という教師側の認識のズレに配慮して－

横 澤 克 彦
長野県上田千曲高等学校

１．校種・領域など

（1）校　　　種：高校　食物栄養科（１４名）
（2）内 容 領 域：確率
（3）学年（科目）：３年選択授業（数学基礎）
（4）単　　元　名：(３) 社会生活における数理的な考察
　　　　　　　　　イ．身近な事象の数理的な考察

２．小中高校種間（縦）及び校種内（横）の接続：学びの系統

高校（数学 A）	→	本時（数時）	→	高校（数学基礎）
●確率の基本的な法則 高１・確率の計算 ・和積の法則 ・期待値		高校（数学基礎） ●身近な事象の数理的な考察 高３・期待値（平均値）		●身近な統計の傾向の把握 高１・度数分布 ・ヒストグラム ・箱ひげ図 ・代表値（平均），分散，標準偏差
		↑		
		中学校 ●確率の基本的な意味 中２・統計的確率（度数分布） ・数学的確率		
		↑		
		小学校 ●資料の分類整理 小６・平均 小５・百分率，割合		

（１）小中高校種間（縦）の接続

　期待値の導入では，いわゆる「くじ引きと賞金」の事例がしばしば取り上げられている。2)　この理由としては，生徒にとって馴染み深いことや，期待値という言葉のイメージがくじ引きに合うこと，小学校算数科で学習した「平均」との関連を図りやすいことなどが考えられる。

（２）校種内（横）の接続

本校は７つの専門学科（建築・機械・電子機械・電気・商業・食物栄養・生活福祉）からなる職業高校である。対象生徒は１年次に数学Ａで確率を履修済みの生徒であり，３年次になり選択教科として数学基礎を選んだ食物栄養科の女子 14 名である。

数学基礎を開設している目的は，実生活における身近な事象を数理的に考察することを通して，生徒自らが数学の有用性などを知り，数学的な見方や考え方を豊かにすることである。

３．本時（数時）の授業でわかってほしいこと

（１）宝くじ賞金の原資が，自分たちのお金だとわかる

期待値では，しばしば「くじ引きと賞金」の問題が取り上げられる。しかし実際に授業してみると，宝くじの構造を理解していない生徒が多い。「賞金は銀行から来ると思った」「くじに支払うお金は参加料だと思った」などの回答が返ってくる。つまり，賞金の原資が自分たちのお金から出ていることを知らないのであった。

これでは期待値を求める意義や有用性はわからないだろう。サイコロを使ったゲームが身近であっても，ルールを知らなければ，ゲームに参加できないのと同じである。実際的な問題を授業で扱う場合には，その問題の背景となる知識が必要となる場合がある。ここでは，宝くじ賞金の原資が自分たちのお金から出ていることわからせたい。

（２）４通りの期待値計算の合理性と有用性がわかる

①Σ（確率×賞金）

②賞金総額／販売総本数

③販売総額× 46%／販売総本数

（＝（販売総本数×１本の価格）× 46%／販売総本数）

④１枚の販売額× 46%

期待値計算は，①を提示されることが多い。さらに②に式変形して，意味を説明されることもある。

では，この式を実生活の考察に利用しているだろうか。購入者の立場では，販売総本数はわからない。明らかにしている宝くじもあるが，計算は煩雑である。

数学基礎としてはこれでよいのだろうか。

当せん金付証票法（以下、宝くじの法律）によると，「当せん金額はその発売総額の 50%を超えてはならない」とある。ここから③，④の式をつくった。

これら４通りの期待値計算の合理性を考えることで期待値の意味がわかり，④によって実生活の考察が行われ，有用性が実感されることを期待している。

４．わかるための指導上の工夫

（１）実際に宝くじをつくらせた

宝くじ賞金の原資が，自分たちのお金であることがわかるための工夫として，実際

に宝くじをつくる経験をさせた。

賞金総額を１等，２等…に分配していくが，その賞金総額＝販売総額× 46%であること。またその販売総額＝１枚 300 円×販売総数であることなどを振り返るとき，原資が自分たちの購入代金であることに気づくと考えた。

（２）個々の宝くじの期待値がすべて揃う課題をつくった

期待値の有用性がわかるための工夫としては，当初，宝くじに対する立場に注目した。しかし購入者が期待値を求めるときには，数学的活動のサイクルは１回しか起きず，さらに一攫千金をねらう者にとっては，期待値はあまり意味を持たない。

