

わかる数学の授業を構築するための基礎研究(2)

Preliminary Research on Constructing of Lessons
Which Students Can Understand the Contents of School Mathematics (2)

吉田明史

Akeshi Yoshida

奈良教育大学大学院教育学研究科

School of Professional Development in Education, Nara University of Education

<あらまし> 「わかる」と「できる」の関係は複雑である。「わかる」は、評価の4観点のすべてにわたって使われる。一方、「できる」は、「～を説明すること」、「～を求めること」というように、主に「技能」に関わる言葉として使われる。

数学科においては、当然「わかった」上で「できる」ようになることをねらって授業は展開され、「わかる」ことと「できる」ことは一体であることが望ましい。しかし、評価に当たって「わかる」ということは、「できる」に比べて、それほど意識してきたとは思えないし、学校段階が進むにつれて「できる」ことをもって「わかる」をとらえてきた傾向がある。

本稿は、「わかる」数学の授業を構築するための3つのストラテジーを示し、他教科における「わかる授業」の展開のための一資料を提供するものである。

<キーワード> わかる 理解 わかる授業 わかったことの確認

1. はじめに

1.1. 研究の目的

「わかる」という言葉は、日常的に授業で使われるが、わかる対象を曖昧にして使っていることがある。例えば、教員が児童生徒に対して「わかりましたか?」「わかった?」という言葉が発したとき、「何が」という対象が明らかになっていないまま、「わかりました」と応えるような光景を見受ける。

また、「わかる」ことが、必ずしも「理解」を指しているとは限らないこともある。例えば、数学科の評価の観点からいえば、次のような表現が考えられる。

- ・数学のよさがわかる (関心・意欲・態度)
- ・数学的な見方や考え方がわかる (数学的な見方や考え方)
- ・表現や処理の仕方、解き方がわかる (技能)
- ・概念や知識の意味がわかる (知識・理解)

さらに、数学科においては、「できる」ことと「わかる」こととの複雑な関係から、「わかること」そのものを評価することになっていないこともある。いずれの授業も当然「わかった」上で「できる」よ

くなることをねらって展開され、「わかる」ことと「できる」ことは一体であることが望ましい。しかし、評価に当たって「わかる」ということは、「できる」に比べて、それほど意識してきたとは思えない。

本研究の目的は、これらのことを踏まえて、数学科における「わかる授業」を構築するためのストラテジーを明らかにし、他教科の「わかる授業」の構築に適用できるような提案をすることである。

1.2. 研究の方法

本稿は、筆者が取り組んだ「わかる数学の授業を構築するための基礎研究～小中高接続の重点化を通して～」(科学研究費補助金研究、基盤研究(A)、2007～2009、代表：吉田明史、課題番号：19203037)で得た知見を整理・考察し、より実践的な提案となるようにしたものである。

2. 「わかる」とは

2.1. 先行研究調査

日本数学教育学会誌『数学教育』における1980年代以降、約30年間の中学校及び高等学校における

「わかる授業」の研究についての関連論文(全 819 編)を分析したところ、「数学におけるわかる授業」の特徴は、教育目標である「関心・意欲・態度、又は価値観」「概念・原理・法則」「思考・判断」「表現・処理」の4領域と、研究内容である「わかる授業の開発研究」「わかる授業のための基礎研究」「わかる授業のための評価の研究」「わかる授業のための環境の研究」「わかる授業のための接続の研究」「わかる授業のための教師の働きかけの研究」の6領域が考えられることが明らかとなった(向井ほか 2010)。

ここでは、研究が目指している「教育目標」と、わかる授業のために行われている「研究内容」及び研究で扱われている「数学内容」の3項目についてその概要を示す。(括弧内の数字は、論文数を示す。)

○わかる授業において目指す「教育目標」

- A. 関心・意欲・態度、又は価値観(68)
 - ・面白さ・楽しさ(15)
 - ・有用性(活用・利用)(18)
 - ・美しさ(2)
 - ・(学ぶ)意味と必要性、意義(15)
- B. 概念・原理・法則(80)
 - ・性質・特徴(9)
 - ・意味、仕組み・成り立ち、関係(7)
 - ・背景(4)
- C. 思考・判断(25)
 - ・数学的な見方や考え方(16)
 - ・考え方の根拠(7)
- D. 表現・処理(8)
 - ・手順、求め方、解き方、調べ方(7)
 - ・表し方、まとめ方(13)
 - ・子ども同士の説明の方法や内容(3)
- E. その他(30)

例えば、数学の力、つなげる力

この結果を見ると、本来「わかる」ということが B の「概念・原理・法則」にとどまらず、いろいろな視点から研究されていること、また、A の「関心・意欲・態度、又は価値観」に関わることを授業の目標にしているのが 118 点もあり、B の 100 点を超えている。また、括弧内の論文数は目標が複数ものを除いているが、それらを含めると、A が 194 編、B が 158 編、C が 102 編、D が 41 編…となっており、やはり、「関心・意欲・態度、又は価値観」が一番多い。これは、従来から生徒の数学嫌いを克服することを意図して、数学への関心・意欲・態度を重視したことによるものと考えられる。

○わかる授業のために行われている「研究内容」

- ア) わかる授業の開発研究(408)
- イ) わかる授業のための基礎研究(197)

- ウ) わかる授業のための評価の研究(65)
- エ) わかる授業のための環境の研究(3)
- オ) わかる授業のための接続の研究(2)
- カ) わかる授業のための教師の働きかけの研究(0)

なお、この調査では、各論文に対して、ア)～カ)に相当するものがあれば、二つまで選択しており、括弧内の数値は、二つの項目のいずれかに当てはまった論文数を示している。

