紙テープを結んで出来る多角形について *

坂 口 杲 一 **

（数学教室）

1. はじめに

すし屋やレストランなどで、箸袋を結んで、さりげなく５角形を作っている人の姿を時たま見かけることがある。筆者もいつの頃からか見覚えて、割り箸に紙袋がついていると、ついそれを結んでみたくなる。

紙テープを図１のような仕方で結んで、ていねいに折りたたむと、図５のような５角形が出来る。紙テープをもう１回余分に廻して、図２のような仕方で結ぶと、図６のような７角形が出来る。さらにもう１回余分に廻して結ぶと、９角形が出来る。このようにして、一般に２ｎ＋１角形（ｎ≧２）が出来るのであるが、実はこれらの多角形はどれも皆正多角形であることが証明できる。

このようなことは既によく知られた事柄であろうと思っていたのに、今日まで筆者は書物の中でも談話の中でもこれらの事柄に一度も出逢ったことがない。そこで本紀要をかりてその証明を述べてみようと思う。証明は中学校の高学年や高等学校の生徒にもよく分る種類のものであるから、中学や高校の教材として取り上げることもできる。

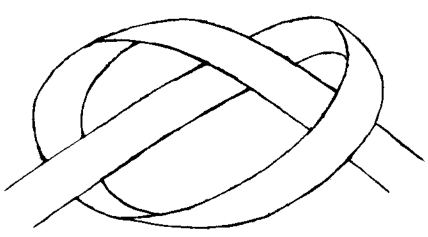

図１

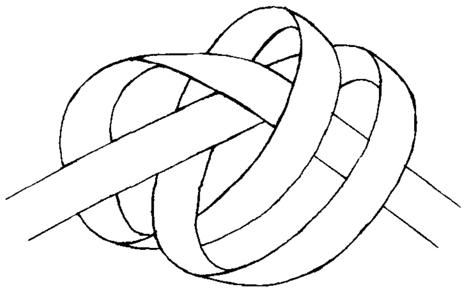

図２

2. 補　　題

証明に際しては、われわれは紙テープを理想化して、縁が平行な２直線で、厚さのない平面の帯であると考えることにする。まず証明に必要な簡単な２つの事実を補題として用意しよう。

紙テープを図３のように折りたたむと、テープが重なった所に出来る３角形ＰＡＢは２等辺３角形である。なぜならば、Ａ、Ｂ

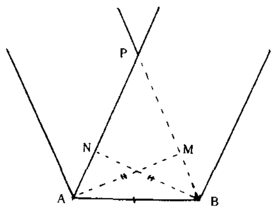

図３

---

* On Polygons Made by Knotting Slips of Paper

** Kōichi Sakaguchi (Department of Mathematics, Nara University of Education, Nara)

からそれぞれＰＢ、ＰＡに垂線を下して、垂線の足をＭ、Ｎとすると、２つの直角３角形ＭＡＢとＮＢＡは、斜辺が共通で、ＡＭ＝ＢＮ（テープの幅）であるから、合同である。だから∠ＭＢＡ＝∠ＮＡＢ、ゆえに、ＰＡ＝ＰＢである。

いま、△ＰＡＢを折り目ＡＢの上に出来る３角形と呼ぶことにすれば、次の補題が証明できたことになる。

補題 1. 紙テープを折りたたむとき、折り目の上に出来る３角形は、折り目を底辺とする２等辺３角形である。

次に、テープを図４のように２個所で折りたたんだとき、折り目ＡＢ、ＣＤの上に出来る２つの２等辺３角形ＰＡＢとＱＣＤは、もしもＰＡ＝ＱＣならば、合同である。なぜならば、Ａ、ＣからそれぞれＰＢ、ＱＤに垂線を下して、垂線の足をＭ、Ｎとすれば、２つの直角３角形ＰＡＭとＱＣＮは、ＰＡ＝ＱＣ、ＡＭ＝ＣＮ（テープの幅）であるから、合同である。だから、∠Ｐ＝∠Ｑ、ゆえに、△ＰＡＢ≡△ＱＣＤである。よって、次の補題が証明できた。

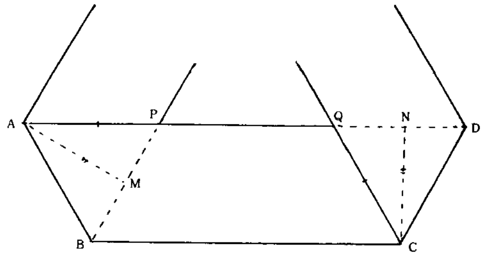

図 4

補題 2. １つの紙テープを２個所で折りたたむとき、折り目の上に出来る２つの２等辺３角形は等辺が等しければ合同である。

3. 正５角形になることの証明

紙テープを図１の仕方で結んで、折りたたんだときに出来る図形が図５であるとして、５角形ＡＢＣＤＥが正５角形であることを証明する。

図の中の直線は、点線も含めて、テープの縁の線と折り目を表している。又①、②、③は折り目の番号である。ＡＢとＥＡは折り目であると同時にテープの縁の線をも表している。いま a、b、c、p、q、x、y によってそれぞれの角を表さしめることにする。補題１により、３つの折り目①、②、③の上に出来る３角形は、皆折り目を底辺とする２等辺３角形であるから、