また企画販売する側でも，期待値はあまり意識されていないと思った。“宝くじの法律”に「当せん金額はその発売総額の 50%を超えてはならない」とあるが，これがすでに期待値だからである。あとは当せん金額を購入者にとってより魅力的に配分することの方がより重要になっていた。

そこで今回，期待値の有用性やその意味を考える必要感を生み出すため，生徒たちのつくる宝くじが，すべて同じ期待値（138 円）に揃うような課題（課題２，３）を与えることにした。このときの驚きや疑問が，期待値の意味を追究する必要感につながると考えた。

（３）実生活で活用できる式をつくった

実生活でも活用できるようにするための工夫として，「１本の価格× 46%」の式をつくった。有用性を感じて終わるのではなく，実生活で活用できる知識や態度を身につけてほしいと考えたからである。

ただ形式的な理解にならないよう，４通りの計算を比較し合理性を考えることを通して，意味の理解につなげるような配慮が必要だと考えている。

５．本時（数時）の授業がわかる授業の項目のどれになるか，またその特徴

	該当項目	本時（数時）の特徴
わかる対象	●態度・価値観 －有用性 （活用・利用） ●思考・判断 －考え方の根拠	（１）宝くじ賞金の原資が，自分たちのお金だとわかる （２）４通りの期待値計算の合理性と有用性がわかる ①Σ（確率×賞金） ②賞 金 総 額／販売総本数 ③販 売 総 額× 46%／販売総本数 ④１枚の販売額× 46%
わか	●説明と 指示の工夫 ●数学的活動の	（１）実際に宝くじをつくらせた 宝くじ賞金の原資が自分たちのお金であることを知らない生徒が多かった。そこで宝くじをつくる経験をさせた。

る た め の 工 夫	充実 （生活関連…活用） ●接続 －既習内容や身近な事象と関連づける（何を基にどう発展させるか）	**（2）個々の宝くじの期待値がすべて揃う課題をつくった** そうした驚きと疑問から，期待値の意味を考える必要感が生まれるように工夫した。 **（3）実生活で活用できる式をつくった** 「Σ（確率×賞金)」の式を基に,「１本の値段× 46%」の式に発展させた。その合理性が意味を考えさせることにつながり，実生活でも活用できるよう工夫をした。
わ か っ た こ と の 評 価	●評価方法 －観察 －ワークシート －テスト －質問紙	**（1）観察** 教師や生徒の説明に対するうなずきや表情で把握した。 **（2）ワークシート** 授業ごとに分かったことや感想を記述させ，キーワードが含まれているかで点数化した。 **（3）テスト** 問題解決において，期待値の意味がわかり，より合理的な方法で求められたかを点数化した。 **（4）質問紙** 選択肢によって期待値の認識を数値化し，単元の前後でその変化を比較した。

６．学習課題設定の意図

本時（数時）では，次の課題を設定した。

課題１　忍さんは日本宝くじ協会に就職し，新しい宝くじの企画販売をすることになりました。
しかし宝くじには，“宝くじの法律”というものがあるようです。
宝くじにはどんなルールがあるのか，調べてみましょう。

課題２　忍さんは昨年の宝くじを参考に，賞金額と本数を考えています。
一緒に宝くじをつくってみてください。
ただし昨年同様に，発売金額は１本３００円。当せん金額は発売総額の４６％とすることが決められています。

課題３（本時）
宝くじを購入する人たちは，その期待値を計算することが多いようです。
みなさんのつくった宝くじの期待値を確認しておきましょう。

これらの課題を設定した意図を以下に述べる。

（１）期待値の問題は正答率が低く，活用もされていない

①期待値の問題は正答率が低く

$\boxed{6}$ 1000 本のくじの中に，右の表のように当たりくじが入っています。

このくじの中から１本のくじを引くときの賞金の期待値を求め，$\boxed{}$の中に書きなさい。

	賞　金	本　数
1 等	10000 円	3 本
2 等	5000 円	10 本
3 等	1000 円	20 本

（1000本の中に含まれる当たりくじの本数とその賞金）

図１　H14 報告書（p.97）出題された「期待値」問題

問題番号	解答類型	番号	反応率（%）
B$\boxed{6}$	100（円）	◎1	39.3
	1000（円）	2	2.9
	10（円）	3	1.3
	3030（円）	4	2.5
	上記以外の解答	9	21.0
	無解答	0	32.8