ここで、ア)は、わかる授業を作り出すための様々な工夫についての研究のことで、目標設定のあり方、教材、授業の様式、学習指導方法の工夫などの研究である。また、イ)は、わかる授業の構成要因である子どもや教師や学級のあり方や実態を探求する研究である。また、わかるとはどのようなことかという理論的な研究も含まれている。これらが、多数を占めていることは、容易に理解できる。

このア)とイ)について、詳細をみると、

- ① わかる授業のための課題の開発(162)
- ② わかる授業のための子どものわかり方の研究(122)
- ③ わかる授業のための教具・道具の研究(57)
- ④ わかる授業のための子どもの学習活動の研究(54)
- ⑤ わかる授業のための教材の工夫(48)
- ⑥ わかる授業を促進させる要因の研究(38)
- ⑦ わかる授業の構造の研究(38)

となっている。前項のウ)「わかる授業のための評価の研究」が少ないのに比べて、②「わかる授業のための子どものわかり方の研究」の論文が上位を占めているが、これは次のような内容を含んでいるからである。

- ・授業中の子どもの考える様子の分析(授業記録などによる)
- ・授業中のワークシートによる子どもの考える実態の分析
- ・調査による子どもの考える実態の分析
- ・調査による子どもの誤答傾向の分析

つまり、これらは評価そのものの研究ではなく、「理解」の構造の研究に向けられていることを示している。

○研究で扱われている「数学内容」

研究対象となっている分野が明確なところについて、多い順に並べると、図形・幾何(129)、数と式(66)、関数(63)、微積分(25)、集合・論理(22)、確率・統計(17)となり、そのほか複数の分野内容を総合したもの(87)や、全体にわたる汎用的な研究(9)がある。

「わかる」授業に関わる研究対象分野として、図形・幾何が全体(425)の3割を超えていることは、この分野がわかることに関して課題をもっていること、わからせるための様々なアプローチがあることなど

を意味している。

2.2. 「わかる」と「理解」

先の先行研究調査で見てきたように、「わかる」対象は多岐にわたるが、本研究では「わかる」ことの中に「理解」することがあるとらえている。

ここでは、「理解」について述べておきたい。同音語に「理会」がある。大辞林によれば、「理会」は、理解会得から生じ、「物事の道理をさとのみこむこと。合点。」のことで、「理解」とは、「物事の意味・内容をわかること」とある。

奥(1989)は、昭和20年代に「理解」が強調されていて、もともと「理解」の意味は、UnderstandingではなくGeneralizationであると指摘する。また、「理解」の対象としてもっとも重視すべきものは、数学の「原理・法則」であると論じている。さらに、「理解」の類義語として、「了解」「会得」「理会」があるとし、このうち「理会」は、明治33年の小学校令施行規則(文部省令第14号)に「算術ヲ授クルニハ理会ヲ精確ニシ運算ニ習熟シテ…」と記載されるなど、戦前の数学教育の目標を示す法規上の記述に多くみられたが、戦後になって、社会科の影響を受けて「理解」が本格的に使われるようになったと指摘する。

数学教育において「理会」が、「理解」よりも深みがあるGeneralizationという意味を備えた言葉として用いられ、「理解」の対象として「原理・法則」を重視すべきであるという主張は、「概念」を加えた「概念、原理、法則」を考えると、今日の数学科の学習指導要領に示された目標からも頷ける。

また、國宗(2010)は、「理解」を「外部からの情報を取捨選択し、変形し操作を加え、先行知識を含んで自ら再構成して得られた心的状態」のことととらえ、この視点から図形領域における理解について具体的に説明している。

これらのことを踏まえると、理解は、「関心・意欲・態度」や「数学的な見方や考え方」、さらには「技能」などの観点から見て、満足すべき学習がなされ、学んだことを統合し、活用できるものとして自ら再構成して得られた心的・知的状態ととらえられる。

一方、数学教育における「理解」については、多くの先行研究がある。

Skemp(1976)が「Mathematics Teaching, No. 77」に発表した論文において、「関係的理解(relational understanding)と道具的理解(instrumental understanding)」という言葉を用いたことは、よく知られている。向井(2010)は、この主張を契機として数学的理解の研究は、Herscovics&BergeronやPirie&Kierenのモデルなどが示され、「理解論争」時期(1974~1994年)を迎えたと説明している。

これらの研究は、数学的に理解することについて、学習者を観察する視点としての理論を打ち立てたり、理解をとらえる枠組みを考察したりしているが、数学の実践的な研究の基盤になっているとは言い難い点がある。このことは、日本数学教育学会誌『数学教育』1970(1) - 2008(7)に掲載され、「理解」が主題に含まれ、かつ授業実践の記録や評価を伴う全22論文中、「理解論争」期に発表された欧文文献、及びそれらを基礎研究とする和文文献を引用・参考している論文は6論文で、『算数教育』では全25論文中、6論文であることからいえる(向井2010)。

小山(2010)は、「これらのモデルは、いずれも、児童生徒に算数・数学を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか、理解をどのような方向に進化させればよいかなどの教授学的原理を示しうるという意味での『規範的特性』を十分に備えていない」と指摘している。

本稿は、「理解」「わかる」とは何かということをも「理論的」に問うのではなく、あくまでも実践的に論じるものである。「理解」についての実践研究としては、大きく指導内容に関する研究、指導方法に関する研究に分けられるが、ここでは主として後者に焦点を当て、「わかる授業」を構築するための枠組みについて考察する。

3. 「わかる授業」の構築のために

学習指導案などで「～について理解する」「～について理解させる」などの文言がよく用いられるが、「何について」どのような学習状況が見られたら、「理解した」「わかった」ということになるのかを明らかにしていないことがある。「わかる授業」を構築するために、子どもの「わからない状況」「わかりにくい状況」を想定し、その克服のために、指導上の工夫(指導方法)として提案される研究は数多くある。例えば「つまずき」などを生かした学習指導(渡辺1984)や「わかる状態」を作り出すための研究(大塚1984)や、別解を考えたり具象化したりして理解を促進する研究(山本1995)などがある。