ＢＤ＝ＤＡ＝ＡＣ＝ＣＥ

である。従って、補題２より、$a=b=c$ となる。

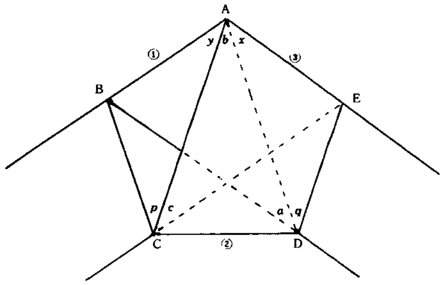

図 5

折り目①と②を２辺とする台形ＡＢＣＤを考えると、ＢＣ∥ＡＤなので、$p=b$ である。それゆえ、$p=a$ となり、台形ＡＢＣＤは円に内接する。次に折り目②と③を２辺とする台形ＣＤＥＡを考えると、上記の台形ＡＢＣＤと事情が全く同じだから、同様に円に内接する。この２つの台形は３つの頂点Ａ、Ｃ、Ｄを共有するので、同じ円に内接する。よって、５角形ＡＢ

ＣＤＥは１つの円に内接する。

次に、ＡＢ ∥ ＥＣであることから$y = c$が、又ＡＥ ∥ ＢＤであることから$x = a$が得られるので、

$$a = b = c = x = y$$

である。よって、５角形ＡＢＣＤＥの５つの辺の上に立つ円周角はどれも皆相等しい。だから、この５角形は円に内接する等辺５角形である。それゆえ、正５角形である。

4. 正７角形などになることの証明

次に、紙テープを図２の仕方で結んで、折りたたんだときに出来る図形が図６であるとして、７角形ＡＢＣＤＥＦＧが正７角形であることを証明する。

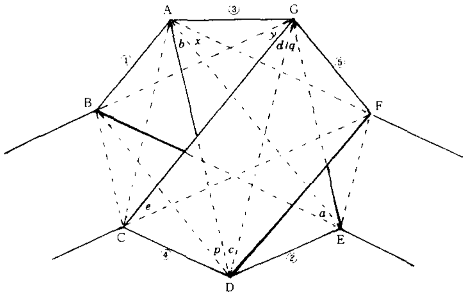

図６

図の中の直線は、点線も含めて、テープの縁の線と折り目を表し、特に①、②、③、④、⑤は折り目の番号を、そうしてa、b、c、d、e、p、q、x、yはそれぞれの角を表すことは５角形の場合と同様であるとする。

５つの折り目の上に出来る３角形に補題１を適用すると、

$$BE = EA = AD = DG = GC = CF$$

であることが分る。このことと補題２とから、

$$a = b = c = d = e$$

が得られる。

さて、２つの折り目①と②を２辺とする台形ＡＢＤＥを考えると、

$$p = b = a$$

であるから、この台形は円に内接する。

次に、②と③を２辺とする台形ＤＥＧＡを考えると、

$$q = c = b$$

であるから、この台形も円に内接する。

次に、③と④を２辺とする台形ＧＡＣＤを考えると、これは②、③を２辺とする台形ＤＥＧＡと事情が同じだから、全く同様の理由によって円に内接する。又④と⑤を２辺とする台形ＣＤＦＧを考えると、これは①、②を２辺とする台形ＡＢＤＥと事情が同じだから、全く同様の理由によって円に内接する。

所が、これらの４つの台形は、つぎつぎと３つの頂点を共有しながら移って行くので、結局４つとも同じ円に内接することになる。従って、７角形ＡＢＣＤＥＦＧは１つの円に内接することが分る。

ここで、台形ＡＢＥＦを考えれば、$x = a$が、又台形ＢＣＦＧを考えれば、$y = e$が得られ

るので、

$$a = b = c = d = e = x = y$$

である。よって、この７角形の７つの辺の上に立つ円周角はどれも皆相等しい。だから、この７角形は円に内接する等辺７角形である。それゆえ、正７角形である。

さて、５角形と７角形の場合に用いた証明の手順は、出来る図形が９角形でも、11角形でも、一般に２n ＋１角形（n ≧２）でも、全く同じようにたどることができる。従って、これらの場合にも全く同様に正多角形であることが証明できる。