図２　H14 報告書（p.97）「期待値」問題の解答類型とその反応率

平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書 高等学校 数学（以下，H14 報告書）によると，この問題の正答率は 40 %に満たず，無答も 32.8%と多く，次のような分析がされている。

「生徒にはその計算原理が十分に理解されていないという状況も考えられる。また，期待値の意味を十分に理解しないまま，ただ計算式に当てはめて結果を求める生徒も少なくないと推測される。」2)

②活用もされていない

今回の授業を受けた本校の生徒 14 名に対して，授業前のアンケートをとった。期待値は１年次に学習済みであるが，期待値の内容を「平均」という言葉を使って説明できたのは４名のみであった。また１年次に期待値計算ができた記憶はあるが今は自信がないと答えたのは，14 名中 10 名であった。さらに日常生活での活用経験は１人もいなかった。調査人数は多くないが，一般的にもあまり傾向は変わらないのではないかと考えている。

表１　期待値に対する授業前アンケート

期待値とは？	**１年次計算はできたが，今自信ない**	**日常生活での活用経験あるか？**
○（内容を答えて正答）４名	○　１０名	○　０名
△（方法を答えて正答）４名	×　２名	×　１４名

×（誤答）	６名		

（２）場面把握にとまどう生徒と，簡単だという教師側との認識のズレが大きい

①通過率と設定通過率の比較

（%）

問　題	通過率	設定通過率	差	無解答率
B$\boxed{6}$	39.3	60	−20.7	32.8

図３　H14 報告書（p.97）「期待値」問題の学習状況

設定通過率に対する通過率との差がー 20.7 というのは他の問題に比べても大きい。

分析を読むと「具体的で分かりやすい例」「計算自体は容易である」と考え，設定通過率を高くしたのかも知れないが，生徒にとってもそうだったのかは疑問である。

②生徒及び教師の質問紙調査結果の比較

［生徒質問紙調査の結果］　（%）

よく分かった	よく分からなかった
25.7	54.5

好きだった	きらいだった
20.1	57.6

［教師質問紙調査の結果］　（%）

生徒にとって理解しやすい	生徒にとって理解しにくい
35.7	43.2

生徒が興味を持ちやすい	生徒が興味を持ちにくい
54.8	23.0

図４　H14 報告書（p.99）「期待値」問題に関する質問紙調査の結果

54.8%の教師が期待値は「生徒が興味を持ちやすい」と考えているのに対し，生徒は 54.5%が「よく分からなかった」，57.6%が「きらいだった」としている点に違和感を覚える。

H14 報告書では次のように分析している。「教師が考えている以上に，生徒には期待値の概念そのものが複雑で，理解しがたいものとして映っていると考えられる。」2) が，実際，生徒にはどのように映っているのだろうか。

授業をして気付かされたのは生徒の次の発言だった。

「宝くじのお金はどこから出てくるのかわかった。」

つまり，生徒は宝くじの構造を知らなかったのである。数分の説明でわかることである。そうした生徒への配慮もないまま，「具体的で分かりやすい例」「計算自体は容易である」と指導をしていたとしたら，その意味も計算原理も，ただ複雑で理解しがたいものに映ってしまうのも当然だと思えた。

（３）活用する力をつけるには，活用する経験が必要

PISA や実施状況調査の結果からは，日本では数学的リテラシーや活用力が身に付いていないという問題が見えてきた。

期待値は，不確定な事象をとらえ考察するときの根拠として活用される。指導にお

いては，場面が分かりやすく，簡単で計算が容易な例が取り上げられることが多い。教師は，生徒がすぐに理解するだろうと考え，計算の習熟に力を入れることが多いが，こうした指導で期待値を活用する力は高められるのだろうか。

具体的な問題解決の過程に生徒を参加させ，解決すべき課題として問題をとらえさせ，期待値の知識を実際に活用する経験をさせなければ，活用する力は身に付けさせることができないと考えている。