本稿では、個別の内容や方法に即して「わかる授業」を考察するのではなく、一般的に「わかる授業」を構築するために必要な3つのストラテジーとして、「わからせる対象の明確化」、「わからせるための工夫」、「わかったことの確認」について考察する。

3.1. わからせる対象の明確化

3.1.1 目標の枠組み等からみた「わからせる対象」
「わかる授業」を展開するためには、まず、わからせたい対象を明確しなければならない。もともと、2.1の先行研究調査の際に、分析の観点として示した教育目標の枠組みは、はじめからあったわけでは

なく、先行研究を整理しながら項目立てしたものである。この教育目標の枠組みと、筆者(2008)が以前に論じた、Davis, E. J(1978)がとらえる「理解」や、国が示してきた学習指導要領や評価規準(参考資料)をもとに整理し、「わからせる対象」として具体化したのが以下に示すものである。

○関心・意欲・態度、又は価値観

ここでは、次の5つを対象として想定している。

- ①面白さ、楽しさがわかる
- ②有用性がわかる
- ③数学の美しさやすばらしさがわかる
- ④ある内容を学ぶ必要性と意味、意義がわかる
- ⑤数学的な見方や考え方のよさがわかる

また、②は、さらに、活用(利用)できることがわかる、活用(利用)されていることがわかる、活用(利用)されてきたことがわかる、と分類できる。

④は、学習の価値観にも関わるもので、単に、これから先の学習のために価値があるということではなく、ある内容を学ぶことで何が明らかになったのか、どんなことに目を向けるようになったのかなども含まれる。

○概念・原理・法則

これは、数学ではもっとも重点の置かれる「わかる」対象で「理解」に直接的に関わるものである(以下「概念等」という。)。ここでは、次の4つが考えられる。

- ①ある概念等の意味、性質や特徴がわかる
- ②ある概念等の成り立ちやその仕組みがわかる
- ③ある概念等の関係がわかる
- ④ある概念等の背景がわかる

②の「成り立ち・仕組み」がわかるとは、学んでいる数学の内容の「基になっているもの、構造」がわかるという意味である。

○数学的な見方や考え方(思考・判断)

数学的な見方や考え方には、「数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方」と「数学を基にした見方や考え方」がある。

前者は、「数学の概念、原理・法則の基礎を支えている考え方」で、後者は「問題解決のための手だてや着眼点、知識や技能を引き出す原動力となるもの」とされている。⁽¹⁾

そのため、わかる対象として次の2つを想定する。

- ①類推、帰納、演繹、一般化、特殊化、記号化などの数学的な見方や考え方そのものがわかる
- ②問題解決に当たって、数学的な見方や考え方の根拠や過程がわかる

○数学的な表現・処理(技能)

ここでは、次の3つを想定している。

- ①手順、求め方、解き方、調べ方がわかる
- ②表し方、まとめ方、整理のしかたがわかる
- ③他者の説明の方法や内容がわかる

なお、③は、①や②に比べて異質であるが、生徒同士の説明で、相互の方法や内容がわかるという意味である。

なお、実際の授業場面ではこれらの「わかる対象」はそれぞれ独立しているのではなく、一層複合的である。しかし、「わかり」(わかっていることの意、以下同様。)をとらえるためには、このように分析的に対象を明らかにして把握することが大切である。

3.1.2. 分野ごとにみた「わからせる対象」

中学校数学には、「数と式」「図形」「関数」「資料の活用」の4領域がある。高等学校においては、「代数」「幾何」「解析」「確率・統計」といった分類になるが、ここでは、数式(代数)分野、図形(幾何)分野、関数(解析)分野、確率・統計分野に分けて、各分野の「わからせる対象」の特性等について述べておく。なお、これまで「領域」ではなく「分野」という表現を用いたのは、より広く数学の内容をとらえようとしたからである。

○数式(代数)分野

中学校においては、次のア～オを目標にして、この分野の指導が行われ、高等学校数学の基礎となっている。⁽²⁾

- ア 数の範囲の拡張と数の概念を理解する
- イ 新しく導入された数の四則計算の意味と方法を理解し、その計算ができる
- ウ 文字のもつ意味、特に変数の意味を理解する
- エ 文字を用いた式に表現したり、文字を用いた式の意味を読み取ったりする能力を育成する
- オ 文字を用いた式の計算や処理に関する能力を育成する

この分野については、「計算や表現(読式を含む)のしかたがわかる」や、「手順がわかる」など、「数学的な表現・処理(技能)」を「わからせる対象」にしがちであるが、その前提として、概念等が「わかる」ことが重要である。

例えば、演算の仕組みの理解、概念の拡張の理解、量の理解、数や数の性質の理解、演算(法則)の意味理解、文字・文字式の理解、変数の理解など、多くの概念等にかかわるものがある。このような概念等の理解には、「できる」こととの関係を踏まえ、段階(水準)を設けて、その深淺を判断する必要もある。

例えば、文字式を例にあげると、國宗・熊倉(1996)は、理解の状態を、①「計算できる」、②「表現でき

る」、③「読式できる」、④「変数を理解している」の4つの観点に対して、4つの水準(0~3)を設け、各水準に位置する生徒の理解の様相を調べている。

(右の水準表に示す○印は、達成していることを意味する。)なお、④の「変数を理解している」というのは、次の4つを理解していることを意味している。

		水準			
		0	1	2	3
①	計算できる	×	○	○	○
②	表現できる	×	×	○	○
③	読式できる	×	×	○	○
④	変数を理解している	×	×	×	○

- ・1つの文字や文字式がいろいろな値をとること
- ・いろいろな値を1つの文字や文字式で表現できること
- ・文字や文字式の変域
- ・「変数」としての文字や文字式の表わす意味

この調査では、「水準2」以上に達する割合は、中学校1年生では40%程度、中学校2年生で60%程度、中学校3年生で80%程度であったが、「水準3」に達するのは、中学校3年生でも23%であったという。このことは、「できる」と「わかる」とことには大きな開きがあること、教育現場では「変数の理解」を伴った「技能の習熟」という指導が十分に進んでいないことを意味する。

こういった意味で、この分野での「わかり」を把握するには、「わかる」という前の段階に「できる」ということを想定するか、「できる」ことが「わかる」ことにどれほど関連づけられているのかを考える必要がある。

今岡(2010)は、この分野は、生徒にとって身近であり、他のすべての分野の基盤を形成する役割を持っているとした上で、この分野における「わかる」ことに関して、次のことを指摘している。

- ①この分野では、学んだことがある程度の内容のまとめりと技能の習熟を経た後に「わかる」という、「できる」ことによって「わかる」という傾向もある。
- ②また、この分野では、前段階の学習の習熟が後段階の学習の基礎になるため、前段階では、スモールステップによる技能の積み重ねや、計算練習の繰り返しの指導も必要である。
- ③前項の場合、必ずしも生徒はこのような指導過程を嫌がるわけではないが、生徒が主体的に取り組まなければ学んだことは定着せず、さらにくりかえし練習を厳しく課せば、生徒は数学が嫌になってしまう可能性もある。このことを克服する可能性として、数学的活動を充実させることが考えられる。

①については、筆者が実施したアンケート調査の項目でも、「計算できることよりも、計算の意味がわ

かることを大切にする」という質問に対して肯定的な回答は、小学校で88.8%であるのに対し、中学校では69.4%、高等学校では75.1%に留まっており、教育現場の状況としてその傾向が見受けられる。(吉田ほか 2010)

また、この分野においては、文字式のよさ、文字式の必要性がわかるなどの「関心・意欲・態度、又は価値観」に関することや、比例の考え、数の拡張の考えがわかるなどの「数学的な見方や考え方(思考・判断)」に関することも考えられる。これらは、概念等の理解や技能の習熟を通して意識されるものと考えられるが、このような視点をもって、指導に当たることも重要である。その際、具体的な題材を工夫したり、考えを共有したりするなどの配慮が必要である。このことについて今岡(2010)は、次の3点をあげている。

- ・具体的な題材を教材として積極的に活用することは有意義であるが、代数の形式的処理の面では具体と結びつけば「わかる」というものではないことに注意する必要があること。
- ・一斉授業で、皆が同じ作業をし、自分の結果が他の子どもと同じように成立していることを意識できるようにすること。
- ・具体と数式や言葉の表現を適切に結びつけることを重視すること。

なお、この分野の「わかる」は、他の分野の関わりの中で生まれてくることにも留意しておく必要がある。例えば、作図を通して平方根について理解したり、図形の面積公式と文字式を関連づけたり、関数と方程式を関連づけたりするなど、数学においては様々な分野の基礎となっている分野でもある。

○図形(幾何)分野

中学校の図形指導に当たっては、次の2つの側面が強調されている。

- 1) 平面図形や空間図形についての基礎的な概念や性質についての理解を深め、それを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てること
- 2) 論理的に考察し表現する能力を一層伸ばすこと

これは、高等学校でも同様であり、國宗(2010)は、図形(幾何)分野における「わからせる対象」として次の3つの柱を立て、いくつかの題材について具体例をあげている。

- ①概念の理解(概念・原理・法則)
- ②能力の形成(思考・判断、表現・処理)
- ③意義・必要性がわかる(関心・意欲・態度、又は価値観)

ここでは、理解が困難とされている高等学校の三角比について、中学校の三平方の定理と関連づけて「わからせる対象」を再整理してみた(表1)。

表1 三平方の定理と三角比の「わかる」

内容 対象	中学3年 三平方の定理	数学I 三角比
意義・必要性がわかる	<ul style="list-style-type: none"> 三平方の定理を学ぶ意味・必要性がわかる。 直角三角形の3辺の長さの関係としてその美しさがわかる。 三平方の定理とその逆が使われている日常の場面のあることがわかる。 2点間の距離を求めるのに三平方の定理が使えることがわかる。 	<ul style="list-style-type: none"> 三角比を学ぶ意味・必要性がわかる。 鈍角まで拡張する意義がわかる。 三角比は、図形の相似をもとにしていることがわかる。 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$が、三平方の定理の形を変えたものであることがわかる。 余弦定理の証明では三平方の定理が使われることがわかる。 余弦定理は三平方の定理の一般三角形への拡張になっていることがわかる。 正弦定理や余弦定理の証明で場合分けが必要であるとわかる。 三角比を用いた計量の考えの有用性がわかる 三角比が(身近な)平面図形や空間図形の考察に活用できることがわかる。
概念の理解	<ul style="list-style-type: none"> 三平方の定理の意味がわかる。 三平方の定理を見出す。 三平方の定理が証明できることを理解する。 三平方の定理の逆が成り立つことを理解する。 	<ul style="list-style-type: none"> 三角比の意味がわかる。 鋭角の三角比について理解する。 三角比の相互関係について理解する。 三角比の値のいずれか一つが決まれば、他の三角比の値が計算できることを理解する。 鋭角の三角比について理解する。 鋭角と鈍角の三角比の関係を理解する。 正弦定理、余弦定理を理解する。(三角形の決定条件と関連付けて) 三角形の面積公式 ($S = \frac{1}{2}bc\sin A$) を理解する。
能力の育成	<ul style="list-style-type: none"> 三平方の定理の証明がわかる(数学的推論)。 三平方の定理を利用して、問題を解決することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> 三角比の相互関係や、性質の関係を見出し証明することができる(数学的推論)。 既習の性質や公式を使うことができる。 鋭角の三角比をもとにして、鈍角の三角比を求めることができる。 正弦定理や余弦定理を用いて三角形を解くことができる。