写真１　本時（課題３）の授業風景

板書内容

期待値
　＝　賞金総額／販売総本数
　＝（販売総本数×１本の価格）
　　　　× 46%／販売総本数
　＝　１枚の販売額× 46%

７．具体的展開

（１）学習指導案（課題３について）

<table>
<tr><th>ねらい</th><th>学習活動（T：教師，S：生徒）</th><th>指導上の留意点・評価</th></tr>
<tr><td>導入
(5)</td><td>
課題３　宝くじを購入する人たちは，その期待値を計算することが多いようです。みなさんのつくった宝くじの期待値を確認しておきましょう。
（つくった宝くじの例）
<table>
<tr><td>１本の販売額</td><td>300 円</td></tr>
<tr><td>販売本数</td><td>10,000,000 本</td></tr>
<tr><td>販売総額</td><td>3,000,000,000 円</td></tr>
<tr><td>経費(14.2%)</td><td>426,000,000 円</td></tr>
<tr><td>自治体の収益金(39.8%)</td><td>1,176,000,000 円</td></tr>
<tr><td>賞金総額(46.0%)</td><td>1,380,000,000 円</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th></th><th>賞金額</th><th>本数</th><th>小計</th></tr>
<tr><td>１等</td><td>100,000,000 円</td><td>10 本</td><td>1,000,000,000 円</td></tr>
<tr><td>２等</td><td>10,000,000 円</td><td>30 本</td><td>300,000,000 円</td></tr>
<tr><td>３等</td><td>1,000,000 円</td><td>80 本</td><td>80,000,000 円</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1,380,000,000 円</td></tr>
</table>
</td><td>・問題文の意味がわかったか。

・生徒とのやりとりの中で問題場面が理解できているか判断する。

(評価)積極的に取り組めているか。
(関心・意欲・態度)</td></tr>
</table>

	S:自分のつくった宝くじだけやればいいの？ T:そう，期待値計算は覚えてる？どんな式だった？	
展開１ 個人 発表 (25)	S: ① **Σ（確率×賞金）** 10 / 10,000,000 × 100,000,000 = 100 30 / 10,000,000 × 10,000,000 = 30 ＋） 80 / 10,000,000 × 1,000,000 = 8 **138** 円 S: ② **賞金総額÷販売総本数** ②-1 1,380,000,000 ／ 10,000,000 ＝ **138** 円 ②-2 (100,000,000*10+10,000,000*30+1,000,000*80) ／ 10,000,000 ＝ **138** 円 S: ③ **販売総額× 46% ／ 販売総本数** 3,000,000,000 × 46% ／ 10,000,000 ＝ **138** 円 T:自分の期待値と比べてみよう。何か気がついた？ S:138 円になった。みんな一緒だ。 T:何でだろう？	・電卓使用可 ・期待値計算を思い出せているか。 （知識・理解） (評価) 期待値の意味を理解し，より合理的な方針で求められたか。 （表現・処理）
展開２ 全体 発表 (15)	T:もう１つの計算と比べてみよう。 S: **④１枚の販売額× 46%** ＝ 300 × 46%＝ **138** 円 T:何でこの方法で求められるんだろう？ S:全体の 46%は１本の中の賞金分と考えてもよいから S: ③の式 ＝(販売総本数×１本の販売額)× 46%／販売総本数 ＝１本の販売額× 46%	(評価) ④の考え方の根拠が理解できたか。 （見方・考え方）
まとめ (5)	T:この④の式のよいところは何だろう？ S:いつも使える。 S:①②の式にある販売総本数や③の販売総額は，買う側ではわからないけど，④の１本の販売額はわかるから，売ってる宝くじの期待値がすぐ出せる。	(評価) 実生活における活用方法がわかったか。 (知識・理解)

（２）実際の授業展開

①課題１について

生徒は“宝くじの法律”があることを初めて知ったようであった。また，宝くじがお金儲けではなく，公共事業や福祉事業のための予算獲得の手段として使われていることを知り，驚いた様子であった。

また当せん金が発売総額の 50%を超えないということから，賞金は購入金額の半分しかないとわかり，購買意欲をなくしたようだった。しかし寄付だと思えば１枚ぐ

らい買ってもいいかという生徒もいた。

②課題２について

実際にくじを作る中で，賞金の元になっている販売総額が，自分たちの購入した宝くじの売上げから出ていることに気づき，宝くじの構造がわかったようである。

これまで期待値の言葉の意味がわからなかったようだが，構造がわかったことで，自分の支払った金額と比較して，幾らぐらい返ってくるかを期待できる金額という説明をして，ようやく理解できたようである。