この表1ように「わからせる対象」をより細かく記述することによって、中学校と高等学校の接続の状況や指導すべき事項がより明確になる。図形(幾何)分野ではこういった表の作成が求められよう。

○関数(解析)分野

中学校の関数指導のねらいは、「いろいろな事象の中に潜む関係や法則を数理的にとらえ、数学的に考察し処理できるようにすること」である。そのためには、関数関係を見だし表現し考察する能力を高めていくことやいろいろな関数を理解することが求められる。このことは、高等学校においても同様である。

熊倉・山口(2010)は、この分野について、中学校の1次関数、 $y = ax^2$ 、高等学校の2次関数、微分法までを視野に入れて考え、「わかる」ということに関して、「概念」、「方法」、「意義・必要性」という柱立てで整理している。これを本稿の枠組みを踏まえて、再整理すると次のようになる。

①関数の定義、性質等の概念(概念・原理・法則)

- 関数を、表、式、グラフを相互に関連付けて理解する。
- 関数のグラフの特徴、変化の割合の特徴について理解する。
- 方程式や不等式の解と関数との関係を理解する。

②関数の性質等を調べる方法(数学的な表現・処理)

- 関数を用いて具体的な事象を、とらえること(変化・対応を読み取る、関数関係を見つける、式に表すなど)、説明できることがわかる。
- 関数を事象の考察に活用できることがわかる。
- 関数の値の変化について、式やグラフを用いて考察したり最大値や最小値を求めたりすることがわかる。

③関数の意義・必要性(関心・意欲・態度、又は価値観)

- 事象の中に関数としてとらえられるもの(関数関係)があることを知る。
- 関数を用いて数量の関係や変化を表現することの有用性を認識する。

3つの柱の下に示した内容は、関数の指導においていずれも大切な事項であり、学習指導要領の解説でも指摘されているところである。特に②は「方法」に関わる内容であるが、「できることがわかる」「方法がわかる」など、単に「できる」という技能を指しているのではないことに留意したい。

熊倉・山口(2010)は、この柱を基に、中学校第2学年の1次関数と高等学校の「数学I」の2次関数について、「わからせる対象」を示している(表2)。

表2 1次関数と2次関数の「わかる」

	1次関数(中学2年)	2次関数(数学I)
概念	<ul style="list-style-type: none"> 1次関数の定義 変化の割合が一定であること 1次関数は、一定の割合で増加あるいは減少すること 1次関数のグラフが直線になること 1次関数のグラフの傾きが変化の割合に等しいこと など 	<ul style="list-style-type: none"> 2次関数の定義 変化の割合が一定でないこと 2次関数は、増加→減少あるいは減少→増加すること 2次関数のグラフが放物線になること yの値が最大または最小になる場合があること など
方法	<ul style="list-style-type: none"> 表、式から関数のグラフをかく方法 表、グラフから関数の式を求める方法 変化の割合を求める方法 表、グラフから変化のようすを読み取る方法 表から対応のようすを読み取る方法 2つの数量の間に、関数の関係を見つける方法 など 	
意義・必要性	<ul style="list-style-type: none"> 1次関数の関係があるとき、ある特定の場合を調べる上で有用であること 1次関数に近似して、未来や過去を予測できること など 	<ul style="list-style-type: none"> 2次関数の関係があるとき、最大あるいは最小となる場合を調べる上で有用であること など

図形(幾何)分野の場合と同様に、このような表を作成することによって、「わかり」「理解」の深まりを明らかにすることができ、「わかる授業」の構築に生かすことができる。

また、関数全体がわかることについて、次の3つをあげている。

- いろいろな関数(構成要素)がわかる
- いろいろな関数相互の関係がわかる(構成要素間の関係がわかる)
- 関数と方程式の関係がわかる(他の対象との関係)

がわかる)

- ・関数の活用方法がわかる (活用の方法と意義がわかる)

これらは、生徒が、中学校1年で「関数」に出会い、その後、高等学校で様々な関数を学んでいくプロセスを踏まえ、「わかり」の質が豊かになっていくことを意味している。

○確率・統計分野

この分野の学習の意義を、中学校学習指導要領数学科解説では、次のように述べている。(括弧内は筆者が加筆)⁽³⁾

「(確定的な答えを導き難い事柄についても、目的に応じて資料を収集・処理し、その傾向を読み取り判断するために必要な) 基本的な方法を理解し、これを用いて資料の傾向をとらえ説明することを通して、統計的な見方や考え方や確率的な見方や考え方を培うことが主なねらいである。」

ここに示されているように、数学的な見方や考え方を培うことに主眼があるが、そこに至るまでに、資料を整理した結果を用いて考えたり判断したりする指導を充実させることが大切である。このことを踏まえ、「わからせる対象」を見直すと、次の4つに整理できる。

- ①確率・統計の諸概念の意義や必要性 (関心・意欲・態度、又は価値観)
- ②確率・統計の概念 (概念・原理・法則)
- ③確率や統計に関わる場合の数の求め方やヒストグラムの表し方などの技能 (技能)
- ④不確定な事象に対する問題解決の方法 (数学的な見方や考え方)

ただし、西村・長尾 (2010) は、①、②、③は、独立しているのではなく、一体化してわかることが、この分野では求められるとし、具体的に、最頻値を例にとって次のように説明している。

「最頻値が『もっとも多く出てくる値』とわかるだけでは、データの傾向を捉える際に用いることはできない。なぜ最頻値を考えるのかがわかり、度数分布表での最頻値の求め方等もわかって、はじめて『最頻値がわかった』と言えるのである。」

さらにまた、④と {①、②、③} との関係も重要で、これらは相互に深く関わっていると、④について、イングランドの国家カリキュラムの統計的な問題解決のサイクルを紹介している (図1)。

すなわち、この分野では身近な事象についての問題解決が中心となるため、「わからせる対象」を分析的に4つの柱に示すことはできても、これらは一体のものとしてとらえる必要があることを示している。この意味で、他の分野とは性質を異にしている。

問題を解決するために、次の4つのデータの処理過程のそれぞれを実行する。

- 1)問題を明確にし、計画を立てる、すなわち、必要とされるデータに関する問いを定式化し、データからどのような推測ができるかを考え、どのようなデータを収集し (サンプルの大きさとデータの形式を含む)、どのような統計的分析が必要かを決定する。
- 2)実験や調査、1次資料や2次資料を含む、さまざまな適切な情報源から、データを収集する。
- 3)データを処理し、表現する、すなわち、生のデータを、問題に対して洞察を与えるような役立つ情報に変換する。
- 4)データを解釈し議論する、すなわち、データから結論を導くことによって最初の問いに答える。

図1 イングランド国家カリキュラムより

3.1.2. まとめ

分野ごとに述べた「わからせる対象」を整理すると表3のようになる。

表3 各分野の枠組み

	数式 (代数)	図形 (幾何)	関数 (解析)	確率・統計
○関心・意欲・態度、又は価値観	・数、文字、方程式、不等式の必要性と意義 ・数の拡張の意義	・図形概念の意義、必要性 ・美しさ ・「への考え」の有用性	・関数概念の意義、必要性 ・関数を用いることの有用性	・確率統計概念の意義、必要性 (ヒストグラム、代表値、確率、標本調査、データの散らばり、相関等) ・概念を活用できること
○概念・原理・法則	・数、集合及び命題に関する概念、性質 ・数及び数式の演算の仕組み、数の拡張 ・変数、演算の意味 ・変数、方程式の概念 ・方程式や不等式の解の意味 ・等式の性質	・図形についての概念や性質 (二等分線、移動、位置関係、合同、相似、三角比等) ・証明の意味	・関数についての概念 ・関数関係の意味 ・関数の定義、性質 ・関数・グラフの特徴 ・関数と方程式、不等式との関係	確率・統計についての諸概念 (代表値、ヒストグラム、範囲、分散、相関係数、標本調査、推測等)
○数学的な見方や考え方 (思考・判断)	・文字を用いて考察すること ・等式の考えを用いること ・式を多面的に見る等	・論理的に考察し表現する能力 (図形の性質を見出すこと、証明の手がかりをつかむこと等)	・関数関係に気づく。	・統計の基本的な考え (標本調査、推測) 不確定な事象に対する問題解決の方法
○数学的な表現・処理 (技能)	・約数や倍数の求め方 ・数式演算の方法 ・数や文字、式を用いた表現 ・方程式、不等式の解き方	・図形の計量、証明の内容、方法 ・座標や式を用いた表現	・関数の性質等を調べる方法 ・関数を用いた具体事象の説明	・統計処理の仕方 (整理、分析、表現) ・確率の求め方 ・確率を用いた表現

この表で、「数学的な表現・処理 (技能)」では、「～ができる」という示し方ではない。例えば、数式 (代数) の「数や文字、式を用いた表現」とは、

「表現できること」ではなく、「表現そのものがわかる」という意味で、単なる自己の表現にとどまらず、他者の表現も読み取るという意味を持つ。この意味で、「できる」ことよりも「わかる」ことの方が対象を広くとらえている。

また、「意味」の理解というとき、本来は「概念の意味」の理解であり、「知識・理解」としてとらえられるものであるが、「学ぶことの意味」の理解となれば、「数学への関心・意欲・態度、又は価値観」に関わるものになる。そのため、今回の学習指導要領で強調されている「意味、必要性、意義」の理解については、何を対象としているかを見定めて指導に当たることが求められる。

さらに、学習指導案などで「～を理解させる」等の表現をするとき、その対象が何かを表3を用いて、どの項目に該当しているのかを考え、分析的に「わかり」を把握することが大切である。

3.2. わかせるための工夫

「わかる授業」を構築する際、「わからせる対象」が明確になれば、次に必要となるのが、その対象を「わからせるための工夫」を考えなければならない。この工夫は、教材(教科書)、生徒、教師の3要素と「わからせる対象」に依存するもので一般化することは困難であるが、あえて学習指導上の工夫として従前から用いられているもののうち、「わかる授業」に関わると考えられるものをあげると、次のように整理できる。

①学習環境を整える

- ・宿題、レポートを課す
- ・教室環境(機器、掲示物等)を整える
- ・発言、発表等のルールを設定する
- 間違いも含めて様々な考えが取り上げられる等

②子どもの実態を把握する

- ・考え方、理解の仕方、つまづきや誤答の傾向

③接続を工夫する

- ・学校間や学年間の接続
- ・内容や方法の接続

④目標設定を工夫する

- ・下位目標の設定、評価との一体化

⑤教材や課題を開発する

- ・興味関心をひく、必要感のある、面白い
- ・数学的発展性のある
- ・オープンエンドな(考え方と答えが多様)
- ・日常事象や社会事象に関連した
- ・数学史的な
- ・ゲーム(遊び)的な要素のある

⑥授業形態を工夫する

- ・一斉、グループ、個別
- ・習熟度別、少人数、TT等

⑦数学的活動を充実させる

- ・見出し・考え・発展させる活動、活用する活動、伝え合う活動をさせる。
観察・操作、実験、討論、説明等
- ・図やマップに表現させる
- ・問題づくりをさせる
- ・十分に考えさせる、学びの振り返りをさせる等

⑧発問と説明・指示を工夫する

- ・必要性、意義、価値を感じさせる
- ・板書の工夫
- ・具体物、半具体物、抽象物の提示の工夫
- ・問題提示の工夫(一般的な、典型的な、単純な)
- ・思考を促す、構造化する