③課題３について

期待値を②の式から，１本分の平均の賞金額とわかった。また④の式が実生活で活用できることがわかった。

８．授業で活用したワークシートとその意図

（１）課題３のワークシート

自分たちのつくった宝くじの期待値を求めるワークシート

それぞれの期待値が１３８円に揃い，その驚きと疑問から期待値の意味を考え始めることを意図している。（資料１参照）

（２）評価問題と質問紙

評価問題では，１本の販売額× 46%から期待値を求められるか，質問紙では，授業前後での期待値に対する認識の変化を調査することを意図している。（資料２参照）

（３）モデル授業でのワークシート

（１）（２）の学習内容と重なるが，モデル授業として授業を行い，宝くじの構造の理解から期待値を（１本の販売額× 46%）として学習するまでを２時間の授業で実施可能かを試してみた。

１時間目では，宝くじの構造を知り，実際につくる活動を行う。

２時間目（本時）では，自分たちの宝くじについて期待値を求め，１３８円に揃うことや１本の販売額× 46%で求めてもよい理由などを確認していった。

１度学習した内容ではあったが，おおむねこの時間内でも成立すると思われる。

（資料３参照）

９．わかっていることをどのように把握したか

（１）わかる対象と評価方法と評価基準のつながり

わかる対象	評価方法	評価基準
（1）宝くじ賞金の原資が，自分たちのお金だとわかる	A.うなずきや表情の観察から B.ﾜｰｸｼｰﾄから	・点数化せず指導評価として利用
（2） ４通りの期待値計算	C.ﾜｰｸｼｰﾄから	（２点）

の合理性と有用性がわかる ①Σ（確率×賞金） ②賞金総額／販売総本数 ③販売総額× 46% ／販売総本数 ④１枚の販売額× 46%	期待値の意味がわかっているか。	・④１本の販売額×46%から求められることがわかる （１点） ・②賞金総額／販売総本数などから求められることがわかる （０点） ・白紙，あいまいな記述
	D.テストから より合理的な方針で解決できるか。	（２点） ・④１本×46% から求められた （１点） ・④１本×46% だがミス ・②賞金総額／販売総本数などから求められた （０点） ・②賞金総額／販売総本数だがミス ・白紙，あいまいな記述
	E.H14 調査問題が解決できたか	（１点）・できた （０点）・できない
	F.質問紙から 活用する態度につながったか	・◎○△×の４段階で授業前後の変化を比較した。

１０．本時（数時）がわかる授業であったか

（１）ワークシートとテストの集計と考察　（C,D,Eは，９の評価方法に対応）

番	氏名 点数	C．期待値計算式の意味がわかる（課題３より）		D．期待値計算できる(評価問題より)	E．H14調査問題できる	合計 ５点満点	判定	有用性 何か解決
	２点	・１本の販売額×46%から求められることがわかる		・１本×46%から求められた				
	１点	・賞金総額／本数から求められることがわかる ・式を根拠にしている		・１本×46%のミス ・賞金総額／本数から求められた	○正解			
	０点	・あいまいな記述		・賞金総額／本数のミス　・白紙	×不正解			
	[redacted]	期待値！宝くじについては自分が得するか損するかわかった買うときにいろいろ考えられそう。	0	2	1	3	わかった	◎
	[redacted]	期待値は賞金総額÷販売本数をやることで１本の値段が出ることがわかった。わざわざ<u>全ての計算をしなくても一発</u>ででることがわかった。	2	0	1	3	わかった	×