⑨教具を活用する

- ・ノート、プリント、ワークシート
- ・ICT
- ・数学的な教具、図や表など

これら9個の大項目の工夫は、複合的に活用されて意味を持つ。例えば、先の大塚(1984)は、算数の授業で「わかる」状態を作り出すための必要条件として次の6つをあげている。

- 1) 児童ひとりひとりの、潜在的に意味のある内容を強化しておくこと
- 2) 真実感や必要感に満ちた課題を設定すること
- 3) 児童に、自力解決の時間を十分に与え、優生中心の正反応連結だけの授業をしないこと
- 4) 児童に、解決方法の比較・検討の時間を十分に与えること
- 5) 理解すべき内容の強化や補足が十分になされること
- 6) 学習した内容と、学習したすじみち、および、それらと潜在的に意味のある内容との結びつきを明らかにしておくこと

この6つは、9個の大項目でいえば、②、③、⑤、⑦、⑧に相当すると考えられる。

「わかる授業」を構築するためには、「わからせるための工夫」として少なくともこれだけの要素があるということ認識しておくことは必要であり、そのことによって自分の「わかる授業」に関わる「立ち位置(指導観)」を明確にすることができる。

3.3. わかったことの確認

「わからせる対象」が明確になり、その対象を「わからせるための工夫」を凝らした授業を展開して終わるのではなく、最終的に生徒がその対象を本当にわかったのかどうか、「わかったことの確認(評価)」をすることが重要である。

一般に、評価に当たっては、時期、内容、方法を明確にするが、「わかったことの確認」では、内容は「わからせる対象」であるので、ここでは、時期と方法を取りあげる。

確認の時期は、単位時間だけでなく、次や学期ごと、ということが考えられる。あまり確認の期間を長くすることは得策ではないものの「わかる」ことの特徴として、「あのときはわからなかったが、今わかるようになった」ということがあるので、「わからせる対象」の特性に応じて期間を決めることが大切である。

確認の方法としては、生徒の学習評価が中心となるが、授業評価ということも考えられる。前者は、観察（発言・発表等）、ワークシート・ノート、インタビュー・面接、テスト、自己評価（感想文、質問紙、ポートフォリオ等）など様々な方法が考えられるが、そのいずれにしても「このような状況が見られたら『わかっている』と判断してよい」という判断基準が必要である。

八田（2010）は、「微分法の意味の理解」をわからせる対象として授業を行い、授業後「今日の授業の中でわかったこと」を書かせている。そして、次に示すア～ウの基準を設定して生徒の記述を得点化し、ア～ウの得点の合計が3点以上であれば「わかっている」生徒であると判断した。

設定した基準	
ア	関数の増加・減少が微分係数という局所的な考え方から導かれることを知る。 A h を0に近づける・接線の傾きを求める。(2点) B h を0にする・傾きを求める・漠然と書いている。(1点) C 記入なし。(0点)
イ	関数の値の変化の状態を調べることが微分法の目的であることを知る。 A 接線の傾きを求めることが微分である。(2点) B 何となく微分がわかった。(1点) C 記入なし。(0点)
ウ	関数の最大値を求める方法を知る。 A 接線の傾きが0になるところが最大である。(2点) B 傾きを0にすれば求められる。(1点) C 記入なし。(0点)

このほかに、授業で活用したワークシートの記述についても同じ基準で生徒の理解を把握している。

また、授業そのものが生徒や観察者から見て「わかる授業」であったかどうかを確認することも重要である。例えば、次のような生徒用のアンケートが考えられる（吉田 2010）。

このアンケート項目は、いくつかの「わからせるための工夫」を念頭に置いて作成したもので、絶対的なものではない。実際には授業ごとに、授業者の「わからせるための工夫」が異なるので、その工夫に沿って項目を変更することが必要である。

授業後のアンケート		
1. 今日の授業を、1～4で自己評価し、その番号を○で囲んでください。		
4 大いに思う（全くその通り） 3 そう思う（その通り） 2 あまり思わない（ややそうではない） 1 全く思わない（全くそうではない）		
1	何を学習するのかわかった。	4 3 2 1
2	私たちの考え方や理解の状況を確認しながら進めていた。	4 3 2 1
3	既習の内容との関係がわかった。	4 3 2 1
4	進行速度が速かった。	4 3 2 1
5	考える時間が十分にあった。	4 3 2 1
6	ノートをとる時間が十分にあった。	4 3 2 1
7	説明がわかりやすかった。	4 3 2 1
8	黒板に書かせた内容がわかりやすかった。	4 3 2 1
9	プリント、ワークシートなどの配布資料がわかりやすかった。	4 3 2 1
10	授業のレベルは難しかった。	4 3 2 1
11	新しい内容に入る課題（最初の部分）が面白かった。	4 3 2 1
12	学習したことの意味や必要性がわかった。	4 3 2 1
13	次の授業が楽しみになった。	4 3 2 1
14	自主的、意欲的に取り組むことができた。	4 3 2 1
15	友達の考えや解法が参考になった。	4 3 2 1
16	答えの求め方がわかった。	4 3 2 1
17	考え方がわかった。	4 3 2 1
18	新しい知識や考え方などを得ることができた。	4 3 2 1
19	授業で学んだことから発展的に考えてみたいと思った。	4 3 2 1
20	学習したことを同学年又は下学年の生徒に説明できる。	4 3 2 1
21	学習したことを他の問題解決に活用することができる。	4 3 2 1
2. 今日の授業で、わかったことや気づいたことを書いてください。		
3. 今日の授業で、わかりにくいことはどこですか、自由に書いてください。		

松尾（2010）は、授業の観察者が簡潔に評価できる『『わかる授業』のためのチェックリスト』を作成している。これは、中原（1983）の算数科の授業構成の視点としてあげている「興味・関心性」「発見性」「操作性」「評価性」「多様性」「ドラマ性」をもとに、次の6つの視点を設定して作成されている。

- 1 授業のねらいと教材・課題
 - 授業のねらいは明確か。
 - 授業のねらいに合致した教材、課題であるか。
 - 課題の難易度は適切か。
- 2 学びの文脈づくり
 - 学びの文脈をつくられているか。（学ぶことの意味や意義が生徒に見えるか、必然性が感じられるか。）
 - 生徒にとって、授業の目標が明確であるか。
 - 学習内容の位置づけを、生徒が把握できているか。
- 3 興味・関心を高めるために
 - 課題は、生徒の知的好奇心を刺激するものであるか。
 - 生徒にとって、必要性や有用性が感じられる課題設定であるか。
 - 生徒の問題意識、「おや」「なぜ」という気持ちをかき立てる課題か。
- 4 指導方法
 - 問題解決的な学習や発見的な学習を取り入れているか。
 - 具体的な操作活動を取り入れているか。
 - 生徒と数学をつなぐモノ（具体物、半具体物）を準備しているか。
 - コンピュータ等の教育機器の活用を図っているか。

5 授業展開

- 生徒の多様性、問題解決方法の多様性に応じることができるように授業を構成しているか。
- 生徒の考えを広めたり深めたりする「発問」を準備しているか。
- 生徒が考える時間や活動する時間を適切に確保しているか。
- 授業に「ドラマ性」があるか。

6 評価性

- 生徒の反応を確かめながら授業を進めているか。
- あらかじめ典型的なつまづきを把握し、その対策を講じているか。
- 学習につまずいている生徒に対して、適切な指導助言を行っているか。

このチェックリストにおいても、観察者がどのような視点で授業を見るかによって変更することも必要である。なお、これらの生徒用や観察者用の調査において、どれほどの肯定的な回答(数)があれば「わかる授業」とみなすことができるのかという基準も別途決めることが必要である。

4. まとめと課題

「理解」を、様々に学んだことを統合し活用できるものとして自ら再構成して得られた心的・知的状態ととらえ、「わかる」授業を構築するための3つの戦略として①「わからせる対象の明確化」②「わからせるための工夫」③「わかったことの確認」をあげた。②は多様であるが、①と③には整合性がなければならない。「わかってできるようになる」ことは重要であるが、「わかること」自体を評価しているかを意識することが重要である。

ただ、「わかったことの確認」は継続的に把握することも必要である。したがって、数時間程度のまとまりのある内容ごとに指導計画において、「わかり」をどこで把握していくのかをあらかじめ決めておくことや、「わかり」のプロセスをどのようにとらえるかということが課題になろう。今後、より具体的な実践例を基に考察を深めていきたい。

注

- 1) 高等学校学習指導要領解説、文部省、1999、pp. 23-24
- 2) 中学校学習指導要領解説、文部科学省、2008、pp. 44-46
- 3) 前掲2)、pp. 49-52

参考文献

今岡光範(2010)、数式(代数)分野における「わかる」、科学研究費研究成果報告書(I)、研究代表者:吉田明史、pp. 172-183

大塚基司(1984)「算数科における「わかる」授業の展開-わかる状態をつくるための条件についての考察-」、日本数学教育学会誌、66(2)、pp. 32-36
 奥招(1989)、数学教育における理解の概念規定に関する一考察-昭和20年代の「理解」の用語の導入の経緯と概念規定-、(C 理解・認知分科会)、数学教育論文発表会論文集 22、pp. 145-150
 国宗進、熊倉啓之(1996)、文字式についての理解の水準に関する研究、日本数学教育学会誌、臨時増刊、数学教育学論究 65、pp. 35-55
 国宗進(2010)、図形(幾何)分野における「わかる」、科学研究費研究成果報告書(I)、研究代表者:吉田明史、pp. 184-195
 熊倉啓之、山口武志(2010)、関数(解析)分野における「わかる」、科学研究費研究成果報告書(I)、研究代表者:吉田明史、pp. 196-211
 小山正孝(2010)、理解、数学教育学ハンドブック、日本数学教育学会編、pp. 326-336
 中原忠男(1983)、算数科授業構成の視点、算数数学指導、教育総合研究所、pp. 1-4
 西村圭一、長尾篤志(2010)、確率・統計分野における「わかる」、科学研究費研究成果報告書(I)、研究代表者:吉田明史、pp. 212-219
 八田弘恵(2010)、微分の導入の指導と評価、科学研究費研究成果報告書(III)、研究代表者:吉田明史、pp. 267-300
 松尾孝司、「わかる授業」のためのチェックリスト、科学研究費研究成果報告書(I)、研究代表者:吉田明史、pp. 400-405
 向井慶子、高井吾朗、長崎栄三、吉田明史(2010)、日本数学教育学会誌調査、科学研究費研究成果報告書(I)、研究代表者:吉田明史、pp. 17-40
 向井慶子(2010)、算数・数学教育における理解に関する研究の概観、科学研究費研究成果報告書(I)、研究代表者:吉田明史、pp. 98-121
 山本忠(1995)「具象化による数学的理解の方法-重心の方法の幾何への応用を中心に-」、日本数学教育学会誌、77(1)、pp. 2-10
 吉田明史、重松敬一(2008)、わかる数学の授業を構築するための基礎研究(1)、奈良教育大学紀要(人文・社会科学) Vol. 57 no. 1、pp. 211-217
 吉田明史、重松敬一、国宗進、熊倉啓之、山口武志、勝美芳雄、高井吾朗(2010)、科学研究費研究成果報告書(II)、研究代表者:吉田明史、pp. 1-48
 吉田明史(2010)、研究の目的・方法、科学研究費研究成果報告書(I、II、III)、研究代表者:吉田明史、pp. 1-5
 渡辺直美(1984)、子どものつまづきを生かした学習指導-授業過程におけるつまづきの発見と手立て-、日本数学教育学会誌、66(4)、pp. 78-83