注１）生徒が回答した文中の下線は，教師が評価の決め手とした記述

注２）５点満点とし，３,４点を「わかった」５点を「よくわかった」とした

	[redacted]	きたいちはむずかしい。	0	0	0	0		△
	[redacted]	期待値＝平均	1	0	1	2		○
	[redacted]	どんな計算?をしても同じ数になることがわかった。	1	2	1	4	わかった	△
	[redacted]	長い期待値の計算をしなくても「１本の販売額×46%」をやればでることがわかった。	2	1	1	4	わかった	○
	[redacted]	確率を考えて計算していくと期待値がやっとでたけど，賞金総額／本数でかんたんにだすことができた。	1	1	1	3	わかった	○
	[redacted]	138は１本の期待値であり，１本の値段の46%であることがわかった。全体でやってることと１本でやっていることが同じになることがわかった。	2	2	1	5	よく わかった	○
	[redacted]	１本の期待値は全体の期待値と一緒だとわかった。	2	0	1	3	わかった	○
	[redacted]	期待値は１本３００円の46%＝138円のことで，宝くじ１本の価値は138円になることがわかった。	2	2	1	5	よく わかった	○
	[redacted]	教科書の期待値と今までやってきた期待値の答えが同じになることがわかった。	1	0	1	2		△
	[redacted]	賞金総額／販売本数＝一本の期待値＝１本のねだんの46%	2	0	1	3	わかった	○
	[redacted]	期待値は１本でも何千本でも一緒。期待値だけだと実際には得なのか全然わからないけど，今回勉強して，１本の価値とか分かるようになった。	2	2	1	5	よく わかった	○
	[redacted]	全体から期待値を出さなくても１本から期待値を出せることがわかった	2	0	1	3	わかった	○

合計点で判断したとき，「よくわかった」３名（５点)，「わかった」８名（４，３点)，「わからなかった」３名（２，１点）となった。今回の授業では，80%の生徒から「よくわかった」「わかった」という回答を得ることができた。

（２）質問紙による授業前後での意識調査の集計と考察（Fは，９の評価方法に対応）

	F．意識調査（14名中）	１つよくそう思う◎	２そう思う ○	３そう思わない △	４全くそう思わない ×
1	確率の勉強は楽しい		8→　6	5→　7	1 →　1
2	確率は，たいくつだ		3→　4	11→１０	
3	確率はやさしい		7→　2	7→１２	
4	確率は，生活の中でだれにも大切だ	2→　0	8→　9	4→　5	
5	確率を学ぶと，論理的に考える力が高まる	0→　2	11→１１	3→　1	
6	**確率を使って何か解決してみたい**	1→　1	11→　9	2→　3	0 →　1
7	確率は社会で役立っていると思いますか	2→　1	7→　9	5→　4	

	役立っている具体例	宝くじ，コンサートの抽選，TVの視聴率→宝くじ

「わかった」という生徒は増えたが，質問紙を授業前後で比較すると，「楽しい」や「やさしい」が減り、「たいくつ」が増えてしまっていた。また「解決してみたい」が２名減った。そこで（解決してみたいを）「×全くそう思わない」と回答した生徒の授業感想を調べてみた。

「宝くじを作る人は、この期待値を使えばかんたんに考えて作ることができるとおもうし、次回また宝くじを作るときにもめあすになって作りやすいのではないかと思う。」期待値の活用場面や（１本の販売額× 46%）の合理性・有用性の理解はできているようだった。おそらく生徒たちは、何時間も授業を続けたことで，疲れて嫌になってしまったかも知れない。

これまで授業の展開を試行錯誤してきたが，ようやく方向性を定めることができた。さらに課題や発問をより精選することで，２時間程度でわかる期待値の授業展開は可能になるだろうと考えている。

（３）H21／10／9 の研究授業の記録から

研究授業では，期待値を企画販売の立場から利用する課題を取り上げ，以下のような意見・感想をいただいた。

問題：忍さんは日本宝くじ協会に就職し，新しく宝くじの企画を立てて売り出すことになりました。最初は不安だったので簡単な例から始めて見ました。

	賞金	本数
１等	□万円	10 本
２等	△万円	20 本
３等	はずれ	70 本

１等，２等の賞金額をいくらにすればよいでしょう。

（研究協議の記録）

①（立場に変えた）忍さん（の案）はよかったが，宝くじを企画する立場に変わる必要感を生徒たちにもたせる前に，先生が変えてしまった。

②よい宝くじをつくろうと議論するときの，観点が定まっていなかったため，議論の落ち着く先が見えない授業だった。

③先生が期待値を導く式がつくれず困っていたが，宝くじをつくっている段階ではまだ期待値に拘らなくてもよかった。

１１．わかっていないと見なされる例

１０（１）ワークシートとテストの集計において点数化したが，それの減点対象となった記述などを，わかっていないと見なされる例にした。

１２　わからない生徒への対応例

授業中の期間指導や授業後の個人指導によって，原因を確認し改めて指導した。

１３　参考資料

1)文部科学省，2005，高等学校学習指導要領解説 数学編理数編，実教出版

2)国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004，平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書 高等学校 数学，実教出版

１４．本単元においてよく見られるつまずきとその原因，及び克服のための指導例

（１）場面設定の把握を正確にさせる

確率や期待値にはいろいろな場面設定があり，それがわからなければ考察は始めることができない。生徒たちのつまずきには数学的な難しさ以前に，場面設定の把握ができていない可能性があることがわかった。身近な例であるから簡単であるという認識を改め，生徒の実態に沿った指導を心掛けたい。

（２）期待値は確率で扱わなくてもよいのではないか

一般に期待値計算はΣ（確率×賞金）とされるが，この意味を生徒たちはなかなか掴めない。宝くじの場合，少なくとも（賞金総額／販売総本数）として扱えば，平均という理解が得やすい。

その場合，小学校でも扱える教材になるのではないだろうか。ただ，宝くじの構造がわかってない可能性があるので，やはり宝くじを実際につくる活動を入れると，期待値の認識が正しく深まるだろう。

選択数学 A　　'09.11.3

テーマ　（　○○○の計算とその意味　）

●販売総額の５４％（＝経費＋自治体の収益金）について

$\boxed{166{,}860{,}000}$ ＝ 販売総額 × ５４．０％

●販売総額の４６％（＝賞金総額）について

上から

$\boxed{142140000}$ ＝ 販売総額 ×４６．０％

下から

$\boxed{142140000}$ ＝ 賞金総額

$\boxed{\text{1本の期待値}}$ ＝ 販売総額 ×４６．０％ ÷ 販売本数

＝ $\boxed{\text{1本の販売額}}$ ×４６．０％

＝ $\boxed{\text{138 円}}$

162（ １４．２％
　　 ３９．８％
138 ４６．０％

● $\boxed{\text{期待値}}$ の計算

	１等	２等	３等	４等	５等	６等	はずれ
賞金額（円）	6000万	1000万	100万	10万	1万	5000円	0円
確率	1/103万本	5/103万本	23/103万本	41/103万本	100/103万本	808/103万本	1029022/103万本

$$\boxed{\text{期待値}} = \left(6000万 \times \frac{1}{103万本}\right) + \left(1000万 \times \frac{5}{103万本}\right) + \left(100万 \times \frac{23}{103万本}\right) + \left(10万 \times \frac{41}{103万本}\right)$$

$$+ \left(1万 \times \frac{100}{103万本}\right) + \left(5000円 \times \frac{808}{103万本}\right) + \left(0 \times \frac{1029022}{103万本}\right)$$

$\frac{1}{103万}$でかこむ

$$= \frac{1}{103万}\left(6000万 \cdot 1 + 1000万 \cdot 5 + 100万 \cdot 23 + 10万 \cdot 41 + 1万 \cdot 100 + 5000円 \cdot 808 + 0 \cdot 1029\ldots\right.$$

$$\frac{142140000}{103万本} = 138円$$

（ 食 ）学科（　　）番氏名（　　　　　　）

●今日分かったこと　11/3
経費と自治体を合わせた56%は、1本300円の56%を販売本数かけた数になることが分かった。
期待値は、1本300円の46%＝138円のことで、宝クジの1本の価値は138円になることが分かった。

●今日の感想　11/3
今回計算や考え方で色々つまよったけど、やっとここまでこれてよかったです。
電卓が使いこなせなくてあわてました。1年生の時より期待値の意味が少し分かった気がします。

工夫点		11/20 期待値のねだんは、1本のねだんの約半分になることが分かった。比の計算の仕方も分かった。
本の販売額	300 円	
売本数	103万本	
売総額	309,000,000	
費	43,878,000	166860000
治体の収益金	122,982,000	
金総額	142,140,000	
等 1 本数 等 5 本数 等 23本数 〃 41 〃 〃 100 〃 〃 808 〃	6000万 1000万 100万 10万 1万 5000円	
ずれ ~~本数~~ → 1029022本		
友だちの意見 (1029022)		

資料２

（ 食 ）学科 （　　）番氏名（　　　　　　）

問題. 次のくじには、以下のような設定がなされている。

設定①	賞金(円)	¥10,000	¥5,000	¥1,000	¥500	¥0
	本数	5	10	20	30	

設定② 賞金総額は、販売総額の45．0%である。

設定③ くじ一枚の販売価格は、3000円である。

(1)このくじ一本の賞金の期待値を求めよ。

$3000 \times \frac{45}{100}$

(答え) 1350 円

(2)このくじの販売本数を求めよ。

$10000\times5+5000\times10+1000\times20+500\times30=$

$50000+50000+20000+15000=135000$

$135000:45=x:100$

$45x=13500000$

$x=300000$

$300000\div3000=100$

(答え) 100 本

6 1000 本のくじの中に，右の表のように当たりくじが入っています。

このくじの中から１本のくじを引くときの賞金の期待値を求め，□の中に書きなさい。

	賞 金	本 数
1 等	10000 円	3 本
2 等	5000 円	10 本
3 等	1000 円	20 本

(1000本の中に含まれる当たりくじの本数とその賞金)

$\frac{1}{1000}(10000\times3+5000\times10+1000\times20)$

$\frac{30000+50000+20000}{1000}$

$=\frac{100\cancel{000}}{1\cancel{000}}=100$

(答え) 100 円

高等学校科学教育調査　　　　2010.01.15

生徒質問紙

「確 率」に関するアンケート

食 科　番氏名

１．あなたは、「期待値」についてどのように思いますか。

（1）期待値の勉強は楽しい
　1 つよくそう思う　2 そう思う　3 そう思わない　4 まったくそう思わない

（2）期待値は、たいくつだ
　1 つよくそう思う　2 そう思う　3 そう思わない　4 まったくそう思わない

（3）期待値はやさしい
　1 つよくそう思う　2 そう思う　3 そう思わない　4 まったくそう思わない

（4）期待値は、生活の中でだれにも大切だ
　1 つよくそう思う　2 そう思う　3 そう思わない　4 まったくそう思わない

（5）期待値を学ぶと、論理的に考える力が高まる
　1 つよくそう思う　2 そう思う　3 そう思わない　4 まったくそう思わない

（6）期待値を使って何か解決してみたい
　1 つよくそう思う　2 そう思う　3 そう思わない　4 まったくそう思わない

（7）期待値は社会で役立っていると思いますか
　1 つよくそう思う　2 そう思う　3 そう思わない　4 まったくそう思わない

①役立っていると答えた人は、具体的な場面を書いてください

宝くじ

（8）期待値の宝くじで、分かったことと、難しかったことを教えてください

1　分かったこと：賞金総額は総額の全てを使うわけじゃないことがわかった。
宝くじを買う時は自分たちの地域で買ったほうがいいことが分かった

2　難しかったこと：
宝くじ考えるのはたいへんだったし計算がたいへんだった。難しかった。

（9）１年のときの期待値の授業と比較して、今回の感想を書いてください

期待値の意味は分からなかったけど、
今回で期待値は何なのか分かった。

今日わかったこと	期待値は、1本の販売額×46.0%。で簡単にでる。 だから、日常でも使えることがわかった。

（氏名）

1本の販売数	¥300	円
販売本数	20,000,000	本
販売総額	6,000,000,000	円
経費 14.2%	852,000,000	円
自治体の収益金 39.2%	2,352,000,000	円
賞金総額 46.0%	2,760,000,000	円

	賞金額	本数	小計
1等	100,000,000	20	2,000,000,000
2等	10,000,000	60	600,000,000
3等	1,000,000	160	160,000,000
4等			
5等			
6等			
7等			
8等			
9等			
10等			
			2,760,000,000

1．（問題）この宝くじの期待値を求めよう。

全体÷ ＝ 1本÷

1本の賞金の平均額

（式）

$$\frac{100,000,000\times20+10,000,000\times60+1,000,000\times160}{20,000,000}$$

$$=\frac{2760,000,000}{20,000,000}=138$$

（答え）

138

（新しい式）

300×46%。＝138　1本の販売額×46%。

2．なぜ、期待値計算が

300円×46%でよいのか？

（理由）

1本に入っている当たり分と全体に入っている当たり分の割り合いが一緒だから。

（よさ）1本で計算したほうが簡単。